

Université de Liège
Faculté des Sciences
Département de Physique



Brisures dynamiques de symétrie et mécanisme de Brout-Englert-Higgs

Jill Ecker

Année académique 2011-2012

**Mémoire présenté en vue de
l'obtention du grade de
Master en sciences physiques**

Remerciements :

Je tiens à remercier mes deux promoteurs, qui ont rendu possible la réalisation de ce travail. Ainsi, mes remerciements vont à Peter Schlagheck, pour ses conseils et son aide dans les développements mathématiques surtout au niveau du deuxième chapitre, et à Jean-René Cudell, pour sa grande disponibilité tout au long de l'année, sa patience et ses nombreuses suggestions d'amélioration. Merci aussi à tous les enseignants que j'ai côtoyés jusqu'à présent, pour avoir partagé leur savoir avec moi. Finalement, je tiens à remercier ma famille pour leur soutien continu.

Table des matières

1	Le mécanisme de Brout-Englert-Higgs	6
1.1	Cas abélien	7
1.2	Cas non-abélien	11
1.3	Masse des fermions	14
1.4	Une théorie ad hoc	15
2	Application à la physique de l'état solide	16
2.1	Bases théoriques	17
2.1.1	La théorie de Ginzburg-Landau	17
2.1.2	La théorie BCS	20
2.1.3	Brisure dynamique de la symétrie $U(1)$ dans les supraconducteurs	22
2.2	La quantification du flux magnétique	25
2.2.1	Méthode de Ginzburg-Landau	26
2.2.2	Méthode de la brisure dynamique de symétrie	27
2.3	L'effet Meissner	28
2.3.1	Méthode de Ginzburg-Landau	29
2.3.2	Méthode de la brisure dynamique de symétrie	32
2.4	Conductivité infinie	34
2.4.1	Modèle de la théorie BCS	34
2.4.2	Méthode de la brisure dynamique de symétrie	36
2.5	Conclusion	37
3	La Technicouleur	39
3.1	Brisure de la symétrie chirale	40
3.1.1	Le modèle sigma-linéaire	40
3.1.2	La symétrie électrofaible brisée par l'interaction forte	43
3.2	Modèles de la Technicouleur	46
3.2.1	Le modèle à un doublet	46
3.2.2	Le modèle de la Technicouleur étendue (ETC)	48
3.2.3	La Technicouleur en cascade	50
3.3	Défauts de la Technicouleur	52
3.3.1	Courants neutres changeant de saveur : FCNC	52
3.3.2	Tests de précision électrofaible	54
3.3.3	La Technicouleur marchante	55
3.4	Bilan	57
A	Définitions et notations	59
B	Le théorème de Noether	62

Introduction

Ce travail de fin d'études est purement synthétique et a pour but de fournir un résumé succinct et compréhensible du sujet choisi. Le sujet en question concerne les brisures dynamiques de symétrie ainsi que le mécanisme de Brout-Englert-Higgs qui va de pair avec les brisures de symétries. En effet, il n'apparaît pas seulement en physique des particules, mais aussi dans tous les systèmes physiques dans lesquels une brisure de symétrie continue peut avoir lieu, à condition qu'ils soient couplés à ce qu'on appelle un champ de jauge. Initialement, le travail devait porter sur le mécanisme de Brout-Englert-Higgs et sur les théories alternatives à celui-ci. Or, comme la découverte du boson de Higgs était imminente quand ce travail a débuté, il a été décidé d'élargir le sujet et d'inclure d'autres théories qui ne constituent pas des théories alternatives à la théorie de Higgs. Un exemple est la brisure de la symétrie électromagnétique qui apparaît dans les supraconducteurs et qui sera le contenu du deuxième chapitre.

Ce travail inclut trois chapitres au total. Le premier, relativement court, porte sur le mécanisme de Brout-Englert-Higgs en général. Il commence par la description de la brisure de la symétrie électromagnétique, décrite par le groupe de symétrie dénoté par $U(1)_{EM}$. Cette brisure de symétrie ne fait pas partie du modèle standard, simplement parce qu'elle n'apparaît pas dans la nature sauf dans des situations exceptionnelles comme par exemple dans le cas des supraconducteurs. En général, les interactions électromagnétiques et les interactions fortes sont décrites par des symétries qui ne sont pas brisées. Notre univers respecte donc la symétrie décrite par les groupes $SU(3)_C \otimes U(1)_{EM}$. Les interactions faibles par contre sont décrites par une symétrie brisée dénotée par $SU(2)_L$. Ceci se manifeste par le fait que les particules médiatrices de l'interaction faible ont une masse non nulle. Un des plus grands succès dans la physique des particules fut l'aboutissement à une théorie unifiée de l'électromagnétisme et des interactions faibles, la théorie électrofaible $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, et la mise en place du mécanisme de Brout-Englert-Higgs permettant de décrire la brisure de cette symétrie $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow U(1)_{EM}$. En principe, la symétrie de l'interaction électromagnétique n'est donc pas brisée. Néanmoins, cet exemple de brisure est souvent utilisé pour familiariser le lecteur avec le concept d'une brisure spontanée de symétrie et avec le mécanisme de Brout-Englert-Higgs, simplement parce que le groupe $U(1)_{EM}$ est plus facile à manipuler et à visualiser que le groupe plus complexe $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. En outre, de nombreux résultats obtenus dans la première section du premier chapitre seront utilisés dans le deuxième chapitre. La deuxième section décrit le mécanisme de Brout-Englert-Higgs tel qu'il apparaît dans le modèle standard, et décrit donc la brisure de la symétrie électrofaible. Dans la troisième section est décrite l'acquisition d'une masse des fermions grâce à ce qu'on appelle le couplage de Yukawa. En effet, le mécanisme de Brout-Englert-Higgs permet de donner une masse aux bosons médiateurs de l'interaction faible, mais les fermions restent sans masse. Ce n'est que par un couplage à la particule de Higgs qu'ils vont devenir massifs. Finalement, dans la dernière section du chapitre sont évoqués les problèmes dont souffre le mécanisme de Brout-Englert-Higgs, comme par exemple le fait que c'est une théorie peu naturelle avec

un trop grand nombre de paramètres libres, si bien que c'est une théorie peu prédictive. Le deuxième chapitre est entièrement consacré à la théorie des supraconducteurs à basse température. A l'heure actuelle, il existe deux grandes théories permettant de décrire la supraconductivité, à savoir la théorie de Ginzburg-Landau et la théorie BCS. Néanmoins, ces deux théories sont basées sur un concept bien plus fondamental, celui de la brisure dynamique de la symétrie de l'électromagnétisme. Or, cet aspect n'est que rarement discuté dans la littérature portant sur la supraconductivité. Le but du deuxième chapitre est donc de décrire à la fois les théories classiques de la supraconductivité et la théorie moins connue de la brisure de symétrie. En effet, les physiciens familiers de la physique des particules ne connaissent pas nécessairement les théories classiques de la supraconductivité tandis que les physiciens de l'état solide ne sont pas nécessairement familiers avec le mécanisme de Brout-Englert-Higgs. Par conséquent, ce travail est peut-être intéressant par le fait qu'il réunit les deux types de théorie. La description rigoureuse de la théorie BCS est plutôt lourde d'un point de vue mathématique, et l'accent sera donc plutôt mis sur la théorie de Ginzburg-Landau. En outre, la théorie de Ginzburg-Landau est plus proche de la théorie de la brisure de symétrie que la théorie BCS. Ces deux points de vue seront donc analysés et comparés. Le chapitre se termine en traçant les similitudes entre l'ancienne situation en physique de l'état solide et la situation actuelle en physique des particules.

Le troisième chapitre porte sur des brisures dynamiques de symétrie apparaissant en physique des particules. L'intérêt est surtout focalisé sur la brisure de la symétrie chirale ainsi que sur la Technicouleur. La brisure de la symétrie chirale fait partie du modèle standard et explique l'apparition des particules appelées pions. En général, cette symétrie n'est pas couplée à un champ de jauge et ne fait donc pas intervenir de mécanisme de Brout-Englert-Higgs. Or, il existe un scénario dans lequel on couple cette symétrie au champ de jauge de l'interaction faible et ainsi le mécanisme de Brout-Englert-Higgs résultant est responsable de la brisure de la symétrie électrofaible. Ce scénario est différent du mécanisme de brisure spontanée décrit dans le modèle standard et a donné naissance à une théorie appelée Technicouleur, qui constitue une théorie alternative au modèle standard. Plusieurs modèles différents de cette théorie sont présentés dans ce dernier chapitre.

Finalement, ce travail inclut encore plusieurs annexes. La première annexe donne des précisions sur les notations, des définitions complémentaires ainsi que quelques exemples et calculs supplémentaires. Nous recommandons au lecteur peu familier avec la théorie quantique des champs de lire cette annexe avant d'aborder la lecture du document principal. La deuxième annexe donne une preuve d'un théorème qui est mentionné plusieurs fois dans ce travail, à savoir le théorème de Noether. La preuve constitue une information complémentaire mais sa lecture n'est pas nécessaire pour la compréhension du travail. La dernière annexe contient des calculs relatifs au troisième chapitre. Ces calculs ont été placés en annexe afin d'éviter d'alourdir le texte. En effet, les développements en question résultent de la théorie des groupes et ne sont pas indispensables pour la bonne compréhension des idées de base des théories de la Technicouleur.

Chapitre 1

Le mécanisme de Brout-Englert-Higgs

Le mécanisme de Brout-Englert-Higgs est un outil qui permet de donner une masse aux bosons de jauge dans le modèle standard. Cette théorie postule que le vide est rempli d'un certain champ appelé champ de Higgs. Lorsque les bosons de jauge et les fermions se meuvent dans le vide, ils interagissent avec ce champ ce qui leur permet d'acquérir une masse. La situation est similaire à celle qu'on rencontre en physique de l'état solide. En effet, la description d'un électron libre n'interagissant pas est aisée d'un point de vue mathématique. Par contre, dans un solide, l'électron n'est pas libre mais se meut dans un certain potentiel créé par les ions et les autres électrons. Or, on peut montrer qu'on peut quand même décrire l'électron comme un électron libre, à condition qu'on remplace la masse habituelle de l'électron par une autre masse, appelée masse effective, dont la valeur est supérieure à celle de la masse habituelle. L'information de l'interaction de l'électron avec son environnement est donc contenue dans la masse effective. Cette approche est similaire à celle dans la théorie de Higgs. On cherche à traduire l'interaction des bosons et des fermions avec le champ de Higgs en une masse effective pour ces derniers.

Les débuts de cette théorie remontent jusque dans les années soixante, quand on a essayé d'expliquer certains phénomènes en physique de la matière condensée. Ainsi, Anderson [1, 2] utilisa des photons massifs pour expliquer certaines situations en physique de la matière condensée non-relativiste. Englert et Brout [3] ont alors généralisé ce mécanisme à la théorie des champs, et Higgs [4, 5] l'a complété légèrement plus tard. Pratiquement simultanément, Guralnik, Hagen et Kibble [6] ont publié des travaux similaires.

Dans la théorie de Higgs, tout comme dans le modèle standard en général, la notion de symétrie est primordiale. En toute généralité, on dit qu'un système physique possède une certaine symétrie quand les équations qui le décrivent gardent la même forme après l'application d'une transformation correspondant à la symétrie en question. Or, même si les équations restent invariantes sous une transformation donnée, il se peut qu'une ou plusieurs solutions aux équations ne soient pas invariantes. Bien entendu, il est équivalent de considérer l'invariance du lagrangien ou du hamiltonien à la place de l'invariance des équations. Ainsi, lorsque le lagrangien d'un système est invariant sous une certaine transformation, mais un des états du système ne l'est pas, on parle d'une *brisure spontanée de symétrie* [7].

De façon générale, on distingue deux types de symétries continues : les symétries *globales*, qui sont les mêmes dans tout l'espace-temps, et les symétries *locales*, encore appelées symétries de jauge, qui peuvent varier d'un point à l'autre de l'espace-temps. En général, les symétries globales donnent les nombres quantiques d'une théorie, tandis que les transformations locales décrivent les interactions entre les particules.

D'après le *théorème de Goldstone*, chaque brisure spontanée d'une symétrie continue *globale*

entraîne l'existence d'une particule scalaire sans masse, appelée boson de Goldstone. Le lecteur intéressé peut trouver quatre preuves différentes de ce théorème dans la référence [8]. Dans le cas d'une brisure spontanée de symétrie *locale*, ces bosons de Goldstone peuvent se transformer en degrés de liberté de polarisation longitudinale des vecteurs bosoniques, qui deviennent alors massifs. Dans un premier temps, nous allons considérer une brisure spontanée de symétrie dans le cadre d'une théorie abélienne¹. Il est alors aisé par la suite de généraliser les résultats obtenus à une théorie non-abélienne.

1.1 Cas abélien

Nous allons considérer un lagrangien d'un champ scalaire complexe en interaction avec lui-même, couplé au champ électromagnétique :

$$L = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi^\dagger \phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1.1)$$

où le potentiel $V(\phi^\dagger \phi)$ est donné par :

$$V(\phi^\dagger \phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (1.2)$$

Le champ ϕ est un champ complexe qu'on peut donc écrire avec la notation complexe de deux champs ϕ_1 et ϕ_2 réels :

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1(x) + i\phi_2(x)) \quad (1.3)$$

Les paramètres μ et $\lambda > 0$ sont des paramètres quelconques. On remarque que la forme du potentiel dépend du signe de μ^2 , comme on peut le voir sur la figure 1.1. Sur cette figure est représenté le potentiel V en fonction des champs ϕ_1 et ϕ_2 .

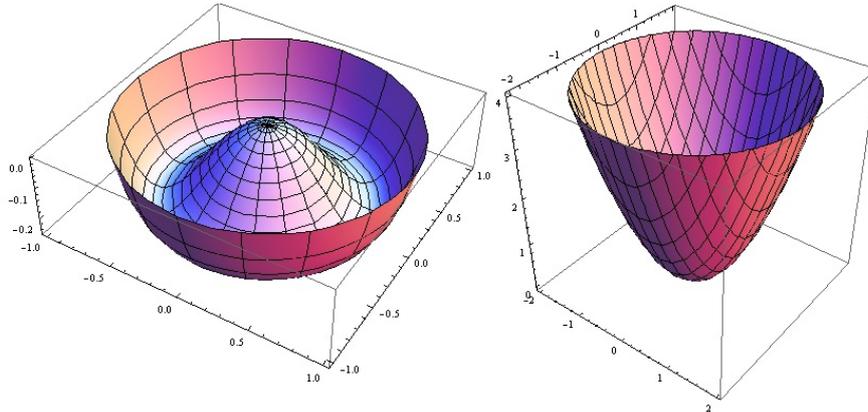


FIGURE 1.1 – La figure à gauche montre la forme du potentiel pour $\mu^2 < 0$. Ce potentiel est aussi appelé chapeau mexicain. La figure à droite montre le potentiel pour $\mu^2 > 0$.

En général, pour assurer l'invariance du lagrangien sous une transformation locale, il faut introduire un champ de jauge A_μ , qui correspond ici au champ électromagnétique, et remplacer la dérivée habituelle ∂_μ par la dérivée covariante D_μ , définie comme suit :

$$D_\mu = \partial_\mu + ieQA_\mu \quad (1.4)$$

1. Un groupe abélien est un groupe dont les éléments commutent entre eux.

où $-e$ est la charge de l'électron et Q l'opérateur charge électrique. Dans le cas abélien, Q correspond au nombre réel 1, il s'agit donc d'une matrice 1×1 . Finalement, l'expression du terme $\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, correspondant au lagrangien du champ de jauge libre, est donnée par :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.5)$$

Le lagrangien (1.1) est alors manifestement invariant sous la transformation de jauge $U(1)_{EM}$ suivante :

$$\phi(x) \rightarrow e^{-ieQ\alpha(x)}\phi(x) \quad (1.6)$$

$$\phi(x)^\dagger \rightarrow e^{ieQ\alpha(x)}\phi(x)^\dagger \quad (1.7)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x) \quad (1.8)$$

où $\alpha(x)$ est une fonction réelle arbitraire. Comme la fonction $\alpha(x)$ dépend de la position x , il s'agit bien d'une transformation $U(1)_{EM}$ locale. L'opérateur Q constitue ici ce qu'on appelle le *générateur* du groupe $U(1)_{EM}$, et la charge e est appelée *constante de couplage* de $U(1)_{EM}$. Les transformations (1.6) correspondent à des rotations dans le plan complexe formé par ϕ_1 et ϕ_2 . La brisure spontanée de symétrie est due au fait que l'état fondamental du système n'est pas toujours invariant sous ces transformations. Nous allons donc déterminer l'état fondamental du système. Le hamiltonien du système formé par les champs A_μ et ϕ est donné par [9] :

$$H = \int d^3x \left(\frac{1}{2}(F_{0i})^2 + \frac{1}{4}(F_{ij})^2 + (D_0\phi)^\dagger(D_0\phi) + (D_i\phi)^\dagger(D_i\phi) + V(\phi^\dagger\phi) \right) \quad (1.9)$$

L'état fondamental du système est donné par la configuration des champs A_μ et ϕ qui minimise l'hamiltonien. Les deux premiers termes de l'intégrand sont des carrés, ils ne peuvent donc pas être négatifs. Ils sont minimaux quand ils sont égaux à zéro. Ceci signifie que les champs électrique et magnétique doivent être zéro puisqu'on a $(F_{0i})^2 = E^2$ et $(F_{ij})^2 = B^2$. Dès lors, comme $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, il faut que A_μ soit la dérivée d'une fonction arbitraire $\beta(x)$ [9] :

$$A_\mu = \partial_\mu\beta(x) \quad (1.10)$$

A_μ est donc purement une jauge. En tenant compte de (1.10), le troisième et le quatrième terme sont nuls lorsque la condition suivante est vérifiée :

$$D_\mu\phi = (\partial_\mu + ieQ\partial_\mu\beta(x))\phi = 0 \quad (1.11)$$

$$\text{c.à.d.} \quad \phi_0(x) = e^{-ieQ\beta(x)} |\phi_0| \quad (1.12)$$

Le module de l'état fondamental du champ ϕ peut être obtenu en minimisant le potentiel :

$$\frac{dV}{d|\phi|} = 0 \Leftrightarrow 2\mu^2|\phi| + 4\lambda|\phi|^3 = 0 \quad (1.13)$$

$$\Leftrightarrow |\phi_0| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} \equiv \frac{v}{\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad |\phi_0| = 0 \quad (1.14)$$

Si $\mu^2 > 0$, le potentiel a la forme représentée à droite sur la figure 1.1, et donc la seule solution pour le module de l'état fondamental est donnée par $|\phi_0| = 0$. L'état fondamental est dans ce cas unique et non dégénéré. Comme il est unique, cet état est invariant sous $U(1)_{EM}$, puisqu'il ne peut se transformer qu'en lui-même. Si par contre $\mu^2 < 0$, le potentiel a la forme

représentée à gauche sur la figure 1.1. On obtient alors une solution instable $|\phi_0| = 0$ et une solution stable $|\phi_0| = v/\sqrt{2}$. Nous allons nous intéresser à la solution stable. Le choix de la fonction $\beta(x)$ est arbitraire et n'influence pas les résultats que nous allons dériver [9]. Sans perte de généralité, nous pouvons par exemple choisir une fonction indépendant de la position dans l'espace-temps, $\beta(x) \equiv \theta$, avec $0 \leq \theta < 2\pi$. Dans ce cas, les états fondamentaux possibles correspondent aux états dégénérés qui se trouvent au fond de la vallée du potentiel. Ils sont donnés par :

$$\phi_0(x) = e^{ieQ\theta} |\phi_0| \quad \text{avec } 0 \leq \theta < 2\pi \quad (1.15)$$

Les différents états ϕ_0 donnés par (1.15) sont donc reliés par des transformations $U(1)_{EM}$, c.à.d. par des rotations dans le plan complexe. En appliquant une transformation $U(1)_{EM}$ à un de ces états ϕ_0 , il sera transformé en un état $\phi'_0 \neq \phi_0$, et par conséquent aucun des états ϕ_0 n'est invariant sous une transformation $U(1)_{EM}$. Nous voyons donc que le lagrangien est invariant sous une transformation $U(1)_{EM}$, mais pas l'état fondamental. Nous avons ainsi brisé spontanément la symétrie $U(1)_{EM}$. On dit qu'en choisissant un de ces états comme étant l'état fondamental du champ ϕ , on donne une direction privilégiée à l'espace d'Hilbert, ce qui brise la symétrie $U(1)_{EM}$. Sans perte de généralité, on peut par exemple choisir $\theta = 0$ dans l'équation (1.15). Nous avons alors :

$$A_\mu^0 = 0 \quad \text{et} \quad \phi_0 = |\phi_0| \quad (1.16)$$

Notons que l'état fondamental doit être unique et bien déterminé, c.à.d. il ne doit pas consister en une superposition de plusieurs états. Ainsi, il n'est pas possible de choisir comme état fondamental une combinaison de tous les états ϕ_0 de (1.15), qui serait alors invariante sous une transformation de jauge $U(1)_{EM}$. En effet, pour que l'état fondamental du système soit une superposition de tous les états du fond de la vallée, il faudrait que le système soit capable de passer d'un état à l'autre. Même s'il n'y a pas de barrière de potentiel entre ces états, le coût en énergie pour un saut est proportionnel au volume Ω du système. Comme les champs s'étendent dans tout l'univers, le volume est infini et par conséquent, l'énergie nécessaire pour un saut l'est aussi. En effet, pour un champ homogène $\phi(t)$, l'énergie cinétique est proportionnelle au volume :

$$E_{cin} = \Omega |\dot{\phi}|^2 \quad (1.17)$$

Dès lors, un changement du champ dans tout l'espace nécessite une énergie infinie [9].

En théorie quantique des champs, on considère que ϕ_0 est la valeur moyenne dans le vide de l'opérateur de champ ϕ [10] :

$$|\langle 0|\phi|0\rangle| = |\phi_0| \quad (1.18)$$

Si on décide d'écrire ϕ sous la forme (1.3), alors on peut choisir comme vide physique l'état ϕ_0 suivant [11] :

$$\langle 0|\phi_1|0\rangle = v \quad \text{et} \quad \langle 0|\phi_2|0\rangle = 0 \quad (1.19)$$

Nous avons donc choisi un état fondamental ϕ_0 réel, c.à.d. perpendiculaire à la direction de l'axe imaginaire ϕ_2 . Comme toujours lorsqu'on est en présence d'un minimum stable [10], on peut utiliser la théorie des perturbations en développant le champ ϕ autour du minimum. Nous définissons la perturbation du champ $\varphi \equiv \phi - \phi_0$:

$$\varphi_1 \equiv \phi_1 - v \quad \text{et} \quad \varphi_2 \equiv \phi_2 \quad (1.20)$$

En insérant la nouvelle expression du champ dans le lagrangien, on trouve :

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_1 \partial^\mu \varphi_1) - \frac{1}{2}(2\lambda v^2)\varphi_1^2 \quad (1.21)$$

$$- \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{(eQ)^2 v^2}{2}A^\mu A_\mu \quad (1.22)$$

$$+ \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2) + eQvA^\mu \partial_\mu \phi_2 + \text{interactions} \quad (1.23)$$

où les termes d'interactions désignent les termes en ordre trois au moins des champs. Le terme en $A_\mu A^\mu$ de cette expression peut être interprété comme un terme de masse du boson vecteur A_μ . Ainsi, le boson de jauge acquiert une masse $M = eQv$. De même, on voit que le champ φ_1 a une masse $m = \sqrt{2}\mu$ tandis que le champ ϕ_2 reste sans masse. Le champ ϕ_2 est donc le boson sans masse de Goldstone, qui apparaît suite à la brisure spontanée de la symétrie locale $U(1)_{EM}$. En effet, en ϕ_0 , le potentiel ne varie pas lors d'un petit déplacement dans la direction de ϕ_2 , le long de la vallée de potentiel. Par contre, il varie de façon quadratique selon la direction radiale φ_1 . Comme la masse est liée à la courbure du potentiel [13], le boson ϕ_2 reste sans masse tandis que le boson φ_1 acquiert une masse.

L'interprétation du dernier terme n'est pas évidente, puisque le produit $eQvA^\mu \partial_\mu \phi_2$ semble suggérer que A_μ et ϕ_2 ne sont pas des coordonnées indépendantes [10]. Il s'avère qu'il n'existe pas de particule directement associée au champ ϕ_2 . En fait, on peut le faire disparaître par un simple choix de jauge. Démontrer ce résultat en théorie quantique des champs est long et fastidieux, et nous n'allons pas le montrer dans ce travail. En effet, ce résultat est donné par le *théorème d'équivalence*, que le lecteur intéressé peut par exemple retrouver dans la référence [12]. Par contre, pour donner une idée de ce qui se passe, nous allons le décrire en théorie classique des champs, en considérant les champs comme des nombres et non plus comme des opérateurs. En toute généralité, en théorie classique des champs, le champ ϕ peut être paramétrisé sous forme polaire de la façon suivante [13] :

$$\phi(x) = \exp\left(\frac{i\xi(x)}{v}\right) \frac{(H(x) + v)}{\sqrt{2}} \quad (1.24)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H(x) + i\xi(x) + \dots) \quad (1.25)$$

Pour de petites perturbations, le champ ξ correspond donc exactement au boson de Goldstone ϕ_2 , tandis que le champ H correspond au champ φ_1 . Comme le lagrangien est invariant sous des transformations $U(1)_{EM}$, on peut effectuer une rotation avec $\alpha(x) = \frac{\xi(x)}{eQv}$ sur le champ complexe ϕ , dans le plan complexe, de sorte que ϕ devienne réel :

$$\phi = \exp\left(-\frac{i\xi}{v}\right) \exp\left(\frac{i\xi}{v}\right) \frac{(H + v)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(H + v) \quad (1.26)$$

$$\text{et } A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{eQv} \partial_\mu \xi \quad (1.27)$$

En tournant le champ ϕ de façon à ce qu'il soit orthogonal au boson de Goldstone ξ , on a annulé sa phase ξ . Le lagrangien garde pour la nouvelle expression du champ exactement la même forme que pour l'ancienne expression de ϕ . Par conséquent, en insérant la nouvelle expression du champ ϕ dans le lagrangien, le terme gênant en $eQvA^\mu \partial_\mu \phi_2 = eQvA^\mu \partial_\mu \xi$ disparaît :

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu H \partial^\mu H) - \frac{1}{2}(2\lambda v^2)H^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{(eQv)^2}{2}B_\mu B^\mu + \dots \quad (1.28)$$

où nous avons introduit un nouveau champ B_μ massif de masse $M = eQv$:

$$B_\mu \equiv \left(A_\mu + \frac{1}{eQv} \partial_\mu \xi \right) \quad (1.29)$$

En comptant les degrés de liberté, on trouve que dans le lagrangien de départ, il y avait deux champs réels ϕ_1 et ϕ_2 , qui représentent chacun un degré de liberté, et un champ vectoriel A_μ sans masse, qui possède deux états de polarisations possibles et qui représente donc deux degrés de liberté. A la fin, nous avons un champ réel H et un champ vectoriel B_μ massif, qui possède maintenant en plus de ses deux polarisations transverses aussi une polarisation longitudinale, il représente donc trois degrés de liberté. Le nombre de degrés de liberté total, quatre en l'occurrence, ne change donc pas. On dit que le boson de Goldstone est « mangé » par le boson vecteur, qui devient massif.

Le fait de tourner le champ ϕ par une transformation de groupe revient à faire un choix de jauge. En électromagnétisme, on applique les conditions de jauge plutôt sur le champ vectoriel A_μ ,² mais on peut aussi appliquer les conditions de jauge sur le champ scalaire ϕ [14]. La jauge dans laquelle ϕ est perpendiculaire aux bosons de Goldstone est appelée *jauge unitaire*.

1.2 Cas non-abélien

Il n'est pas compliqué de généraliser les résultats obtenus précédemment à une théorie non-abélienne. Dans le modèle standard, il s'agit de la symétrie locale $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ qui est brisée spontanément en un sous-groupe $U(1) : SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow U(1)_{EM}$. Comme il y a trois symétries continues associées au groupe $SU(2)$, on peut s'attendre à l'apparition de trois bosons massifs. Ces bosons seront alors les trois bosons massifs de la théorie de l'interaction faible. La symétrie $U(1)_{EM}$ par contre ne sera pas brisée, son boson restera donc sans masse. Ce boson sans masse correspond au photon. Pour réaliser la brisure, on ajoute au lagrangien du modèle standard un champ scalaire, qui possède cette fois plusieurs composantes, puisqu'on souhaite briser la symétrie $SU(2)_L$. Ce champ scalaire est appelé doublet de Higgs et contient deux composantes complexes :

$$\Phi \equiv \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

Le lagrangien de ce champ est donné par :

$$L_{scalair} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger \Phi) \quad (1.31)$$

où le potentiel est encore une fois donné par :

$$V(\Phi^\dagger \Phi) = \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad (1.32)$$

Comme pour le cas abélien, on remplace la dérivée habituelle par la dérivée covariante, afin de garantir l'invariance de jauge du lagrangien sous la transformation $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Son expression est donnée par :

$$D_\mu = \partial_\mu + ig\mathbf{T} \cdot \mathbf{W}_\mu + i\frac{g'}{2}YB_\mu \quad (1.33)$$

$$\text{avec } \mathbf{T} \equiv (T^1, T^2, T^3) \text{ et } \mathbf{W}_\mu \equiv (W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3) \quad (1.34)$$

2. Des exemples en sont la jauge de Lorentz et la jauge de Coulomb : $\partial_\mu A^\mu = 0$ et $\nabla \cdot A = 0$

Les constantes g et g' sont les constantes de couplage associées à $SU(2)_L$ et à $U(1)_Y$ respectivement. Les opérateurs T^i , appelés opérateurs d'isospin faible, correspondent aux trois générateurs de $SU(2)_L$, et les champs W_μ^i représentent les trois champs de jauge qui y sont associés. Nous avons $T^i = \frac{\sigma^i}{2}$, où les σ^i sont les matrices de Pauli. Le champ B_μ est le champ de jauge introduit par la transformation $U(1)_Y$. Le générateur de $U(1)_Y$, l'opérateur Y , est appelé hypercharge faible. Il est défini par la relation suivante :

$$Q = T^3 + \frac{1}{2}Y \quad (1.35)$$

L'hypercharge du doublet de Higgs Φ vaut : $Y = +1$. Le lagrangien est invariant sous les transformations $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ suivantes :

$$\Phi(\mathbf{x}) \rightarrow \exp\left(-ig\mathbf{T} \cdot \omega(x) - i\frac{g'}{2}Y\beta(x)\right) \Phi(\mathbf{x}) \quad (1.36)$$

$$\mathbf{W}_\mu \rightarrow \mathbf{W}_\mu + \partial_\mu\omega(x) - ig\omega(x) \times \mathbf{W}_\mu \quad (1.37)$$

$$B_\mu \rightarrow B_\mu + \partial_\mu\beta(x) \quad (1.38)$$

Pour $\mu^2 < 0$, on peut choisir la valeur moyenne du champ Φ dans le vide :

$$\Phi_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

Comme pour le cas abélien, on peut paramétriser le champ Φ sous la forme suivante :

$$\Phi \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(i\mathbf{T} \cdot \frac{\xi(x)}{v}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

$$\text{avec } \xi \equiv (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \text{ et } \langle \xi^i \rangle_0 = \langle H \rangle_0 = 0 \quad (1.41)$$

où les $\xi^i(x)$ et $H(x)$ sont des champs réels. Comme le lagrangien est invariant sous une transformation $SU(2)$, on peut encore une fois se ramener à la jauge unitaire en appliquant la rotation dans l'espace des isospins $\exp\left(-i\mathbf{T} \cdot \frac{\xi(x)}{v}\right)$ au champ Φ . Le nouveau champ Φ s'écrit :

$$\Phi \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

On remarque que les champs ξ^i , correspondant aux bosons de Goldstone, ont disparus. Seul le champ H reste, qui correspond donc à une particule physique, appelée boson de Higgs. En introduisant le nouveau champ Φ dans le lagrangien, on trouve que le terme cinétique donne :

$$\begin{aligned} & (D_\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi) - \partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \text{termes croisés} \\ &= \frac{1}{2}(0, v + H) \left(gW_\mu^a T_a + \frac{g'}{2}B_\mu \right) \left(gW^{\mu b} T_b + \frac{g'}{2}B^\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(0, v + H) \left(g^2 W_\mu^a W^{\mu b} \underbrace{T_a T_b}_{\frac{1}{2}\delta_{ab}} + gW_\mu^a T_a \frac{g'}{2}B^\mu + \frac{g'}{2}B_\mu gW^{\mu b} T_b + \left(\frac{g'}{2}B\right)^2 \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix} \\ &= \frac{v^2}{8} \left(g^2(W^1)^2 + g^2(W^2)^2 + (-gW^3 + g'B)^2 \right) + \text{termes en H} \end{aligned}$$

Dans le lagrangien, il y a donc apparition de trois bosons vecteurs massifs³. Les quatre particules de la théorie électrofaible observées expérimentalement sont des combinaisons particulières des champs W_μ^i et B_μ , données par :

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) \text{ avec une masse } m_W = g\frac{v}{2} \quad (1.43)$$

$$Z_\mu^0 = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(gW_\mu^3 - g'B_\mu) \text{ avec une masse } m_Z = \sqrt{g^2 + g'^2}\frac{v}{2} \quad (1.44)$$

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(g'W_\mu^3 + gB_\mu) \text{ avec une masse } m_A = 0 \quad (1.45)$$

Le quatrième champ vectoriel A_μ est défini comme étant orthogonal au champ Z_μ^0 . Comme il n'a pas de terme de masse dans le lagrangien, sa masse est nulle, et ce champ correspond au photon, associé à la symétrie $U(1)_{EM}$. Cette symétrie n'est pas brisée, car le vide Φ_0 reste invariant sous cette symétrie [13] :

$$e^{ie\alpha Q}\Phi_0 \approx (1 + ie\alpha Q)\Phi_0 = \Phi_0 \quad (1.46)$$

$$\text{car } Q\Phi_0 = \left(T^3 + \frac{1}{2}Y\right)\Phi_0 \quad (1.47)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 0 \quad (1.48)$$

On voit donc que l'opérateur de charge électrique Q annihile le vide Φ_0 , ce qui n'est pas surprenant puisque le vide ne contient pas de charge électrique. Dès lors, la symétrie engendrant l'électromagnétisme n'est pas brisée spontanément, il n'y a donc pas apparition de boson de Goldstone qui pourrait rendre le photon massif. Notons encore qu'on peut réécrire les relations (1.43) à (1.45) sous une forme plus compacte :

$$\begin{pmatrix} Z_\mu^0 \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \quad (1.49)$$

$$\text{avec } \cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \text{ et } \sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (1.50)$$

où θ_W est l'angle de mélange faible ou angle de Weinberg, défini comme étant l'angle qui apparaît lors du changement de base de (W_μ^3, B_μ) vers (Z_μ^0, A_μ) . Cet angle peut être mesuré expérimentalement et permet de calculer les masses des bosons Z_μ^0 et W_μ^\pm .

Résumons ce qui se passe : nous débutons avec quatre bosons vecteurs sans masse, dont trois sont associés à la symétrie $SU(2)_L$ et le quatrième à la symétrie $U(1)_{EM}$. Les bosons neutres W_μ^3 et B_μ vont se mélanger et former le boson neutre de l'interaction faible Z_μ^0 et le photon A_μ de l'électromagnétisme. Finalement, trois des quatre composantes réelles (ou deux composantes complexes) du doublet de Higgs, correspondant à des bosons de Goldstone, vont se faire absorber par les états W_μ^+ , W_μ^- et Z_μ^0 , qui deviennent lourds. La quatrième composante forme une particule physique indépendante, le boson de Higgs [15]. C'est donc grâce à ce mécanisme de brisure spontanée de symétrie que les bosons de jauge de la théorie des interactions faibles acquièrent une masse tandis que le boson de jauge de l'électromagnétisme reste sans masse, comme il se doit.

3. Précision sur la notation : Si B_μ est un 4-vecteur, alors $B^2 = B_\mu B^\mu = B_0^2 - \mathbf{B}^2$

1.3 Masse des fermions

Nous avons vu comment les bosons acquièrent une masse dans le Modèle Standard. Or, le mécanisme étudié dans la section précédente ne permet pas d'expliquer pourquoi les fermions ont une masse. On pourrait essayer d'introduire dans le lagrangien du modèle standard un terme de masse de la forme $m\bar{\psi}_R\psi_L$, où ψ_R représente les composantes dextrogyres et ψ_L les composantes lévogyres du spineur ψ . Or, un tel terme n'est pas invariant de jauge car les interactions faibles ne se couplent pas à la partie dextrogyre des fermions. Dès lors, le lagrangien ne serait plus invariant de jauge, et on parlerait alors d'une brisure *explicite* de la symétrie. Or, avec des termes de masse dans le lagrangien, la théorie du modèle standard ne serait plus renormalisable [11], ce qui n'est pas acceptable pour une théorie digne de ce nom. Cependant, il est possible de donner une masse aux fermions en les faisant interagir avec le champ de Higgs Φ . On peut réécrire les transformations (1.36) à (1.38) pour un champ fermionique ψ en fonction de ses composantes dextrogyres ψ_R et lévogyres ψ_L :

$$SU(2)_L : \quad \psi_L \rightarrow e^{-ig\mathbf{T}\cdot\omega}\psi_L \quad \bar{\psi}_L \rightarrow \bar{\psi}_L e^{ig\mathbf{T}\cdot\omega} \quad (1.51)$$

$$\psi_R \rightarrow \psi_R \quad \bar{\psi}_R \rightarrow \bar{\psi}_R \quad (1.52)$$

$$U(1)_Y : \quad \psi_L \rightarrow e^{-i\frac{g'}{2}Y\beta}\psi_L \quad \bar{\psi}_L \rightarrow \bar{\psi}_L e^{i\frac{g'}{2}Y\beta} \quad (1.53)$$

$$\psi_R \rightarrow e^{-i\frac{g'}{2}Y\beta}\psi_R \quad \bar{\psi}_R \rightarrow \bar{\psi}_R e^{i\frac{g'}{2}Y\beta} \quad (1.54)$$

Il est alors aisé de vérifier l'invariance sous ces transformation du terme suivant, appelé couplage de Yukawa :

$$L_Y = -\lambda(\bar{\psi}_L\Phi\psi_R + \bar{\psi}_R\Phi^\dagger\psi_L) \equiv -\lambda(\bar{\psi}_L\Phi\psi_R + c.c.) \quad (1.55)$$

où l'abréviation « c.c. » désigne le conjugué complexe et λ est la constante de couplage, appelée constante de Yukawa. Le couplage du champ de Higgs aux fermions permet à ces derniers d'acquérir leur masse. En effet, après la brisure spontanée de symétrie, le champ de Higgs prend la forme (1.42). En remplaçant dans le couplage de Yukawa le champ fermionique par un champ leptonique par exemple, on trouve :

$$L_Y = -\lambda_e \overline{\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix} e_R + c.c. \quad (1.56)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_e v \bar{e}_L e_R + c.c. + \text{termes en H} \quad (1.57)$$

Le terme de Yukawa donne donc un terme de masse pour les électrons, qui acquièrent une masse $m_e = \frac{\lambda_e v}{\sqrt{2}}$. On peut procéder de la même façon pour donner une masse aux quarks down. Il suffit de remplacer dans (1.55) les champs fermioniques ψ_L et ψ_R par les champs de quarks $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$ et d_R respectivement. On trouve alors que les quarks down ont une masse $m_d = \frac{\lambda_d v}{\sqrt{2}}$. L'acquisition d'une masse par les quarks up requiert l'introduction d'un nouveau doublet de Higgs, avec une hypercharge $Y = -1$, de la forme suivante :

$$\tilde{\Phi} = i\sigma^2\Phi^* = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

$\tilde{\Phi}$ est appelé le doublet de Higgs conjugué. Après la brisure spontanée, le champ $\tilde{\Phi}$ acquiert une valeur moyenne dans le vide donnée par :

$$\tilde{\Phi}_0 = i\sigma^2\Phi_0^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.59)$$

En remplaçant Φ par $\tilde{\Phi}$ dans le couplage de Yukawa, on trouve aussi une masse pour les quarks up : $m_u = \frac{\lambda_u v}{\sqrt{2}}$. La masse des neutrinos peut s'obtenir de la même manière. Nous avons considéré ici qu'une seule génération de leptons et de quarks, mais il est possible de généraliser le procédé exposé à trois générations [16].

1.4 Une théorie ad hoc

Bien que le mécanisme de Brout-Englert-Higgs fasse partie du modèle standard et permette d'expliquer de nombreux résultats expérimentaux, il présente beaucoup d'inconvénients aussi. En effet, beaucoup de scientifiques estiment qu'il n'est pas nécessaire d'inventer une nouvelle particule élémentaire simplement pour donner une masse à certaines particules. La tentative d'introduire une nouvelle particule élémentaire à la main fait effectivement ressembler à l'introduction de la substance appelée éther au début du vingtième siècle. Cette substance fut inventée de toute pièces afin de servir de milieu de propagation pour les ondes électromagnétiques. La théorie de la relativité a fini par rendre superflu l'invention de cette nouvelle substance, tout comme il est possible que l'invention de la particule de Higgs soit rendue superflue tôt ou tard.

À part d'introduire une nouvelle particule, le mécanisme de Brout-Englert-Higgs est une théorie qui reste peu prédictive. Ainsi, la valeur moyenne dans le vide $v = 246$ GeV est donnée par l'expérience, mais il est impossible de retrouver cette valeur et donc aussi la masse de la particule de Higgs à partir de la théorie de Higgs. La valeur v joue donc le rôle d'un paramètre qu'on doit ajuster à la main. De même, aucune dynamique du mécanisme de Brout-Englert-Higgs ne permet de prédire la valeur du paramètre μ^2 .

Finalement, le mécanisme de Brout-Englert-Higgs fournit une masse aux bosons de jauge, mais les fermions restent a priori sans masse. Ce n'est qu'en introduisant de manière très artificielle les couplages de Yukawa que les fermions acquièrent une masse à leur tour. Les couplages de Yukawa ne s'intègrent pas au lagrangien du modèle standard de façon naturelle, mais doivent être ajoutés à posteriori.

Nombreux sont donc les arguments qui font que le mécanisme de Brout-Englert-Higgs reste une théorie peu satisfaisante, et il est donc compréhensible que les scientifiques cherchent des théories alternatives. Les théories alternatives les plus prometteuses font intervenir des brisures dynamiques de symétrie, c.à.d. des brisures spontanées de symétrie dans lesquelles la particule qui brise la symétrie n'est pas élémentaire, mais composée d'autres particules. Afin de familiariser le lecteur avec les brisures dynamiques de symétrie, nous allons présenter dans le chapitre suivant la première brisure dynamique de symétrie découverte historiquement, à savoir la brisure dynamique de la symétrie $U(1)_{EM}$ dans les supraconducteurs.

Chapitre 2

Application à la physique de l'état solide

De façon assez surprenante, les idées de base du mécanisme de Brout-Englert-Higgs peuvent être trouvées dans la physique de l'état solide. En fait, Anderson fut le premier à utiliser le concept de photons massifs pour expliquer plusieurs phénomènes révélant de la physique de l'état solide, surtout de la physique des supraconducteurs. La supraconductivité fut découverte en 1911 par H. Kammerling Onnes à Leiden [17, 18, 19]. Il constata qu'en dessous d'une certaine température critique, la résistance du matériau face à la conduction du courant électrique tombe à zéro. Dès lors, une conductivité parfaite fut la première propriété caractéristique attribuée aux supraconducteurs. Une deuxième propriété importante fut découverte en 1933 par Meissner et Ochsenfeld ; il s'agissait du diamagnétisme parfait, c.à.d. de l'expulsion du champ magnétique en dehors du matériau supraconducteur [20]. Depuis, d'autres phénomènes étonnants ont été observés, comme par exemple la quantification du flux magnétique ou l'effet Josephson.

A l'heure actuelle, il n'existe pas encore de théorie qui permette d'expliquer tous les phénomènes liés aux supraconducteurs, notamment la supraconductivité à haute température. Néanmoins, beaucoup de résultats peuvent être reproduits avec des théories approximatives, avec une précision toute à fait étonnante. Les théories les plus connues sont la théorie de Ginzburg-Landau [21], qui est une théorie phénoménologique, et la théorie de Bardeen, Cooper et Schrieffer [22], appelée théorie BCS, qui donne une description microscopique de la supraconductivité. Le fait que des résultats très précis soient obtenus à partir de modèles approximatifs suggère qu'une cause plus fondamentale, indépendante du modèle utilisé, se cache derrière les phénomènes observés [23]. C'est pourquoi on postule que l'apparition de la phase de supraconductivité est liée à une brisure de symétrie, à savoir la brisure de symétrie de l'électromagnétisme $U(1)_{EM}$. Malgré l'insistance d'Anderson sur l'importance de la brisure de symétrie en supraconductivité, cet aspect est peu discuté dans la littérature scientifique.

Dans ce chapitre, nous allons commencer par introduire la théorie de Ginzburg-Landau et établir les équations de base correspondantes. La théorie de Ginzburg-Landau mène naturellement à certains phénomènes comme la quantification du flux ou l'expulsion du champ magnétique, connu aussi sous le nom de l'effet Meissner. Ensuite, les idées de base de la théorie BCS seront présentées, sans pour autant entrer dans les détails mathématiques. En effet, il est possible de retrouver des effets comme l'effet Meissner à partir de la théorie BCS [24], mais le calcul est plus long et plus compliqué, et nous n'allons pas le montrer dans ce travail. Finalement, après avoir présenté les hypothèses de base liées à la brisure de symétrie, nous allons exposer trois phénomènes de la supraconductivité et montrer comment on peut les retrouver à la fois à partir des théories classiques, comme la théorie de Ginzburg-Landau

ou la théorie BCS, et à partir de la simple hypothèse d'une brisure spontanée de symétrie.

2.1 Bases théoriques

2.1.1 La théorie de Ginzburg-Landau

La théorie de Ginzburg-Landau est une théorie macroscopique basée sur la théorie des transitions du second ordre qui a été développée par Landau. En effet, la transition de l'état normal vers l'état supraconducteur correspond à une transition de phase, caractérisée par un paramètre d'ordre. En général, la phase présente à basse température est une phase ordonnée, c.à.d. le paramètre d'ordre est différent de zéro et le système est un système de faible symétrie. Au-dessus d'une certaine température critique, le système devient non-ordonné, son paramètre d'ordre est donc zéro et le système présente une haute symétrie. Développée en 1950, la théorie de Ginzburg-Landau ne reçut au début que peu de considération, puisqu'il s'agit surtout d'une théorie phénoménologique. La situation changea en 1959, lorsque Gor'kov montra que la théorie de Ginzburg-Landau peut être déduite de la théorie BCS [25]. L'hypothèse principale de la théorie de Ginzburg-Landau consiste à identifier le paramètre d'ordre complexe à une fonction d'onde effective $\psi(\mathbf{r})$ représentant les particules supraconductrices telle que la quantité $|\psi(\mathbf{r})|^2$ est proportionnelle à la densité des particules supraconductrices. Le paramètre d'ordre est couplé au champ électromagnétique de façon minimale, l'opérateur de l'impulsion $-i\hbar\nabla$ est donc remplacé par l'opérateur de l'impulsion canonique $-i\hbar\nabla + e^*\mathbf{A}$, où e^* est la charge associée aux particules supraconductrices. En fait, il s'agit là simplement d'un remplacement de l'opérateur de dérivation habituel par l'opérateur représentant la dérivée covariante.

Les propriétés thermodynamiques du supraconducteur peuvent être décrites par l'énergie libre de Gibbs. Ginzburg et Landau ont postulé que, près de la température critique T_c , l'énergie libre de Gibbs peut être développée en série de puissances du paramètre d'ordre ψ . Ainsi, pour un supraconducteur inhomogène plongé dans un champ magnétique externe uniforme, l'énergie libre de Gibbs, exprimée en unités de Gauss cgs, est donnée par la formule suivante [26] :

$$G[\psi, \nabla\psi] = G_0 + \int \left[a|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| -i\hbar\nabla\psi + \frac{e^*}{c}\mathbf{A}\psi \right|^2 + \frac{B^2}{8\pi} \right] dV \quad (2.1)$$

La quantité m^* est la masse d'une particule supraconductrice. Le premier terme représente l'énergie libre de Gibbs du supraconducteur dans l'état normal, c.à.d. l'état non-supraconducteur. Les deux premiers termes dans l'intégrale viennent du développement en série de l'énergie libre de Gibbs et le troisième terme donne l'énergie cinétique des électrons supraconducteurs couplés au champ magnétique. Le quatrième terme donne la densité d'énergie du champ magnétique.

La fonction ψ recherchée est celle qui minimise l'énergie libre de Gibbs, et pour la déterminer, nous pouvons donc appliquer le principe variationnel. Le principe variationnel consiste à annuler la variation de l'énergie libre de Gibbs, en considérant ψ et la dérivée de ψ comme des variables indépendantes [27] :

$$\delta G = 0 \Leftrightarrow \delta \int_V g(\psi, \nabla\psi) dV = 0 \Leftrightarrow \int_V \left(\frac{\partial g}{\partial \psi} \delta\psi + \frac{\partial g}{\partial \nabla\psi} \delta\nabla\psi \right) dV = 0 \quad (2.2)$$

avec

$$g(\psi, \nabla\psi) = a|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| -i\hbar\nabla\psi + \frac{e^*}{c}\mathbf{A}\psi \right|^2 + \frac{B^2}{8\pi} \quad (2.3)$$

En utilisant la relation suivante :

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial \nabla \psi} \delta \psi \right) = \delta \psi \nabla \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial \nabla \psi} \right) + \frac{\partial g}{\partial \nabla \psi} \cdot \nabla \delta \psi \quad (2.4)$$

et le fait que le principe variationnel nous permet de nous limiter aux variations telles que la relation $\delta \nabla \psi = \nabla \delta \psi$ est vraie, l'équation (2.2) devient :

$$\int_V \left(\frac{\partial g}{\partial \psi} \delta \psi + \nabla \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial \nabla \psi} \delta \psi \right) - \nabla \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial \nabla \psi} \right) \delta \psi \right) dV = 0 \quad (2.5)$$

L'intégrale du deuxième terme peut être transformée en intégrale de surface en utilisant le théorème de Gauss :

$$\int_V \nabla \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial \nabla \psi} \delta \psi \right) dV = \int_S \left(\frac{\partial g}{\partial \nabla \psi} \right) \delta \psi \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.6)$$

où \mathbf{n} est le vecteur unitaire perpendiculaire à la surface du supraconducteur. Si on remplace (2.6) dans (2.5) et si on exige que l'équation (2.5) reste vraie pour toute variation $\delta \psi$, on trouve les équations suivantes :

$$\frac{\partial g}{\partial \psi} - \nabla \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial \nabla \psi} \right) = 0 \quad (2.7)$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \nabla \psi} \right) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (2.8)$$

En remplaçant g , nous trouvons la première équation de Ginzburg-Landau et la condition de bord [26] :

$$a\psi^* + b\psi^* |\psi^*|^2 + \frac{1}{2m^*} \left(\frac{ie^*\hbar}{c} \mathbf{A} \nabla \psi^* + \left(\frac{e^*}{c} \right)^2 \mathbf{A}^2 \psi^* \right) \quad (2.9)$$

$$- \frac{1}{2m^*} \nabla \cdot \left(\hbar^2 \nabla \psi^* - \frac{ie^*\hbar}{c} \mathbf{A} \psi^* \right) = 0 \quad (2.10)$$

$$\Leftrightarrow a\psi^* + b\psi^* |\psi^*|^2 + \frac{1}{2m^*} \left(i\hbar \nabla + \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi^* = 0 \quad (2.11)$$

$$\text{Condition de bord : } \left(i\hbar \nabla \psi^* + \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \psi^* \right) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (2.12)$$

Plus précisément, il s'agit de l'équation conjuguée de l'équation de Ginzburg-Landau. La condition de bord assure simplement que la composante du courant normale à la surface du supraconducteur soit zéro, donc il n'y a aucun courant qui traverse la surface d'un supraconducteur, ce qui est une hypothèse bien naturelle [26]. Bien entendu, on peut refaire le même raisonnement avec ψ^* , et on trouve l'équation habituelle de Ginzburg-Landau :

$$a\psi + b\psi |\psi|^2 + \frac{1}{2m^*} \left(-i\hbar \nabla + \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi = 0 \quad (2.13)$$

En tenant compte du fait que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, nous remarquons que l'énergie libre de Gibbs est aussi une fonctionnelle en \mathbf{A} , nous pouvons donc aussi appliquer le principe variationnel par rapport à \mathbf{A} . L'annulation de la variation de G pour une variation de \mathbf{A} nous donne :

$$\delta G = 0 \Leftrightarrow \delta \int_V g(\mathbf{A}, \nabla \times \mathbf{A}) dV = 0 \Leftrightarrow \int_V \left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{A}} \delta \mathbf{A} + \frac{\partial g}{\partial (\nabla \times \mathbf{A})} \delta (\nabla \times \mathbf{A}) \right) dV = 0 \quad (2.14)$$

avec

$$g(\mathbf{A}, \nabla \times \mathbf{A}) = a |\psi|^2 + \frac{b}{2} |\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| -i\hbar \nabla \psi + \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \psi \right|^2 + \frac{(\nabla \times \mathbf{A})^2}{8\pi} \quad (2.15)$$

En se limitant aux variations telles que $\delta(\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \times \delta \mathbf{A}$ et en utilisant la relation suivante :

$$\frac{\partial g}{\partial(\nabla \times \mathbf{A})} \cdot (\nabla \times \delta \mathbf{A}) = \delta \mathbf{A} \cdot \left(\nabla \times \frac{\partial g}{\partial(\nabla \times \mathbf{A})} \right) - \nabla \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial(\nabla \times \mathbf{A})} \times \delta \mathbf{A} \right) \quad (2.16)$$

l'intégrale prend la forme suivante :

$$\int_V \left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{A}} \delta \mathbf{A} + \delta \mathbf{A} \cdot \left(\nabla \times \frac{\partial g}{\partial(\nabla \times \mathbf{A})} \right) - \nabla \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial(\nabla \times \mathbf{A})} \times \delta \mathbf{A} \right) \right) dV = 0 \quad (2.17)$$

Encore une fois, nous pouvons utiliser le théorème de Gauss pour transformer l'intégrale sur le volume du troisième terme en intégrale de surface :

$$\int_V \nabla \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial(\nabla \times \mathbf{A})} \times \delta \mathbf{A} \right) dV = \int_S \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial(\nabla \times \mathbf{A})} \times \delta \mathbf{A} \right) dS \quad (2.18)$$

L'intégrale sur la surface vaut zéro puisque le champ magnétique \mathbf{y} est fixé ; dès lors, nous avons que $\delta \mathbf{A}|_S = 0$ [26]. En exigeant que (2.17) reste vérifiée pour toute variation de \mathbf{A} , nous trouvons l'équation suivante :

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{A}} + \left(\nabla \times \frac{\partial g}{\partial(\nabla \times \mathbf{A})} \right) = 0 \quad (2.19)$$

En remplaçant g , nous trouvons la deuxième équation de Ginzburg-Landau :

$$\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\frac{i\hbar e^*}{2m^*} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{e^{*2}}{m^* c} \mathbf{A} |\psi|^2 \quad (2.20)$$

où \mathbf{J} est la densité de courant donnée par l'équation de Maxwell : $c/(4\pi) \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}$.

En ce qui concerne les paramètres a et b , on suppose que près de la température critique, ils prennent les formes suivantes :

$$a(T) \propto (T - T_c) \text{ et } b(T) = b_0 \quad (2.21)$$

où b_0 est une constante positive. Ainsi, a s'annule à la température critique et est négatif en dessous. Si on trace l'énergie libre de Gibbs en fonction du paramètre d'ordre ψ , qu'on peut prendre réel pour simplifier les choses, on obtient deux courbes différentes selon que la température est au-dessus ou en dessous de la température critique [28]. Pour $T > T_c$, on obtient une solution stable à $\psi = 0$, ce qui signifie que la phase désordonnée, donc à haute symétrie, est la phase la plus stable. La phase désordonnée correspond à l'état normal, puisqu'il n'y a pas de condensation et donc aucune corrélation entre les particules. Pour $T < T_c$, on obtient deux solutions stables pour ψ , différentes de zéro. Ceci signifie qu'en dessous de la température critique, la phase ordonnée à basse symétrie est la plus stable. La phase ordonnée correspond à l'état supraconducteur du matériau, puisqu'un condensat s'est formé et les électrons sont donc parfaitement corrélés. Si on trace l'énergie libre de Gibbs en fonction d'un paramètre d'ordre complexe, les courbes de la figure 2.1 sont des surfaces, ressemblant à un paraboloïde et un chapeau mexicain respectivement. Ce n'est pas vraiment étonnant, puisque l'énergie libre de Gibbs peut être obtenue à partir du lagrangien que nous avons introduit dans la première section du premier chapitre.

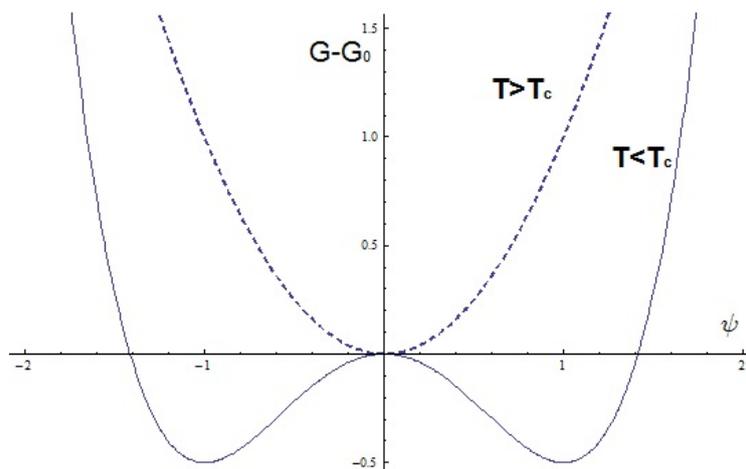


FIGURE 2.1 – La courbe non-pointillée représente l'énergie libre de Gibbs en fonction du paramètre d'ordre en dessous de la température critique. La courbe en pointillée donne l'allure de l'énergie libre de Gibbs en fonction de ψ pour une température supérieure à la température critique. Nous avons choisi ψ réel pour obtenir une courbe unidimensionnelle.

2.1.2 La théorie BCS

La théorie de Ginzburg-Landau permet de retrouver beaucoup de phénomènes liés à la supraconductivité de façon quantitative. Néanmoins, la théorie n'explique pas les origines microscopiques de la supraconductivité. En effet, une explication à l'échelle microscopique de la supraconductivité ne fut proposée que 46 ans après sa découverte, par Bardeen, Cooper et Schrieffer en 1957 [22]. Le premier indice de l'origine microscopique de la supraconductivité fut donné par l'effet isotopique. Il s'avérait que différents isotopes d'un même métal supraconducteur avaient des températures critiques différentes, ce qui montre que non seulement les électrons, mais aussi les ions ou le réseau ionique jouent un rôle important dans l'apparition de la supraconductivité.

En général, les électrons interagissent par le potentiel de Coulomb de façon répulsive. Néanmoins, lorsque les électrons ne sont pas isolés mais plongés dans un réseau d'ions positifs, la répulsion de Coulomb est réduite. On dit que le potentiel de Coulomb est écranté. L'origine physique de cet écrantage peut s'expliquer aisément dans le cas statique. Considérons un électron immobile, entouré d'un réseau d'ions positifs. Les ions positifs vont être attirés vers la charge négative de l'électron, et migrer vers celui-ci. L'électron se retrouve entouré d'un nuage d'ions chargés positivement, ce qui réduit la charge effective négative de l'électron, et par conséquent, la répulsion de Coulomb. La migration des ions est accompagnée d'une distorsion du réseau ionique qu'on appelle un phonon. Cette situation peut être décrite de façon mathématique en utilisant les équations classiques de Maxwell et l'approximation de Thomas-Fermi, qui est valable pour des systèmes à basse température. En effet, on peut montrer [24] que la première équation de Maxwell, écrite sous la forme de Poisson, prend alors la forme suivante :

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\lambda^2}\right)\Phi(r) = -4\pi Q\delta(r) \text{ avec } \lambda^2 = \frac{1}{6\pi} \cdot \frac{\mu}{n_0 e^2} \quad (2.22)$$

où λ est la longueur d'écrantage et Q la charge source créant le potentiel électrique Φ . La solution de cette équation est connue et correspond au potentiel de Coulomb écranté [24] :

$$\Phi(r) = -\frac{Q}{r} e^{-r/\lambda} \quad (2.23)$$

En présence d'ions chargés positivement, la répulsion Coulombienne entre électrons est donc réduite exponentiellement avec la distance séparant les électrons.

Considérons maintenant le cas non-statique, dans lequel l'électron se déplace à vitesse finie dans un réseau ionique. Le traitement mathématique du cas non-statique est compliqué, et nous n'allons pas le montrer dans ce travail. Le développement mathématique a été fait par Fröhlich [29] ainsi que Bardeen, Cooper et Schrieffer [22], qui ont montré que dans le cas non-statique, un terme supplémentaire apparaît dans le potentiel de Coulomb écranté. Ce terme supplémentaire transforme l'interaction entre les électrons en une interaction attractive, qui incite les électrons à former des paires d'électrons, appelées paires de Cooper. L'origine physique de ce phénomène est liée à l'échange de phonons. Comme dans le cas statique, l'électron en mouvement déforme le réseau ionique par interaction Coulombienne. Néanmoins, comme les ions sont beaucoup plus lourds que les électrons, ils continuent leur mouvement même après le passage de l'électron. La déformation maximale du réseau ionique suit donc l'électron à une certaine distance.¹ L'électron d'impulsion initiale k_i a donc créé un phonon d'impulsion q en diffusant dans un état d'impulsion finale k_f : $k_i = q + k_f$. Le phonon ou la déformation du réseau ionique correspond à une concentration de charges positives, qui peut être le centre d'attraction d'un deuxième électron. Le deuxième électron, d'impulsion initiale p_i , peut ainsi absorber le phonon d'impulsion q et diffuser vers un état d'impulsion finale p_f : $p_f = q + p_i$. La conservation de la quantité de mouvement donne donc : $k_i + p_i = k_f + p_f$. Au final, nous avons donc une diffusion ou interaction effective entre deux électrons via l'échange d'un phonon. Cette interaction indirecte provoque la formation des paires de Cooper. Ces paires d'électrons donnent lieu au phénomène de supraconductivité, et correspondent donc aux particules supraconductrices de Ginzburg-Landau. Ainsi, la masse effective et la charge effective correspondent respectivement au double de la masse de l'électron et au double de la charge électronique : $m^* = 2m$ et $e^* = 2e$. Notons que l'idée que les électrons peuvent former des états liés existait déjà avant la théorie BCS. En effet, dès 1956, Cooper avait montré que même une interaction très faible entre deux électrons peut conduire à la formation de paires d'électrons [31].

Pour que les électrons puissent diffuser de leurs états initiaux k_i et p_i vers les états finaux k_f et p_f , il faut que ces derniers soient libres. Dans l'espace réciproque, il faut donc que ces états soient en-dehors de la sphère de Fermi. Comme l'interaction est attractive, la formation de paires de Cooper est accompagnée d'un gain en énergie potentielle. Par contre, le système doit payer une pénalité en énergie cinétique, puisque les paires de Cooper doivent occuper des états en-dehors de la sphère de Fermi, c.à.d. des états d'énergie cinétique plus élevée que les états d'électrons individuels. Si le gain en énergie potentielle est plus important que la perte en énergie cinétique, alors il est énergétiquement favorable pour le système de former un nombre maximal de paires de Cooper. En général, seulement les électrons dont l'énergie ne diffère pas plus que d'une quantité $\hbar\omega_D$ de l'énergie des électrons sur la sphère de Fermi peuvent former des paires de Cooper. En effet, la fréquence de Debye ω_D est la fréquence maximale qu'un stimulus extérieur peut avoir tout en obtenant une réponse du réseau ionique. Si la fréquence de l'électron ne vérifie pas cette condition, alors les ions ne réagiront pas au passage de celui-ci, et il n'y aura pas de création de phonons [26].

Comme les paires de Cooper sont des bosons, ils peuvent tous se placer dans un même état, notamment dans l'état fondamental du système, et former un condensat similaire au condensat de Bose-Einstein. On peut montrer [24, 26] que le premier état excité des paires de Cooper consiste en des électrons non appariés, et que cet état est séparé de l'état fondamental par un *gap* en énergie. Ceci signifie que pour briser les paires de Cooper, il faut fournir une

1. En général, un électron accompagné d'un phonon est appelé un polaron [30].

certaine énergie. Nous allons voir plus tard que ces résultats suffisent pour expliquer certains phénomènes, comme par exemple une conductivité électrique parfaite. Notons encore que, pour réduire l'énergie de l'état fondamental au maximum, il faut que les paires de Cooper soient constituées d'électrons ayant des impulsions et des spins de signes opposés [26].

Les paires de Cooper peuvent être décrites par des paires d'opérateurs électroniques. Pour avoir une formation d'un condensat, il faut donc qu'une paire d'opérateurs d'annihilation développe des valeurs moyennes dans le vide non nulles [32] :

$$\langle 0 | a_{k\uparrow} a_{-k\downarrow} | 0 \rangle \neq 0 \quad (2.24)$$

où a désigne un opérateur d'annihilation. Dès lors, il faut que les paires d'opérateurs d'annihilation développent des valeurs moyennes dans le vide « anormales », dans le sens que traditionnellement, seul des paires formées d'un opérateur de création et d'un opérateur d'annihilation peuvent développer des valeurs moyennes dans le vide non nulles. Ceci est lié au fait que, contrairement à un matériau normal, où les phases des électrons sont distribuées au hasard, dans un matériau supraconducteur, les électrons ont tous une même phase globale puisqu'ils forment un condensat [28].

2.1.3 Brisure dynamique de la symétrie U(1) dans les supraconducteurs

La théorie BCS et la théorie de Ginzburg-Landau permettent d'obtenir des résultats très précis à partir de modèles approximatifs, ce qui est dû au fait que tous les modèles sont basés sur la brisure spontanée de symétrie de l'électromagnétisme. En effet, la plupart des phénomènes liés à la supraconductivité sont indépendants du modèle considéré, on peut les retrouver à partir de la seule hypothèse d'une brisure de symétrie. Dans le cas des supraconducteurs, la symétrie U(1) est brisée de façon dynamique, c.à.d. la particule qui brise la symétrie est une particule composite et non pas une particule élémentaire. La particule en question est composée de deux électrons d'impulsions et de spins opposés, il s'agit là d'une paire de Cooper.

Comme la particule est composée de deux électrons de spins opposés, le spin total de la particule vaut zéro. Dès lors, la paire de Cooper est une particule scalaire, et nous pouvons utiliser le lagrangien d'un champ scalaire couplé à un champ électromagnétique pour briser la symétrie. Le lagrangien le plus simple répondant aux critères requis a été introduit dans la section (1.1). Pour prouver que le lagrangien (1.1) est approprié dans le cas des supraconducteurs, nous allons montrer que les termes décrivant les effets supraconducteurs dans l'énergie libre de Gibbs donnée dans (2.1) peuvent être obtenus à partir du lagrangien (1.1). Pour commencer, déterminons l'expression du courant à partir des équations de mouvement pour le champ électromagnétique A_μ . Pour rappel, le lagrangien (1.1) est donné par l'expression suivante :

$$L = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.25)$$

$$\Leftrightarrow L = (\partial_\mu - ieQA_\mu) \phi^\dagger (\partial^\mu + ieQA^\mu) \phi - V(\phi \phi^\dagger) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.26)$$

$$\Leftrightarrow L = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + ieQA^\mu \phi \partial_\mu \phi^\dagger - ieQA_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + (eQ)^2 A_\mu A^\mu |\phi|^2 - V(\phi \phi^\dagger) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.27)$$

L'équation de mouvement pour le champ A_μ est donnée par :

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\partial L}{\partial A_\nu} = 0 \quad (2.28)$$

$$\Leftrightarrow -\partial_\mu F^{\mu\nu} - ieQ\phi\partial^\nu\phi^\dagger + ieQ\phi^\dagger\partial^\nu\phi - 2e^2Q^2A^\nu|\phi|^2 = 0 \quad (2.29)$$

$$\Leftrightarrow -\partial_\mu F^{\mu\nu} = ieQ\phi\partial^\nu\phi^\dagger - ieQ\phi^\dagger\partial^\nu\phi + 2e^2Q^2A^\nu|\phi|^2 \equiv J^\nu \equiv (\rho, \mathbf{J}) \quad (2.30)$$

où ρ est la densité de charge électrique et \mathbf{J} la densité du courant électrique. Afin de faciliter la manipulation du lagrangien, nous allons le séparer en un terme de Maxwell et un autre terme :

$$L = |D_0\phi|^2 - |D_i\phi|^2 - V(\phi^\dagger\phi) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = |D_0\phi|^2 - |D_i\phi|^2 - V(\phi^\dagger\phi) + L_{Maxwell} \quad (2.31)$$

$$\equiv L_{scalair} + L_{Maxwell} \quad (2.32)$$

Pour obtenir l'énergie de Gibbs de la théorie de Ginzburg-Landau, il faut déterminer le hamiltonien du système qui est donné par la transformation de Legendre du lagrangien :

$$H = \dot{\phi}p + \dot{\phi}^\dagger p^\dagger + \dot{A}_\mu\pi^\mu - L \quad (2.33)$$

$$\text{avec } \pi^\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_\mu}, p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \text{ et } p^\dagger = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^\dagger} \quad (2.34)$$

où π^μ , p et p^\dagger sont les impulsions conjuguées des variables canoniques A_μ , ϕ et ϕ^\dagger respectivement. Un calcul direct donne $\pi^0 = 0$ et $\pi^i = -F^{0i}$. Développons d'abord la transformée de Legendre du lagrangien de Maxwell :

$$\dot{A}_\mu\pi^\mu - L_{Maxwell} = -F^{0i}\partial_0A_i + \frac{1}{4}(F_{00}F^{00} + F_{i0}F^{i0} + F_{0i}F^{0i} + F_{ij}F^{ij}) \quad (2.35)$$

$$= -F^{0i}(\partial_0A_i - \partial_iA_0 + \partial_iA_0) - \frac{1}{2}(F_{0i})^2 + \frac{1}{4}(F_{ij})^2 \quad (2.36)$$

$$= -F^{0i}F_{0i} - F^{0i}\partial_iA_0 - \frac{1}{2}(F_{0i})^2 + \frac{1}{4}(F_{ij})^2 \quad (2.37)$$

$$= (F_{0i})^2 - \underbrace{F^{0i}\partial_iA_0}_{=\partial_i(F^{0i}A_0) - A^0J^0} - \frac{1}{2}(F_{0i})^2 + \frac{1}{4}(F_{ij})^2 \quad (2.38)$$

Le remplacement du deuxième terme à la dernière ligne a été fait en utilisant l'équation (2.30) : $\partial_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu$:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \partial_0F^{00} + \partial_iF^{i0} \\ \partial_0F^{0j} + \partial_iF^{ij} \end{pmatrix} = -J^\nu \quad (2.39)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \partial_iF^{i0} \\ \partial_0F^{0j} + \partial_iF^{ij} \end{pmatrix} = -J^\nu \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\partial_iF^{0i} \\ \partial_0F^{0j} + \partial_iF^{ij} \end{pmatrix} = -J^\nu \quad (2.40)$$

$$\text{Par conséquent, } \partial_i(F^{0i}A_0) = F^{0i}\partial_iA_0 + A_0\partial_iF^{0i} \Leftrightarrow F^{0i}\partial_iA_0 = \partial_i(F^{0i}A_0) - A^0J^0 \quad (2.41)$$

Concentrons-nous maintenant sur la transformation de Legendre de la partie scalaire du lagrangien. Le seul terme qui va contribuer aux impulsions canoniques sera le terme en $|D_0\phi|^2$. Commençons par développer ce terme :

$$|D_0\phi|^2 = ((\partial_0 + ieQA_0)\phi)^\dagger(\partial_0 + ieQA_0)\phi \quad (2.42)$$

$$= (\partial_0 - ieQA_0)\phi^\dagger(\partial_0 + ieQA_0)\phi \quad (2.43)$$

$$= \left| \dot{\phi} \right|^2 + ieQA_0\dot{\phi}^\dagger\phi - ieQA_0\phi^\dagger\dot{\phi} + (eQA_0)^2|\phi|^2 \quad (2.44)$$

Les impulsions conjuguées p et p^\dagger sont donc données par :

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}^\dagger - ieQA_0\dot{\phi}^\dagger = (D_0\phi)^\dagger \text{ et } p^\dagger = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^\dagger} = \dot{\phi} + ieQA_0\dot{\phi} = D_0\phi \quad (2.45)$$

La transformation de Legendre de la partie scalaire du lagrangien est alors donnée par :

$$\dot{\phi}p + \dot{\phi}^\dagger p^\dagger - L_{\text{scalaire}} \quad (2.46)$$

$$= \left| \dot{\phi} \right|^2 - ieQA_0\dot{\phi}^\dagger\dot{\phi} + \left| \dot{\phi} \right|^2 + ieQA_0\dot{\phi}^\dagger\dot{\phi} \quad (2.47)$$

$$- \left(\left| \dot{\phi} \right|^2 + ieQA_0\dot{\phi}^\dagger\dot{\phi} - ieQA_0\dot{\phi}^\dagger\dot{\phi} + (eQA_0)^2 |\phi|^2 - |D_i\phi|^2 - V(\phi^\dagger\phi) \right) \quad (2.48)$$

$$= \left| \dot{\phi} \right|^2 - (eQA_0)^2 |\phi|^2 + |D_i\phi|^2 + V(\phi^\dagger\phi) \quad (2.49)$$

La transformation de Legendre du lagrangien en entier (2.33) donne donc, en remplaçant le courant J^0 par son expression :

$$H = \frac{1}{2}(F_{0i})^2 + \frac{1}{4}(F_{ij})^2 - \partial_i(F^{0i}A_0) + A^0J^0 + \left| \dot{\phi} \right|^2 - (eQA_0)^2 |\phi|^2 + |D_i\phi|^2 + V(\phi^\dagger\phi) \quad (2.50)$$

$$\Leftrightarrow H = \frac{1}{2}(F_{0i})^2 + \frac{1}{4}(F_{ij})^2 - \partial_i(F^{0i}A_0) + |D_0\phi|^2 + |D_i\phi|^2 + V(\phi^\dagger\phi) \quad (2.51)$$

Notons que l'opérateur H désigne la densité hamiltonienne plutôt que le vrai hamiltonien. Pour obtenir le hamiltonien, il suffit d'intégrer la densité hamiltonienne sur le volume du système, ce qui fera disparaître le troisième terme. En effet, le troisième terme est une divergence qui peut donc être transformé en intégrale de surface en appliquant le théorème de Gauss. Sur la surface du supraconducteur, le champ électromagnétique est constant, et donc le facteur F^{0i} s'annule. En outre, dans la théorie de Ginzburg-Landau, on suppose traditionnellement que les variations temporelles du paramètre d'ordre valent zéro, et que le paramètre d'ordre dépend uniquement de sa position dans l'espace. Dans ce cas, du quatrième terme dans le hamiltonien il ne reste que le terme $(eQA_0)^2 |\phi|^2$. Finalement, en intégrant la densité hamiltonienne H sur le volume du système et en remplaçant le potentiel $V(\phi^\dagger\phi)$ par son expression, on obtient :

$$\mathbf{H} = \int_V \left(\underbrace{((eQA_0)^2 - \mu^2)}_{\equiv a} |\phi|^2 + \underbrace{\lambda}_{\equiv b/2} |\phi|^4 + |D_i\phi|^2 + \frac{1}{2}(F_{0i})^2 + \frac{1}{4}(F_{ij})^2 \right) dx^3 \quad (2.52)$$

Cette expression correspond bien à l'énergie de Gibbs de la théorie de Ginzburg-Landau. En effet, le paramètre d'ordre ψ de la théorie de Ginzburg-Landau représente une fonction d'onde d'une paire de Cooper, qui est une particule scalaire. Le paramètre d'ordre joue donc bien le même rôle que le champ scalaire ϕ . Notons aussi que le lagrangien de départ a été exprimé en unités naturelles, dans lesquelles $\hbar = c = 1$, alors que l'énergie de Gibbs est exprimé en unités cgs.

Pour rendre l'équivalence plus apparente, nous pouvons développer les termes en $(F_{0i})^2$ et $(F_{ij})^2$. Nous avons :

$$(F_{0i})^2 = (\partial_0 A_i - \partial_i A_0)^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla A_0 \right)^2 = \mathbf{E}^2 \quad (2.53)$$

$$(F_{ij})^2 = (\partial_i A_j - \partial_j A_i)^2 = 2(\nabla \times \mathbf{A})^2 = 2\mathbf{B}^2 \quad (2.54)$$

Le terme en $(F_{0i})^2 = \mathbf{E}^2$ n'est pas présent dans l'expression de l'énergie de Gibbs. Ceci est dû au fait que nous avons couplé la particule scalaire ϕ à un champ électromagnétique, alors qu'en théorie de supraconductivité, on plonge le supraconducteur dans un champ magnétique seulement et on ne s'intéresse qu'au paramètre d'ordre ψ et au potentiel vecteur \mathbf{A} . Comme le champ électrique est indépendant du potentiel vecteur, nous pouvons intégrer le terme en $(F_{0i})^2$ dans la constante G_0 .

Notons que nous avons calculé ici le hamiltonien, qui correspond en principe à l'énergie interne U du système. Or, l'énergie de Gibbs correspond à une double transformation de Legendre de l'énergie interne : $G = U - TS + PV$, où T est la température, P la pression, V le volume et S l'entropie du système. Néanmoins, ni la pression ni le volume n'interviennent dans les termes décrivant les effets supraconducteurs, ainsi cette partie de l'énergie de Gibbs est équivalente à l'énergie libre $F = U - TS$. Le passage de l'énergie interne à l'énergie libre se fait alors en admettant simplement que le coefficient a est dépendant de la température. Donc, il est justifié d'identifier le hamiltonien à la partie décrivant la supraconductivité de l'énergie de Gibbs.

En plus, remarquons encore que, puisque ϕ représente une particule composée de deux électrons, le coefficient a et donc par conséquent le paramètre μ^2 peuvent être interprétés comme une constante de couplage entre les deux électrons, ou entre un électron et un phonon. En général, la constante de couplage entre des particules dépend de la nature de l'interaction régnant entre les particules en question. Ainsi, μ^2 n'est plus un paramètre dont la valeur doit être donnée à la main, mais bien une quantité dont la valeur peut être calculée à partir de l'interaction existant entre les électrons formant la paire de Cooper. L'or par exemple, est un bon conducteur électrique à température ambiante, ce qui signifie que la constante de couplage entre les électrons et les phonons est faible à température ambiante. Même à basse température, la constante de couplage pour l'or reste faible. Par conséquent, l'or n'est pas un matériau supraconducteur, puisqu'un couplage important entre les électrons et les phonons est nécessaire pour la formation de paires de Cooper, qui briseraient alors la symétrie $U(1)$ et déclencheraient ainsi la supraconductivité. La quantité μ^2 dépend donc de la dynamique entre les électrons, et c'est pourquoi on parle d'une brisure dynamique de symétrie.

2.2 La quantification du flux magnétique

Dans cette section, nous allons présenter un phénomène très connu et caractéristique de la supraconductivité, à savoir la quantification du flux magnétique passant par un trou du supraconducteur. Nous allons d'abord établir cet effet à partir de la théorie standard de Ginzburg-Landau. Ensuite, nous allons montrer comment on peut obtenir le même résultat à partir de la seule hypothèse d'une brisure de symétrie.

Historiquement, la quantification du flux fut prédite pour la première fois par F. London [28], qui obtint néanmoins une valeur du quantum de flux double de la valeur expérimentale trouvée plus tard. Cette erreur était simplement due au fait que London admettait que la charge de la particule supraconductrice était égale à la charge de l'électron, alors qu'en réalité, elle vaut deux fois la charge de l'électron, puisque la particule supraconducteur est constituée de deux électrons [28]. Expérimentalement, la quantification du flux fut découverte en 1961 de façon presque simultanée à la fois aux Etats-Unis par B. Deaver et W. Fairbank [33] et en Allemagne par R. Doll et M. Näbauer [34]. L'expérience consiste à prendre un cylindre creux en matériau supraconducteur et à le placer dans un champ magnétique externe parallèle à l'axe du cylindre, à une température supérieure à la température critique. Ensuite, on diminue la température en dessous de la température critique, afin que le matériau devienne

supraconducteur. Le champ magnétique est alors expulsé en dehors du matériau à cause de l'effet Meissner², mais à l'intérieur du trou, où il n'y a pas de matériau supraconducteur, le champ magnétique reste piégé. Ce flux magnétique est créé par le courant supraconducteur qui circule à la surface interne du trou. Un phénomène intéressant se produit alors : le flux magnétique doit prendre des valeurs discrètes et non pas des valeurs continues, on dit qu'il est quantifié.

L'origine physique de la quantification du flux magnétique est de même nature que la quantification des orbites électroniques dans un atome. En effet, les fonctions d'onde des électrons circulant à la surface du trou le long d'un chemin fermé doivent contenir un nombre entier de longueurs d'onde [26].

2.2.1 Méthode de Ginzburg-Landau

Dans un supraconducteur simplement connexe, comme par exemple un cylindre plein, le paramètre d'ordre et la phase sont des fonctions, c.à.d. à un point de l'espace \mathbf{x} doit correspondre au plus une valeur $\psi(\mathbf{x})$ respectivement $\phi(\mathbf{x})$. Dans notre cas, nous avons un cylindre creux, ce qui correspond à un supraconducteur à connexions multiples. Dans un tel supraconducteur, le paramètre d'ordre reste une fonction, mais la phase devient une application à valeurs multiples. Dès lors, la variation de la phase le long d'un contour fermé doit correspondre à un multiple entier du facteur 2π , ce qui nous donne :

$$\oint \nabla\theta \cdot d\mathbf{l} = n2\pi \quad (2.55)$$

où n est un nombre entier.

Le paramètre d'ordre est un scalaire complexe, nous pouvons donc l'écrire sous forme polaire en fonction d'un module et d'une phase [24] :

$$\psi(\mathbf{x}) = |\psi(\mathbf{x})| e^{i\theta(\mathbf{x})} \Leftrightarrow \nabla\psi = \nabla(|\psi| e^{i\theta}) = i\psi\nabla\theta + e^{i\theta}\nabla|\psi| \quad (2.56)$$

En insérant l'expression polaire de ψ dans la deuxième équation de Ginzburg-Landau (2.20), nous obtenons l'expression suivante pour le courant et le gradient de la phase θ :

$$\mathbf{J} = \frac{\hbar e^*}{m^*} |\psi|^2 \nabla\theta - \frac{e^{*2}}{cm^*} |\psi|^2 \mathbf{A} \Leftrightarrow \nabla\theta = \frac{m^*}{\hbar e^* |\psi|^2} \mathbf{J} + \frac{e^*}{\hbar c} \mathbf{A} \quad (2.57)$$

En insérant l'expression du gradient de θ dans la condition (2.55), nous obtenons :

$$\frac{m^*}{\hbar e^*} \oint \frac{\mathbf{J}}{|\psi|^2} \cdot d\mathbf{l} + \frac{e^*}{\hbar c} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 2n\pi \quad (2.58)$$

En outre, on peut transformer l'intégrale curviligne de \mathbf{A} en intégrale de surface par le théorème de Stokes, ce qui nous donne le flux magnétique ϕ [24] :

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \phi \quad (2.59)$$

En insérant l'expression (2.59) dans l'équation (2.58), nous trouvons :

$$\frac{m^* c}{e^{*2}} \oint \frac{\mathbf{J}}{|\psi|^2} \cdot d\mathbf{l} + \phi = n\phi_0 \quad (2.60)$$

2. Voir la section 2.5.

où la quantité $\phi_0 = \frac{\hbar c}{e^*}$ est appelé un *fluxoid*, introduit par London. Si les parois du cylindre sont épaisses, alors on peut choisir un contour à l'intérieur du matériau, loin du trou, sur lequel le courant produisant le flux est nul : $\mathbf{J} = 0$. Dans ce cas, la quantification du fluxoid correspond à la quantification du flux magnétique [24] :

$$\phi = n\phi_0 \quad (2.61)$$

Le courant \mathbf{J} est nul si le contour encercle le trou sur une distance supérieure à la *longueur de pénétration* λ , donnée par [26] :

$$\lambda^2 = \frac{m^* c^2 b}{4\pi e^{*2} |a|} \quad (2.62)$$

2.2.2 Méthode de la brisure dynamique de symétrie

Considérons la transformation de phase $U(1)$ suivante :

$$\psi(x) \rightarrow e^{\frac{iq\alpha(x)}{\hbar}} \psi(x) \quad (2.63)$$

où q est la charge du champ ψ . On suppose que cette charge q est un multiple entier de la charge électronique $-e$. Admettons que la symétrie $U(1)$ soit brisée par l'apparition d'un condensat formé de paires de Cooper, représentées par deux opérateurs d'annihilation d'électrons, comme nous l'avons vu à la fin de la section 2.2. La brisure de symétrie est donc due au développement d'une valeur moyenne dans le vide non nulle de ces opérateurs d'annihilation :

$$\langle 0 | \psi_A \psi_B | 0 \rangle \neq 0 \quad (2.64)$$

La particule décrite par $\psi_A \psi_B$ est une particule scalaire complexe, qu'on peut donc écrire sous forme de deux champs réels $(\psi_A \psi_B)_1$ et $(\psi_A \psi_B)_2$:

$$\psi_A \psi_B = (\psi_A \psi_B)_1 + i(\psi_A \psi_B)_2 \quad (2.65)$$

Pour que la brisure de symétrie ait lieu, il faut que l'état fondamental soit non-invariant sous la transformation (2.63), ce qui est le cas sauf pour les transformations avec $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi\hbar/e$. La première transformation correspond bien sûr à la transformation identité tandis que la deuxième correspond à un changement de signe. Tout état formé par un nombre pair d'opérateurs de champ ψ est invariant sous cette dernière. Par conséquent, le groupe $U(1)$ est brisé en un sous-groupe Z_2 dont les deux transformations laissent l'état fondamental invariant. Selon le théorème de Goldstone, la brisure de symétrie entraîne l'apparition d'un boson de Goldstone ϕ . Anderson [2, 1] a suggéré que cette particule de Goldstone se combine aux photons du champ électromagnétique, qui devient alors massif. Or, un champ massif a une portée finie. Ainsi, à l'intérieur du supraconducteur, le champ électromagnétique est transformé en un champ de courte portée, ce qui va conduire à l'effet Meissner³.

Comme nous l'avons fait dans (1.24) ou dans (1.40), nous pouvons paramétriser le champ ψ sous la forme polaire suivante [23] :

$$\psi(x) \equiv \exp(iq\phi(x)/\hbar) \tilde{\psi}(x) \quad (2.66)$$

où ϕ est le boson de Goldstone et $\tilde{\psi}$ un champ électronique réel et invariant de jauge. Sous cette forme, il est clair que la loi de transformation du boson de Goldstone ϕ sous (2.63) s'écrit :

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \alpha(x) \quad (2.67)$$

3. Voir la section 2.5.2.

Comme nous l'avons vu au premier chapitre, ce boson de Goldstone vient de la particule qui brise la symétrie ; il correspond effectivement à la phase ou la composante imaginaire du champ qui brise la symétrie. Dès lors, nous avons :

$$\phi \sim (\psi_A \psi_B)_2 \quad (2.68)$$

Composé de deux opérateurs ψ , le boson de Goldstone doit être invariant sous la transformation Z_2 , ce qui nous oblige à identifier ϕ et $\phi + \pi\hbar/e$ [14] :

$$\phi(x) \equiv \phi(x) + \pi\hbar/e \quad (2.69)$$

Ceci signifie qu'à un point de l'espace x , on peut associer plusieurs valeurs équivalentes, sous la condition que l'espace en question ne soit pas simplement connexe.

Considérons maintenant encore une fois un cylindre creux dont les parois sont plus épaisses que la longueur de pénétration λ . Prenons un contour à l'intérieur du matériau supraconducteur, encerclant le trou. Sur ce contour, la quantité $\mathbf{B} = \nabla\phi - \mathbf{A}$ s'annule. Il s'agit là de l'effet Meissner que nous allons démontrer dans la section suivante. Dès lors, la variation de ϕ le long du contour est donnée par [23] :

$$\delta\phi = \oint \nabla\phi \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \stackrel{Stokes}{=} \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \Phi \quad (2.70)$$

où Φ représente le flux magnétique. Lorsqu'on fait varier ϕ le long d'un chemin fermé, il faut que la valeur de $\phi(\mathbf{x})$ au point de départ soit équivalente à sa valeur au point d'arrivée, puisque ces deux points coïncident pour un contour fermé. Comme nous l'avons vu en (2.69), la brisure de $U(1)$ en Z_2 impose que les valeurs de ϕ augmentées d'un multiple entier du facteur $\frac{\pi\hbar}{e}$ sont équivalentes. Dès lors, la variation de ϕ le long du contour doit être un multiple de $\frac{\pi\hbar}{e}$, ce qui entraîne la quantification du flux magnétique :

$$\delta\phi = \Phi = \frac{n\pi\hbar}{e} \quad (2.71)$$

où n est un entier. Notons qu'on n'aurait pas pu faire le même raisonnement pour un supraconducteur simplement connexe, comme par exemple un cylindre plein. En effet, dans un tel supraconducteur, le boson de Goldstone ϕ ne joue aucun rôle puisqu'on peut toujours l'éliminer en se plaçant dans la jauge unitaire en choisissant $\alpha(x) = -\phi(x)$. Dans un cylindre creux, $\phi(x)$ devient une application à valeurs multiples alors que la fonction $\alpha(x)$ reste une fonction à valeurs uniques, et donc on ne peut plus trouver une fonction $\alpha(x)$ annulant toutes les valeurs équivalentes de $\phi(x)$ [23].

Le raisonnement exposé ici est fondamentalement différent du raisonnement donné dans la section précédente. En effet, dans la théorie de Ginzburg-Landau, on impose que le paramètre d'ordre reste une application à valeurs uniques même dans un espace à connexions multiples. Il en découle que les valeurs équivalentes de la phase ϕ doivent être des multiples de 2π . Dans le cas de la brisure de symétrie, les valeurs équivalentes de ϕ sont données par des multiples de $\frac{\pi\hbar}{e}$, simplement à cause du fait que la symétrie $U(1)$ est brisée en un sous-groupe Z_2 . La quantification du flux découle donc d'une manière très naturelle de l'hypothèse d'une brisure de symétrie.

2.3 L'effet Meissner

Pendant vingt-deux ans après la découverte de la supraconductivité, jusqu'en 1933, les scientifiques croyaient que les supraconducteurs étaient simplement des conducteurs parfaits,

c.à.d. des métaux présentant une résistance zéro au passage du courant électrique. La découverte de l'effet Meissner en 1933 par W. Meissner et R. Ochsenfeld [20] montra que les supraconducteurs possèdent des propriétés bien plus exotiques qu'une simple conductivité parfaite. En effet, des phénomènes magnétiques surprenants ont lieu si on plonge un supraconducteur dans un champ magnétique externe.

Supposons qu'un matériau supraconducteur soit refroidi en dessous de la température critique, en absence d'un champ magnétique externe. Une fois en dessous de la température critique, on établit le champ magnétique externe, qui cherche à pénétrer dans le matériau. Suivant la loi de Lenz, le matériau s'oppose à ce changement de l'environnement en produisant son propre champ magnétique, créé par des courants induits, qui vient s'opposer au champ magnétique externe. Comme le conducteur est parfait, les deux champs vont s'annuler exactement, et le champ magnétique à l'intérieur du matériau reste donc zéro. On peut retrouver ce résultat aisément en se servant des équations classiques de Maxwell. Tout changement du champ magnétique \mathbf{B} induit un champ électrique \mathbf{E} selon la loi de Maxwell [26] :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.72)$$

D'autre part, le champ électrique \mathbf{E} est donné par : $\mathbf{E} = R\mathbf{J}$, où R est la résistance électrique et \mathbf{J} la densité de courant électrique. Comme la résistance est zéro pour un conducteur parfait, nous avons que le champ électrique est zéro aussi, par conséquent, le champ magnétique \mathbf{B} doit être constant. Avant d'appliquer le champ externe, le champ magnétique à l'intérieur du matériau était nul, et comme il doit être constant, il reste nul aussi après avoir appliqué le champ magnétique externe. On peut interpréter ce phénomène en admettant que le temps de pénétration du champ magnétique externe dans le matériau est infini. Dès lors, le fait que $\mathbf{B} = 0$ à l'intérieur du matériau est parfaitement compréhensible si on refroidit d'abord le matériau et si on applique ensuite seulement le champ externe [26].

Supposons maintenant qu'on effectue l'opération inverse, en appliquant d'abord le champ magnétique avant de refroidir le système. Lorsque le matériau se trouve à une température supérieure à la température critique, la résistance du matériau est non nulle et par conséquent, le champ magnétique externe entre dans le matériau. En dessous de la température critique, la résistance devient zéro, le champ magnétique devient constant, et puisqu'il était différent de zéro au début de l'expérience, il devrait le rester en dessous de T_c . Ainsi, le champ magnétique devrait rester piégé à l'intérieur du matériau. Or, l'expérience de Meissner et Ochsenfeld a montré que le champ magnétique est toujours expulsé en dehors du matériau, indépendamment du chemin suivi. C'est l'effet de Meissner-Ochsenfeld [26].

2.3.1 Méthode de Ginzburg-Landau

Dans l'équation (2.62), nous avons introduit une nouvelle grandeur appelée longueur de pénétration de London. La longueur de pénétration donne le comportement du champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur lorsqu'un champ magnétique externe uniforme est appliqué au matériau. Nous allons en effet voir que le champ magnétique interne décroît de façon exponentielle avec la distance de pénétration x . C'est l'effet Meissner. Une autre grandeur caractéristique de la théorie de Landau-Ginzburg est la longueur de cohérence, qui décrit la variation du paramètre d'ordre en fonction de la distance à l'intérieur du supraconducteur. Son expression est donnée par [26] :

$$\xi^2 = \frac{\hbar^2}{4m|a|} \quad (2.73)$$

On peut montrer [24] que le paramètre d'ordre ψ atteint une valeur asymptotique ψ_∞ indépendante de x à l'intérieur du supraconducteur. En effet, l'évolution du paramètre d'ordre à l'intérieur du matériau est gouvernée par l'équation suivante :

$$\psi = \psi_\infty \tanh \frac{x}{\sqrt{2}\xi} \text{ avec } \psi_\infty = \sqrt{\frac{|a|}{b}} \quad (2.74)$$

Nous avons donc $\psi \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$ et $\psi \rightarrow \psi_\infty$ quand $x \rightarrow \infty$. Le paramètre ξ est donc la longueur sur laquelle le paramètre d'ordre peut varier de façon significative à l'intérieur du supraconducteur. L'évolution du paramètre d'ordre à l'intérieur du matériau est représentée sur la figure 2.2.

Etablissons maintenant le comportement du champ magnétique à l'intérieur du supracon-

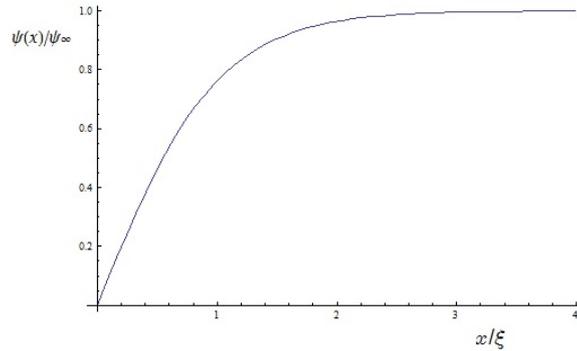


FIGURE 2.2 – Le paramètre d'ordre ψ tend vers une valeur asymptotique à l'intérieur du supraconducteur [24].

ducteur. Supposons que nous ayons un supraconducteur occupant le demi-espace $x > 0$, et appliquons un champ magnétique externe uniforme B_0 dans la direction z . Nous nous plaçons dans la jauge de Coulomb, encore appelée jauge de London-Landau : $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. En tenant compte de la symétrie du système, un potentiel vecteur externe satisfaisant aux équations de Maxwell et aux conditions de bord est donné par un champ rotationnel [24] :

$$\mathbf{A} = A_y(x)\mathbf{e}_y \text{ avec } A_y(x) = xB_0 + A_0 \text{ pour } x < 0 \quad (2.75)$$

où $A_0 = A_y(0)$. Pour évaluer les équations (2.58) nous allons choisir un contour rectangulaire, fermé en $x = x_0$ et $x_1 \rightarrow \infty$ comme indiqué sur la figure 2.3. La longueur L est arbitraire.

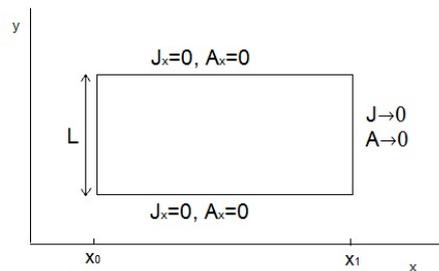


FIGURE 2.3 – Intégration curviligne à l'intérieur du supraconducteur [24].

Comme \mathbf{A} est dirigé selon la direction y , les chemins horizontaux ne contribuent pas à l'intégrale curviligne sur le contour rectangulaire. Il en va de même pour le courant \mathbf{J} . En effet,

les conditions de bord assurent qu'aucun courant ne traverse la surface du supraconducteur, donc nous avons $J_x = 0$. Si on fait tendre x_1 vers l'infini, les contributions verticales du chemin en x_1 aux intégrales curvilignes sont zéros aussi, car le potentiel vecteur et le courant sont nuls loin à l'intérieur du supraconducteur. Dès lors, seulement le chemin vertical en x_0 donne une contribution non nulle aux intégrales curvilignes. En évaluant ces dernières, l'équation (2.58) prend la forme [24] :

$$L \left(\frac{cm^* J_y(x_0)}{e^{*2} |\psi(x_0)|^2} + A_y(x_0) \right) = n\phi_0 \quad (2.76)$$

La longueur L est arbitraire et peut prendre des valeurs continues. Par contre, n ne peut prendre que des valeurs discrets. Comme l'équation doit être vérifiée pour toute valeur de L , il faut que $n = 0$. En outre, l'équation (2.76) doit être satisfaite pour tout choix de x_0 , nous pouvons donc la réécrire sous la forme suivante [24] :

$$J_y(x) = -\frac{e^{*2} |\psi(x)|^2}{cm^*} A_y(x) \quad (2.77)$$

En tenant compte du fait que $\mathbf{J} = c/(4\pi)\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$, cette dernière équation devient :

$$\frac{d^2}{dx^2} A_y(x) = \frac{e^{*2} |\psi(x)|^2}{cm^*} A_y(x) \quad (2.78)$$

Nous allons résoudre cette équation d'abord pour le cas profondément à l'intérieur du supraconducteur, c.à.d. pour $x \gg \xi$. Ainsi, le paramètre d'ordre atteint sa valeur limite, indépendante de la position x . Nous pouvons réécrire l'équation sous la forme suivante [24] :

$$\frac{d^2}{dx^2} A_y(x) = \frac{A_y(x)}{\lambda^2} \text{ avec } \lambda^2 = \frac{cm^*}{e^{*2} |\psi_\infty|^2} \quad (2.79)$$

La solution de cette équation est une simple exponentielle donnée par :

$$A_y(x) = A_0 \exp(-x/\lambda) \quad x > 0 \quad (2.80)$$

Plus près du bord du supraconducteur, en $0 < x \ll \xi$, la valeur du paramètre d'ordre ψ est plus petite que sa valeur asymptotique ψ_∞ . On peut le voir en développant la fonction tangente hyperbolique (2.74) en série de Taylor [24] :

$$\psi(x) \approx \psi_\infty \frac{x}{\sqrt{2}\xi} \quad 0 < x \ll \xi \quad (2.81)$$

La longueur de pénétration du champ \mathbf{A} est donc supérieure à la longueur de pénétration de London λ . Dès lors, la décroissance exponentielle du champ \mathbf{A} est plus lente près du bord du supraconducteur, sur une distance donnée par ξ . Pour trouver l'évolution du champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur, il suffit de prendre le rotationnel de \mathbf{A} , ce qui nous donne :

$$B_z(x) = B_0 \quad x < 0 \quad (2.82)$$

$$B_z(x) = \frac{-A_0}{\lambda} \exp(-x/\lambda) = B_0 \exp(-x/\lambda) \quad \xi < x < \infty \quad (2.83)$$

A l'intérieur du supraconducteur, le champ magnétique décroît donc bien de façon exponentielle, ce qui correspond à l'effet Meissner. L'évolution du potentiel vecteur et du champ magnétique est représentée sur la figure 2.4.

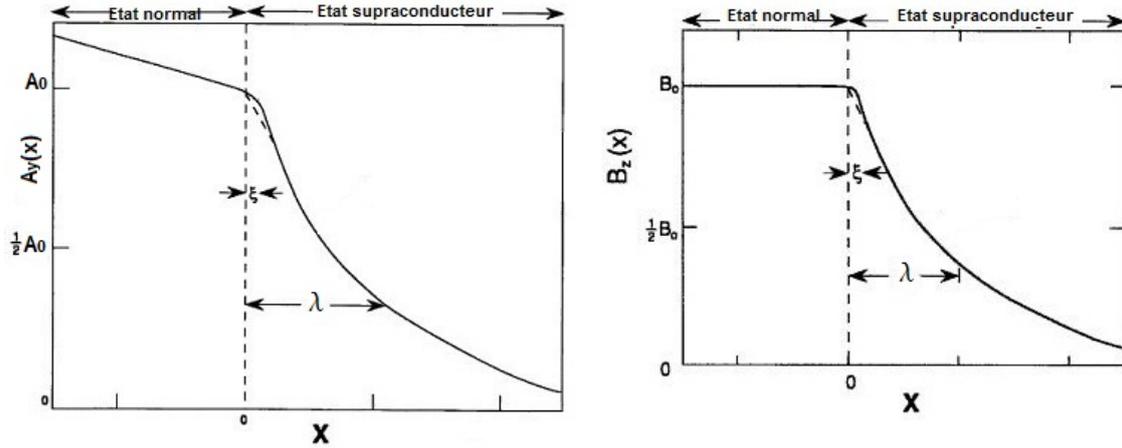


FIGURE 2.4 – La figure de gauche représente l'évolution du potentiel vecteur avec x à l'intérieur du supraconducteur. La figure de droite reprend l'évolution du champ magnétique. Cette figure a été extraite et adaptée à partir de la référence [24].

2.3.2 Méthode de la brisure dynamique de symétrie

Nous avons montré que le lagrangien que nous avons présenté dans la section (1.1) est bien adapté pour décrire le système formé d'un supraconducteur couplé à un champ électromagnétique. Dès lors, tous les résultats que nous avons obtenus dans la section (1.1) restent valable pour la description des supraconducteurs. L'obtention de l'effet Meissner est alors immédiate. En effet, nous avons vu dans la section (1.1) que le boson de Goldstone apparaissant suite à la brisure de symétrie s'unit au photon du champ électromagnétique pour former une particule massive appelé photon massif. Pour rappel, son expression est de la forme (1.28) : $\tilde{A}_\mu = A_\mu - \partial_\mu \xi$, où A_μ est le photon non massif et ξ est le boson de Goldstone. Dès lors, le champ électromagnétique obéit maintenant à l'équation de Proca, qui décrit le comportement d'un champ vectoriel massif de spin 1 et de masse m . La première équation de Ginzburg-Landau peut être obtenue à partir du lagrangien (1.1) en calculant les équations de mouvement pour le champ ϕ ou ϕ^\dagger . La deuxième équation de Ginzburg-Landau, qui mène à l'équation de Proca, peut être obtenue à partir de l'équation de mouvement pour le champ A_μ . Pour rappel, le lagrangien (1.1) de la symétrie électromagnétique est donné par :

$$L = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi^\dagger \phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.84)$$

$$\Leftrightarrow L = (\partial_\mu - ieQA_\mu) \phi^\dagger (\partial^\mu + ieQA^\mu) \phi - V(\phi^\dagger \phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.85)$$

$$\Leftrightarrow L = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + ieQA^\mu \phi \partial_\mu \phi^\dagger - ieQA_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + (eQ)^2 A_\mu A^\mu |\phi|^2 - V(\phi^\dagger \phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.86)$$

La jauge unitaire est donnée par :

$$\phi(x) = \frac{H(x) + v}{\sqrt{2}} \text{ et } \tilde{A}_\mu = A_\mu + \frac{1}{eQv} \partial_\mu \xi \quad (2.87)$$

Dans cette jauge, le lagrangien prend la forme suivante :

$$\frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H + \frac{1}{2} (eQ)^2 \tilde{A}_\mu \tilde{A}^\mu (H + v)^2 - V(H) - \frac{1}{4} \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \quad (2.88)$$

Etablissons maintenant les équations de mouvement pour le champ massif \tilde{A}_μ . Nous avons :

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \tilde{A}_\nu)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \tilde{A}_\nu} = 0 \quad (2.89)$$

$$\Leftrightarrow -\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = (eQ)^2 \tilde{A}^\nu (H + v)^2 \quad (2.90)$$

Dans le cadre de la brisure spontanée de symétrie, v correspond à la valeur moyenne du champ de Cooper dans l'état fondamental et H représente une petite perturbation. Si nous négligeons H devant v et si nous posons $m = eQv$, alors l'équation de mouvement devient :

$$-\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = m^2 \tilde{A}^\nu \quad (2.91)$$

Cette équation est appelée équation de Proca. Elle décrit l'évolution d'un champ vectoriel massif libre de spin égal à un. L'équation de Proca peut être résolue en utilisant la contrainte suivante : $\partial_\mu \tilde{A}^\mu = 0$. L'équation se simplifie alors à l'expression suivante :

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \tilde{A}^\nu = 0 \quad (2.92)$$

Comme en plus nous considérons des champs indépendants du temps, l'équation de Proca devient :

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \tilde{A}^\nu = 0 \quad (2.93)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \tilde{A}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2.94)$$

$$\Leftrightarrow (-\nabla^2 + m^2) \tilde{A}(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.95)$$

Cette équation possède la même forme que l'équation de Poisson écrantée que nous avons déjà rencontrée dans la section (2.2), sauf que le membre de droite est zéro, ce qui simplifie la résolution de l'équation. En effet, la solution est bien sûr une simple décroissance exponentielle du champ électromagnétique massif :

$$\tilde{A}(\mathbf{x}) = \tilde{A}_0 e^{-m|\mathbf{x}|} \quad (2.96)$$

Nous avons donc bien retrouvé la décroissance typique de l'effet Meissner. Nous pouvons identifier la masse du photon massif à l'inverse de la longueur de pénétration de London : $m = 1/\lambda$. En effet, la longueur de pénétration de London peut être interprétée comme la longueur d'onde du photon massif.

Dans le raisonnement précédent, on pourrait avoir l'impression que la jauge a été fixée deux fois : d'abord la jauge unitaire a été choisie et ensuite la jauge de Lorentz a été ajoutée. Or, tel n'est pas le cas. En effet, la condition de Lorentz est une conséquence directe de la jauge unitaire. La condition de Lorentz correspond en fait à l'équation de mouvement pour le boson de Goldstone. En effet, les équations de mouvement pour le boson de Goldstone ξ peuvent être obtenues directement à partir du lagrangien (2.88) :

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \xi)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi} = 0 \quad (2.97)$$

$$\Leftrightarrow \partial^\mu \left(A_\mu + \frac{1}{eQv} \partial_\mu \xi \right) (H + v)^2 = \partial^\mu \tilde{A}_\mu (H + v)^2 = 0 \quad (2.98)$$

En général, lorsqu'on néglige la perturbation H , on suppose qu'on peut négliger sa dérivée aussi. Ainsi, nous avons négligé $\partial^\nu H$ pour obtenir la dernière égalité. Ajoutons encore une

remarque concernant la validité de l'équation de Proca pour décrire la supraconductivité. L'équation de Proca que nous avons trouvée décrit le comportement d'un champ vectoriel massif libre, puisqu'aucune source n'y apparaît. Or, à priori, le champ pris en considération ici n'est pas libre, mais couplé à un supraconducteur. Néanmoins, l'équation de Proca reste valable. Pour le comprendre, nous allons décrire ce qui se passe quand le champ magnétique cherche à entrer dans le matériau supraconducteur. Dans un matériau non-supraconducteur, les électrons sont décrits par des fonctions d'ondes qui se différencient les unes des autres par leur phase. Les phases des électrons sont distribuées de manière aléatoire. Dans un supraconducteur, les paires de Cooper se placent toutes dans un même état, l'état fondamental, et sont par conséquent décrites par une seule fonction d'onde avec une seule phase. La phase du supraconducteur est donc fixée et donne une direction privilégiée à l'espace d'Hilbert. Par contre, le champ électromagnétique libre et sans masse peut être exprimé dans différentes jauges faisant intervenir différentes phases. Néanmoins, quand il cherche à entrer dans le matériau supraconducteur, il doit y avoir une adaptation entre la phase du champ électromagnétique et la phase du supraconducteur. Le supraconducteur résiste à tout changement apporté par le champ magnétique extérieur en produisant un courant proportionnel au gradient de la phase. Ce courant est donné par la deuxième équation de Ginzburg-Landau [30]. Le champ électromagnétique finit par être forcé dans une jauge particulière imposée par le supraconducteur : $\tilde{A}_\mu = A_\mu - \partial_\mu \xi$. On parle alors de la brisure de la symétrie de jauge. Le champ massif \tilde{A}_μ contient donc de façon implicite l'information sur la phase du supraconducteur. L'interaction ou l'échange d'information entre le champ électromagnétique et le supraconducteur est donc inscrite dans le champ massif, qu'on peut par conséquent interpréter comme étant découplé du supraconducteur [35]. Ainsi, le champ massif se comporte donc bien comme un champ libre et obéit dès lors à l'équation de Proca.

2.4 Conductivité infinie

En 1911, Kamerlingh Onnes [17, 18, 19] observa qu'en dessous d'une température critique dépendant du matériau, certains métaux présentent une résistance nulle au passage du courant électrique. D'où la désignation de ces métaux par le nom de « supraconducteurs ». Les supraconducteurs ont effectivement des résistivités très faibles, de l'ordre de $10^{-24}\Omega\text{cm}$, alors que des métaux normaux, comme par exemple le cuivre, ont des résistivités de l'ordre de $10^{-9}\Omega\text{cm}$ à 4.2K [26]. Si la résistance est faible, alors son inverse, la conductivité, est élevée. En effet, on a pu générer des courants circulant dans des anneaux supraconducteurs pendant une année sans qu'aucune décroissance détectable ne se soit manifestée. En utilisant des techniques de résonance nucléaire, on a pu mesurer de légers changements qui montrent que le temps caractéristique de désintégration du courant est d'au moins 10^5 ans. Sous certaines conditions, on peut même montrer que la génération de courants qui ne changent pas pendant 10^{10} ans est possible [28].

2.4.1 Modèle de la théorie BCS

Dans cette section, nous allons montrer que la conductivité électrique infinie des supraconducteurs découle de l'existence du gap en énergie Δ séparant l'état fondamental du premier état excité. Supposons d'abord que nous disposions d'un métal normal non supraconducteur à une température nulle. Dans l'espace réciproque, tous les états à l'intérieur de la sphère de Fermi sont occupés, tandis que les états à l'extérieur sont libres. Si on applique

maintenant un champ électrique externe selon l'axe x par exemple, les électrons sont accélérés dans cette direction et il y a apparition d'un courant électrique parcourant le métal. Dans l'espace réciproque, l'accélération des électrons se traduit par un déplacement de la sphère de Fermi, à vitesse constante, le long de l'axe k_x . Cependant, dans l'espace direct, les électrons ne sont pas accélérés infiniment, ils finissent par diffuser sur des impuretés ou des défauts cristallins. Dans l'espace réciproque, la sphère de Fermi atteint alors une position d'équilibre où elle reste stationnaire en moyenne. Dès lors, l'apparition d'un courant dans l'espace direct provoque dans l'espace réciproque simplement un déplacement par rapport à l'origine de la sphère de Fermi [26].

Considérons maintenant un matériau supraconducteur, toujours à une température nulle. Les paires de Cooper⁴ sont constituées de deux fermions, ils forment par conséquent des bosons. Contrairement aux fermions, les bosons peuvent se placer dans un même état et former un condensat, caractérisé par un vecteur d'onde \mathbf{K} . Si tous les paires de Cooper ont la même impulsion \mathbf{K} , un courant va apparaître, par exemple dans la direction de l'axe x . Cette situation est défavorable d'un point de vue énergétique, mais elle peut quand même se réaliser sous la forme d'un état metastable, qui peut avoir un temps de vie très long, supérieur même à l'âge de l'Univers. Dans l'espace réciproque, cette situation se traduit par un déplacement de la sphère de Fermi floue d'une distance de $K/2$ le long de l'axe k_x . Considérons une paire de Cooper (1, 2), constituée de deux électrons avec des vecteurs d'onde de signes opposés, comme indiqué sur la figure 2.5. L'électron 1 avec l'impulsion $(k_F + K/2, 0, 0)$ possède une

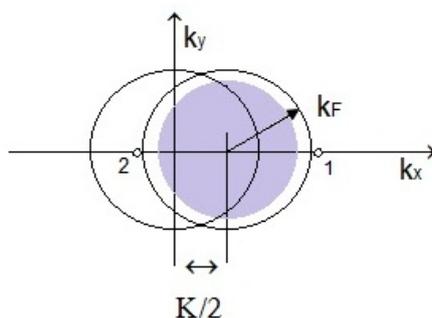


FIGURE 2.5 – La figure montre l'occupation des états électroniques dans l'espace réciproque d'un supraconducteur parcouru par un courant. Sous l'effet du courant, la sphère de Fermi floue est déplacé d'une longueur $K/2$ sur l'axe k_x [26].

énergie relativement élevée égale à $(\hbar^2/2m)(k_F + K/2)^2$. Cet électron pourrait réduire son énergie de façon considérable s'il bénéficiait d'une transition lui permettant d'aller occuper un état libre près de l'électron 2. La réduction en énergie pour l'électron 1 serait donnée par la valeur suivante [26] :

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left(k_F + \frac{K}{2} \right)^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \left(k_F - \frac{K}{2} \right)^2 = \frac{\hbar^2}{m} k_F K \quad (2.99)$$

Or, une telle transition correspond à une brisure de la paire de Cooper, qui est accompagnée par une augmentation de l'énergie du système d'une quantité 2Δ , où Δ est le gap en énergie. Par conséquent, pour des courants faibles, donc des valeurs de K faibles, la réduction en

4. Les paires de Cooper se forment par échange de phonons. Or, à température nulle, il n'y a pas de phonons en principe. Néanmoins, grâce à la relation d'incertitude de Heisenberg, un phonon peut exister pendant un intervalle de temps très court.

énergie $\frac{\hbar^2}{m}k_F K$ ne compense pas l'augmentation en énergie 2Δ , et les paires de Cooper ne sont donc pas brisées. Dès lors, la diffusion d'une paire de Cooper par une impureté ou un défaut n'est pas possible, puisque cela impliquerait la brisure de la paire. Il n'y aura donc pas de dissipation d'énergie par diffusion sur les impuretés, et le courant va donc continuer à circuler aussi longtemps qu'il restera sous une certaine valeur critique. S'il dépasse la valeur critique, il devient énergétiquement favorable de briser les paires de Cooper, et le courant dû aux paires va disparaître [26].

2.4.2 Méthode de la brisure dynamique de symétrie

Pour étudier la conductivité, nous allons considérer des champs dépendant du temps, c.à.d. $\dot{\phi} \neq 0$. En effet, la situation statique ne permet pas d'expliquer une conductivité infinie, contrairement à ce que nous avons vu pour l'effet Meissner. Plaçons-nous encore une fois dans la jauge unitaire :

$$\phi \rightarrow \tilde{\phi} = \frac{H+v}{\sqrt{2}} \text{ et } A_\mu \rightarrow \tilde{A}_\mu = A_\mu + \frac{1}{eQv} \partial_\mu \xi \quad (2.100)$$

où $\tilde{\phi}$ est réel $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}^\dagger$ et ξ est le boson de Goldstone. Le lagrangien (1.1) devient alors :

$$\partial_\mu \tilde{\phi} \partial^\mu \tilde{\phi} + (eQ)^2 \left(A_\mu + \frac{1}{eQv} \partial_\mu \xi \right) \left(A^\mu + \frac{1}{eQv} \partial^\mu \xi \right) \tilde{\phi}^2 - V(\tilde{\phi}^2) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.101)$$

L'équation (2.30) nous dit que le courant J^μ est donné par la variation du lagrangien par rapport à A_μ . Or, nous voyons dans l'expression ci-dessus que dériver par rapport à A_μ revient à dériver par rapport à $\partial_\mu \xi$, à un facteur eQv près. Nous avons donc :

$$J^\mu = \frac{\delta L}{\delta A_\mu} = eQv \frac{\delta L}{\delta(\partial_\mu \xi)} = 2(eQ)^2 \left(A_\mu + \frac{1}{eQv} \partial_\mu \xi \right) \tilde{\phi}^2 \quad (2.102)$$

En ne prenant que la composante temporelle, nous obtenons :

$$\epsilon(x) = \frac{\delta L}{\delta A_0} = eQv \frac{\delta L}{\delta \dot{\xi}(x)} \quad (2.103)$$

où ϵ est la densité de charge électrique. La densité de charge électrique ϵ et le mode de Goldstone ξ sont donc des variables canoniques conjuguées. Dans le formalisme hamiltonien, le hamiltonien, donné par une transformation de Legendre du lagrangien selon $H = \epsilon \dot{\xi} - L$, dépend dès lors de ξ et de ϵ plutôt que de ξ et de $\dot{\xi}$. La première équation d'Hamilton s'écrit alors [23] :

$$\dot{\xi}(x) = \frac{\delta H}{\delta(\epsilon(x))} \quad (2.104)$$

La tension est donnée par la variation en énergie provoquée par une variation de la charge :

$$V(x) \equiv \frac{\delta H}{\delta \epsilon(x)} \quad (2.105)$$

En identifiant les relations (2.104) et (2.105), nous trouvons la dépendance en temps du boson de Goldstone :

$$\dot{\xi}(x) = V(x) \quad (2.106)$$

Rappelons maintenant que le courant électrique est relié au boson de Goldstone via la relation (2.102) :

$$\mathbf{J} = \frac{\delta L}{\delta \mathbf{A}(x)} = eQv \frac{\delta L}{\delta \nabla \xi(x)} \quad (2.107)$$

Ainsi, si le courant électrique dans un fil supraconducteur est indépendant du temps, le mode de Goldstone est indépendant du temps aussi, puisque son gradient l'est. Dans ce cas, la formule (2.106) nous dit que la tension entre les bornes du fil supraconducteur est zéro. Nous avons donc un fil parcouru par un courant constant dans le temps avec une tension zéro aux bornes, ce qui correspond exactement à une conductivité infinie [23]. Notons que le raisonnement n'est valide que s'il y a une brisure de symétrie, c.à.d. si $v \neq 0$.

2.5 Conclusion

Nous pouvons conclure en disant que la situation en physique des supraconducteurs est similaire à celle en physique des particules. En effet, la théorie de Ginzburg-Landau décrit très bien la supraconductivité, en utilisant l'idée de l'énergie de Gibbs qui change de forme d'un paraboloïde vers un chapeau mexicain autour de la température critique. Malheureusement, elle reste à un niveau purement phénoménologique et n'offre aucune explication ou mécanisme qui pourrait expliquer le changement de la courbe de potentiel. En effet, la théorie postule que le paramètre a change de signe autour de la transition, mais ne donne aucune cause physique qui pourrait provoquer ce renversement de signe. En outre, les effets supraconducteurs sont ajoutés à la main au potentiel de l'état normal, sous forme d'un développement de Taylor. Là encore, aucune cause physique produisant ces effets supraconducteurs n'est proposée. La situation est parfaitement analogue en physique des particules avec le mécanisme de Brout-Englert-Higgs du modèle standard. Là aussi on introduit à la main une nouvelle particule qui a le bon goût de posséder un lagrangien permettant de produire une brisure de symétrie justement aux bonnes échelles d'énergie. En effet, à haute énergie, l'interaction électromagnétique s'unit à l'interaction faible pour former l'interaction électrofaible. Ainsi, au commencement de l'Univers, lorsque la température de l'Univers était supérieure à une certaine température critique, la symétrie $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ n'était pas brisée, le potentiel du boson de Higgs était alors en forme de paraboloïde et le paramètre μ^2 était donc positif. Lors de son expansion, l'Univers a refroidit, et en atteignant des températures en dessous de cette température critique, la symétrie s'est brisée en laissant μ^2 prendre des valeurs négatives. La théorie de Higgs donne l'évolution de μ^2 en fonction de la température, mais elle ne prédit pas la température critique et par conséquent, la valeur de μ^2 reste arbitraire. Comme pour la théorie de Ginzburg-Landau, les valeurs des paramètres doivent être introduites à la main de sorte à reproduire les données expérimentales.

En théorie de la supraconductivité, la théorie de BCS a finalement permis d'expliquer les origines physiques du phénomène, bien qu'elle ne soit plus valable pour des supraconducteurs à haute température. Le formalisme qu'ont utilisé Bardeen, Cooper et Schrieffer pour présenter leur théorie ne permet pas de voir qu'il s'agit d'une brisure dynamique de symétrie. Ce n'est que dans le formalisme de Weinberg que ceci devient apparent. En effet, il a utilisé à la fois un modèle de Ginzburg-Landau très généralisé pour décrire la brisure de symétrie, et le condensat de Cooper pour fournir la cause physique provoquant l'apparition de la supraconductivité. La particule qui brise la symétrie est donc une particule composite, ce qui est un avantage par rapport aux théories qui essaient d'expliquer les brisures de symétrie avec une particule élémentaire. L'idée est de dire que les valeurs que prennent les divers paramètres sont liées à l'interaction entre les particules formant la particule composite. Ainsi, les valeurs

des paramètres ne sont plus introduites à la main, mais on peut les retrouver à partir de la dynamique entre les composantes de la particule composite. Malheureusement, établir une telle théorie est tout sauf simple, et il n'en existe pas encore en supraconductivité à haute température à l'heure actuelle. Encore une fois, la physique des particules cherche à s'inspirer des résultats obtenus en physique de l'état solide. En effet, l'idée d'un condensat formé par des paires d'électrons a donné lieu à des tentatives de remplacer la particule élémentaire de Higgs par des particules composites. Un exemple d'une telle tentative est la Technicouleur dont nous allons discuter dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

La Technicouleur

Dans le premier chapitre, nous avons montré qu'une théorie basée sur une brisure spontanée de symétrie provoquée par une particule élémentaire est peu satisfaisante. En effet, de façon générale, une telle théorie possède un nombre trop élevé de paramètres libres et un caractère peu prédictif. Dans le cas du mécanisme de Higgs, il y a d'autres problèmes plus techniques qui surgissent, comme par exemple le problème de la hiérarchie et le fait que la théorie est peu naturelle. Néanmoins, dans ce travail, nous n'allons pas aborder ces sujets. En général, comme nous l'avons vu au deuxième chapitre, la théorie devient beaucoup plus prédictive lorsqu'on remplace la particule élémentaire par une particule composite. Cette approche est justement le but de la théorie de la Technicouleur. Dans cette théorie, au lieu d'introduire une nouvelle particule élémentaire, on introduit une nouvelle interaction, appelée Technicouleur. Cette interaction est similaire à l'interaction forte, dans ce sens qu'elle est asymptotiquement libre. En effet, d'une façon générale, les constantes de couplage des quatre interactions connues évoluent avec l'échelle d'énergie. Pour l'interaction forte, décrite par la théorie de la chromodynamique quantique, il se fait que la constante de couplage est importante aux petites énergies et elle devient faible à haute énergie. Vu le principe d'incertitude de Heisenberg, qui lie la distance à l'énergie, ce fait signifie aussi que la constante de couplage est faible à courte distance, et importante à grande distance. Lorsque les quarks sont proches l'un de l'autre, ils n'interagissent donc pas, on dit qu'ils sont asymptotiquement libres. Par contre, quand ils sont loin l'un de l'autre, ils interagissent fortement. La Technicouleur est sensée se comporter de façon similaire. Ainsi, aux hautes énergies, cette interaction est très faible. Lorsqu'on descend l'échelle d'énergie, la constante de couplage devient importante quand on arrive à une énergie de $v = 246$ GeV, énergie à laquelle se produit la brisure de la symétrie électrofaible. En effet, lorsque la constante de couplage devient élevée, il y a formation d'un condensat de fermions, qui brise la symétrie électrofaible. Ainsi, le paramètre μ^2 de la théorie de Higgs a maintenant une signification physique, dans le sens que sa valeur est liée à la constante de couplage de la Technicouleur. Ce n'est donc plus un paramètre libre.

Remarquons encore que la Technicouleur permet de résoudre d'autres problèmes du modèle standard, pas forcément lié au mécanisme de Higgs. La Technicouleur pourrait par exemple constituer la première théorie de la physique des saveurs. Traditionnellement, on désigne par le mot saveur les nombres quantiques suivantes : l'isospin (le up et le down), l'étrangeté, le charme, le top et le bottom¹. La saveur permet de classer les leptons et les quarks en trois générations ou familles. Leur existence constitue un mystère qui n'est pas abordé par le modèle standard. En effet, il n'y a apparemment aucune raison physique pour l'existence de

1. Top et bottom sont parfois aussi appelés truth et beauty

trois générations. Le modèle standard fonctionne tout aussi bien avec une seule génération seulement au lieu de trois. Les deux générations supplémentaires doivent être ajoutées à la main afin de tenir compte des données expérimentales, mais elles ne sont pas prédites par le modèle standard. La Technicoleur par contre est une théorie qui permettrait d'expliquer l'existence de trois générations.

3.1 Brisure de la symétrie chirale

Comme déjà mentionné, la théorie de la Technicoleur est modélisée sur la théorie des interactions fortes. Ceci est lié au fait qu'on peut imaginer un scénario dans lequel l'interaction forte elle-même brise l'interaction électrofaible. Le seul défaut de ce scénario est qu'il ne reproduit pas les bonnes valeurs pour les masses des quarks, d'où la nécessité d'introduire la Technicoleur. Le scénario en question est basé sur la brisure de la symétrie chirale des interactions fortes. Dans ce travail, nous allons utiliser ce scénario pour introduire la Technicoleur. Néanmoins, comme nous supposons que le lecteur n'est pas nécessairement familier avec la brisure de la symétrie chirale de l'interaction forte, nous allons d'abord introduire cette dernière en utilisant le modèle le plus simple, à savoir le modèle sigma linéaire.

3.1.1 Le modèle sigma-linéaire

La brisure de la symétrie chirale fait déjà partie intégrante d'un mémoire présenté à l'université de Liège [36]. Par conséquent, la brisure de la symétrie chirale ne sera pas traitée en détail dans ce travail. Néanmoins, comme la théorie de la Technicoleur est proche de la théorie chirale des interactions fortes, il est indispensable de donner un bref résumé de celle-ci. Notons quand même que la symétrie chirale est une symétrie globale, alors que la Technicoleur est une symétrie locale, puisqu'elle est sensée décrire les interactions entre les particules.

Dans cette section, nous allons présenter le modèle sigma-linéaire, qui fut introduit par Gell-Mann et Levy en 1960 [37]. A cette époque, les interactions fortes et donc les quarks n'étaient pas encore connus. En effet, initialement, ce modèle fut appliqué aux protons et aux neutrons et non pas aux quarks. Nous allons nous limiter à une génération de quarks, par exemple au quark up u et au quark down d . En toute généralité, on appelle une symétrie chirale toute symétrie $G(N)_L \otimes G(N)_R$ qui transforme les composantes levogyre et dextrogyre d'un spineur de Dirac de façon indépendante l'une de l'autre. Dans le modèle pris en considération ici, le groupe $G(N)$ correspond au groupe de l'isospin $SU(2)$, et les quarks up et down sont placés dans un isodoublet $\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$. La symétrie $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ peut être reliée à une autre symétrie, à savoir la symétrie constituée des transformations vectorielle et axiale : $SU(2)_V \otimes SU(2)_A$. Les générateurs des groupes $SU(2)_V$ et $SU(2)_A$ correspondent à des combinaisons des générateurs des groupes $SU(2)_L$ et $SU(2)_R$. Les lois de transformations vectorielles et axiales sont données par [38] :

$$SU(2)_V : \psi \rightarrow e^{-i\mathbf{T}\cdot\theta}\psi \text{ et } \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{i\mathbf{T}\cdot\theta} \quad (3.1)$$

où \mathbf{T} est le vecteur constitué des trois matrices de Pauli multiplié par un demi, et θ correspond au vecteur formé par trois angles de rotation. Le paramètre θ est indépendant de l'espace-temps, la transformation vectorielle correspond donc à une simple rotation globale dans l'espace des isospins. La transformation axiale est donnée par [38] :

$$SU(2)_A : \psi \rightarrow e^{-i\gamma_5\mathbf{T}\cdot\theta}\psi \text{ et } \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{-i\gamma_5\mathbf{T}\cdot\theta} \quad (3.2)$$

où γ_5 est le produit des quatre matrices de Dirac : $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$. Notons que sous la transformation axiale, les particules se transforment de la même façon que les antiparticules, ce qui est lié au fait que les matrices γ_5 et γ_0 anticommulent : $\gamma_5\gamma_0 = -\gamma_0\gamma_5$. Introduisons maintenant un isotriplet de champs pseudoscalaires $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ ainsi qu'un champ scalaire σ , qui ont les mêmes nombres quantiques que la combinaison de champs suivante [38] :

$$\pi \sim 2i\bar{\psi}\mathbf{T}\gamma_5\psi \text{ et } \sigma \sim \bar{\psi}\psi \quad (3.3)$$

où \sim signifie : « se transforme comme ». Les quarks forment un état lié par un échange de gluons, qui sont les bosons médiateurs de l'interaction forte. Établissons maintenant les lois de transformation infinitésimales de l'isotriplet. Pour la transformation vectorielle, on obtient :

$$2i\bar{\psi}T_i\gamma_5\psi \rightarrow 2i\bar{\psi}(1 + iT_j\theta_j)T_i\gamma_5(1 - iT_l\theta_l)\psi \quad (3.4)$$

$$= 2i\bar{\psi}T_i\gamma_5\psi + \theta_j(2\bar{\psi}T_i\gamma_5T_j\psi - 2\bar{\psi}T_jT_i\gamma_5\psi) + O(\theta^2) \quad (3.5)$$

$$= 2i\bar{\psi}T_i\gamma_5\psi + i\theta_j\epsilon_{ijk}\bar{\psi}\gamma_5T_k\psi + O(\theta^2) \quad (3.6)$$

Pour obtenir la deuxième ligne, nous avons pu renommer les indices l en indices j puisque nous négligeons le terme croisé en θ^2 . Pour obtenir la dernière égalité, nous avons utilisé la relation de commutation entre les matrices T_i : $[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk}T_k$. Le champ scalaire est manifestement invariant sous la transformation vectorielle. D'une façon similaire, on peut établir la loi de transformation axiale infinitésimale de l'isotriplet :

$$2i\bar{\psi}T_i\gamma_5\psi \rightarrow 2i\bar{\psi}(1 - i\gamma_5T_j\theta_j)T_i\gamma_5(1 - i\gamma_5T_l\theta_l)\psi \quad (3.7)$$

$$= 2i\bar{\psi}T_i\gamma_5\psi + \theta_j(2\bar{\psi}T_i\gamma_5\gamma_5T_j\psi + 2\bar{\psi}\gamma_5T_jT_i\gamma_5\psi) + O(\theta^2) \quad (3.8)$$

$$= 2i\bar{\psi}T_i\gamma_5\psi + \theta_i\bar{\psi}\psi + O(\theta^2) \quad (3.9)$$

Pour obtenir la dernière ligne, nous avons cette fois utilisé les relations d'anticommutation des matrices T_i : $\{T_i, T_j\} = 2\delta_{ij}$ ainsi que la relation $\gamma_5\gamma_5 = 1$. Finalement, la loi de transformation axiale infinitésimale pour le champ scalaire s'obtient comme suit :

$$\bar{\psi}\psi \rightarrow \bar{\psi}(1 - i\gamma_5T_j\theta_j)(1 - i\gamma_5T_l\theta_l)\psi \quad (3.10)$$

$$= \bar{\psi}\psi - 2i\theta_i\bar{\psi}T_i\gamma_5\psi + O(\theta^2) \quad (3.11)$$

Finalement, les lois de transformation de l'isotriplet et du champ scalaire sous la transformation vectorielle et la transformation axiale peuvent être écrites sous la forme suivante[38] :

$$SU(2)_V : \quad \pi \rightarrow \pi + \theta \times \pi \quad (3.12)$$

$$\sigma \rightarrow \sigma \quad (3.13)$$

$$SU(2)_A : \quad \pi \rightarrow \pi + \theta\sigma \quad (3.14)$$

$$\sigma \rightarrow \sigma - \theta \cdot \pi \quad (3.15)$$

La transformation axiale provoque donc un mélange entre les particules π_i et σ . Le lagrangien du modèle sigma linéaire est donné par [36] :

$$L = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - g_\pi(2\bar{\psi}\gamma_5\mathbf{T}\psi\pi + \bar{\psi}\psi\sigma) - V(\pi^2 + \sigma^2) + \frac{1}{2}\partial_\mu\pi\partial^\mu\pi + \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma \quad (3.16)$$

où $\not{\partial} \equiv \gamma^\mu\partial_\mu$ et le potentiel est donné par :

$$V(\sigma^2 + \pi^2) = \frac{1}{2}\mu^2(\sigma^2 + \pi^2) + \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \pi^2)^2 \quad (3.17)$$

Notons qu'il n'y a pas de terme de masse pour les quarks, qui serait donné par un terme en $m\bar{\psi}\psi$. En effet, un tel terme est invariant sous des transformations vectorielles mais non pas sous des transformations axiales, et briserait la symétrie chirale de façon explicite. Nous partons donc d'un modèle dans lequel les quarks n'ont pas de masse et ils ne deviendront massifs qu'après une brisure spontanée de symétrie. Le lagrangien (3.16) est invariant sous les transformations axiales et vectorielles, alors que l'état fondamental du système ne l'est pas si $\mu^2 < 0$. En effet, comme au premier chapitre, si $\mu^2 > 0$, le potentiel tracé en fonction de σ et de π aura la forme d'une parabole en révolution, et le minimum est donc donné par $\sigma_0^2 + \pi_0^2 = 0$ c.à.d. $\sigma_0 = 0$ et $\pi_0 = 0$, qui est manifestement invariant sous les transformations vectorielles et axiales. La particule σ est une particule scalaire réelle et joue donc le même rôle que ϕ_1 dans la première section du premier chapitre. De même, l'isotriplet π joue le rôle de la phase ou de la composante imaginaire ϕ_2 .

Si $\mu^2 < 0$, le potentiel prend la forme d'un chapeau mexicain et nous obtenons un cercle de minima : $\sigma^2 + \pi^2 = v^2$. La configuration du vide est encore une fois donnée par [36] :

$$\sigma_0 = \langle 0|\sigma|0\rangle = f_\pi \equiv \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} \text{ et } \pi_0 = \langle 0|\pi|0\rangle = 0 \quad (3.18)$$

Notons quand même que, contrairement à ce que nous avons vu au premier chapitre, le choix du vide selon l'axe réel est imposé par le fait que l'isotriplet ne peut pas développer des valeurs moyennes dans le vide non nulles, et ne correspond donc pas à un choix libre. En effet, nous avons déjà mentionné que l'isotriplet contient des particules pseudoscalaires, c.à.d. des particules dont la fonction d'onde change de signe lors de l'application d'une transformation de parité $P : \mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$. On dit qu'ils ont une parité intrinsèque négative. Or, le vide est invariant sous l'application d'une transformation de parité, il a donc une parité positive. Il s'en suit qu'il ne peut pas y avoir une formation spontanée dans le vide d'un condensat dont la parité vaut -1 [38]. L'état fondamental est manifestement invariant sous les transformations $SU(2)_V$, mais pas sous les transformations axiales $SU(2)_A$. La symétrie chirale $SU(2)_V \otimes SU(2)_A$ est donc brisée en un sous-groupe $SU(2)_V : SU(2)_V \otimes SU(2)_A \rightarrow SU(2)_V$. Pour la suite on peut procéder de la même façon qu'au premier chapitre en ajoutant une petite perturbation aux champs autour du minimum :

$$\sigma' \equiv f_\pi + \sigma \text{ et } \pi' \equiv \pi \quad (3.19)$$

En ajoutant la nouvelle expression des champs dans le lagrangien (3.16) on trouve, après développement, que les quarks et la particule σ acquièrent des masses $m_q = g_\pi f_\pi$ et $m_\sigma = f_\pi \sqrt{\lambda}$ respectivement tandis que les particules π_i restent sans masse [36, 38]. Les particules π_i sont appelés pions et correspondent aux bosons de Goldstone. Comme la symétrie chirale est une symétrie globale, il n'y a pas de champ de jauge et les pions ne sont donc pas absorbés mais restent des particules physiques indépendantes. Néanmoins, les données expérimentales montrent que les pions ont une masse non nulle, alors que les bosons de Goldstone n'ont pas de masse en général. Il faut en conclure que la symétrie chirale n'est pas une symétrie exacte. Néanmoins, les données expérimentales montrent aussi que le courant vectoriel est conservé tandis que le courant axial est presque conservé. À cause du théorème de Noether, qui dit qu'à chaque courant conservé correspond une symétrie du lagrangien, il faut donc que le lagrangien possède une symétrie vectorielle et une symétrie axiale approximative. Le seul terme invariant sous une transformation vectorielle mais non invariant sous une transformation axiale est un terme de masse pour les quarks du genre $m\bar{\psi}\psi$. Il faut donc ajouter un terme de ce genre au lagrangien (3.16). Comme le courant axial est quand même presque conservé, il faut que la brisure explicite de la symétrie axiale soit faible, c.à.d. il faut

Le diagramme de Feynman signifie que lors de la propagation du boson W_μ^\pm dans le vide, il peut momentanément se transformer en deux quarks puis redevenir un boson. Le vide est donc maintenant rempli d'un condensat de quarks. Entre les deux quarks, il y a un échange important de gluons. L'aire hachurée de la boucle fermionique désigne la somme sur tous les diagrammes représentant tous les échanges de gluons possibles. L'opérateur $\Pi^{\mu\nu}$ correspondant à cet échange est inconnu. Néanmoins, il est nécessairement de la forme $Ak^\mu k^\nu + Bg^{\mu\nu}$, puisque l'impulsion et le tenseur métrique sont les seules quantités à notre disposition pour former un opérateur avec deux indices. En plus, la polarisation du vide doit être transverse : $\Pi^{\mu\nu} \cdot k = 0$. Ce résultat est lié à la conservation du courant. En effet, l'amplitude d'un diagramme est liée à la matrice d'interaction, qui est donnée par le courant. Nous avons donc $\partial_\mu \Pi^{\mu\nu} = k_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0$. L'opérateur $\Pi^{\mu\nu}$ est donc de la forme :

$$\Pi^{\mu\nu} = \pi(k^2) \frac{(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2})}{k^2} \quad (3.26)$$

où $\pi(k^2)$ est un certain opérateur dépendant de l'impulsion. Si la constante de couplage est assez grande, les deux quarks sont liés fortement et forment un pion :



$$\text{Diagram} = \text{Diagram} \quad (3.27)$$

Le fait qu'on peut remplacer la correction par le boson de Goldstone explique l'apparition du k^2 à côté de l'opérateur $\Pi^{\mu\nu}$. En effet, dans le premier chapitre, nous avons vu que les bosons de jauge ne se couplent pas directement au boson de Goldstone, mais plutôt à sa dérivée. Ainsi, à chaque vertex boson de jauge-boson de Goldstone, il y a un facteur ∂^μ , ou de façon équivalente, un facteur k^μ qui apparaît. Comme il y a deux vertex de ce genre, et comme ils ont le même indice puisque le pion est un scalaire, nous obtenons le facteur k^2 . La correction à toute ordre est donnée par une série géométrique :



$$\text{Diagram} + \text{Diagram} + \text{Diagram} + \dots \equiv \sum \quad (3.28)$$

En utilisant le fait que l'opérateur $(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2})$ est un projecteur, c.à.d. $(g^{\mu\alpha} - \frac{k^\mu k^\alpha}{k^2}) (g^{\alpha\nu} - \frac{k^\nu k^\alpha}{k^2}) = (g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2})$, nous pouvons réécrire la série \sum sous la forme d'une série géométrique :

$$\sum = \left(\frac{g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}}{k^2} \right) (1 + \pi + \pi^2 + \pi^3 + \dots) \quad (3.29)$$

$$= \left(\frac{g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}}{k^2} \right) \frac{1}{1 - \pi} = \frac{g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu / k^2}{k^2(1 - \pi(k^2))} \quad (3.30)$$

Auparavant, le propagateur des bosons W^\pm avait un pôle à $k^2 = 0$. Après absorption du boson de Goldstone, nous voyons que, si la fonction $\pi(k^2)$ est régulière à l'origine $k^2 = 0$, le propagateur garde son pôle à $k^2 = 0$. Or, nous savons que les bosons de Goldstone n'ont pas de masse, ce qui signifie que la fonction $\pi(k^2)$, correspondant au propagateur du pion,

doit développer un pôle à $k^2 = 0$. Dans la limite où k^2 tend vers zéro, la fonction $\pi(k^2)$ tend donc vers son pôle [42] :

$$\pi(k^2) \xrightarrow{k^2 \rightarrow 0} \frac{g'^2 f_{\pi^\pm}^2}{4k^2} \quad (3.31)$$

où g' est la constante de couplage de l'interaction faible et $f_{\pi^\pm}^2$ la constante de désintégration du pion. En effet, la fonction π inclut une partie de la contribution due aux deux vertex, à savoir l'intensité de couplage entre les bosons W_μ^\pm et les pions π^\pm . Or, le pion se désintègre via l'émission d'un courant associé aux bosons de jauge W_μ^\pm de l'interaction faible. L'intensité du couplage entre les pions et les bosons de jauge est donc donnée par la constante de désintégration du pion. Nous voyons donc que le propagateur des bosons W_μ^\pm a un nouveau pôle à $k^2 = \frac{1}{4}g'^2 f_{\pi^\pm}^2$, ce qui signifie qu'il a maintenant une masse égale à $m_{W^\pm} = \frac{1}{2}g' f_{\pi^\pm}$. Pour les bosons de jauge neutres W_μ^3 et B_μ , la situation est un peu plus compliquée car ils se mélangent entre eux. En effet, à cause de la conservation de la charge, le boson chargé positivement W_μ^+ par exemple ne peut se transformer qu'en un boson W_μ^+ via un pion π^+ . Il en va de même pour le boson chargé négativement W_μ^- . Par contre, le boson neutre W_μ^3 par exemple peut se transformer par l'intermédiaire du pion π^3 soit en un boson W_μ^3 soit en un boson B_μ . Pour tenir compte des différentes possibilités de mélange, il faut introduire une matrice de masse qui dans la base des états B_μ et W_μ^3 prend la forme suivante [42] :

$$M^2 = \begin{pmatrix} g'^2 & gg' \\ gg' & g^2 \end{pmatrix} \frac{f_{\pi^3}^2}{4} \quad (3.32)$$

où g est la constante de couplage associée à l'interaction électromagnétique. Les vecteurs propres de cette matrice sont les états physiques A_μ et Z_μ^0 , correspondant au photon et au boson neutre médiateur des interactions faibles. Quant aux valeurs propres de cette matrice, elles correspondent aux masses du photon A_μ et du boson Z_μ^0 , et sont données par [42] :

$$m_A^2 = 0 \quad (3.33)$$

$$m_Z^2 = \frac{(g^2 + g'^2)f_{\pi^3}^2}{4} \quad (3.34)$$

A cause de la conservation de l'isospin, nous avons que $f_{\pi^3} = f_{\pi^+} = f_{\pi^-}$. Le rapport des masses des bosons chargés et du boson neutre est donné par :

$$\frac{m_W}{m_Z} = \frac{g'}{\sqrt{g'^2 + g^2}} = \cos \theta_W \quad (3.35)$$

Nous retrouvons l'angle électrofaible introduit au premier chapitre. Cette relation entre les masses a été vérifiée expérimentalement et toute théorie alternative au mécanisme de Higgs doit impérativement permettre de la reproduire. Le modèle que nous avons exposé dans cette section permet donc de retrouver la bonne relation entre les masses. Malheureusement, les valeurs numériques des masses sont erronées. En effet, la constante de désintégration du pion est fixée par les données expérimentales à une valeur de $f_\pi = 93$ MeV. Ainsi les bosons W par exemple vont acquérir une masse égale à $M_W = \frac{1}{2}g f_\pi = 30$ MeV, ce qui est trois mille fois inférieur à la masse obtenue par les données expérimentales : $M_W = 80.384$ GeV. Les interactions fortes peuvent donc induire une brisure de l'interaction électrofaible en donnant la bonne relation entre les masses, mais à une échelle d'énergie erronée. En plus, l'existence du pion a été expérimentalement vérifiée, et constitue donc une particule physique indépendante, et pas seulement le degré de liberté longitudinal des bosons de jauge.

3.2 Modèles de la Technicouleur

La chromodynamique quantique (QCD) permet donc de briser la symétrie électrofaible en reproduisant les bonnes relations entre les masses, mais pas à une échelle d'énergie correcte. De plus, ce scénario fait disparaître les pions physiques, ce qui est contradictoire avec les données expérimentales. Ce fait a donné lieu à l'élaboration de la théorie de la Technicouleur. Cette nouvelle interaction est une copie exacte de l'interaction forte, à l'exception près qu'elle est prédominante aux hautes énergies. Ainsi, la constante de couplage de la Technicouleur devient forte à des énergies de $F_\pi \equiv v = 246$ GeV environ, alors que l'interaction forte est prédominante à des énergies de $f_\pi = 93$ MeV. A l'heure actuelle, il existe différents modèles pour la Technicouleur. La Technicouleur est loin d'être considérée comme une théorie unifiée. Dans cette section, nous allons commencer par présenter le modèle le plus simple : le modèle à un doublet.

3.2.1 Le modèle à un doublet

En général, dans les modèles de la Technicouleur, on admet qu'il existe une nouvelle sorte de fermions, appelés technifermions. Les bosons médiateurs de la nouvelle interaction seront des technigluons. Le modèle minimal est un modèle à un doublet et a été introduit par Weinberg [40, 41] et Susskind [39]. Dans ce modèle, il y a un doublet de techniquarks levogyres et deux singulets de techniquarks dextrogyres sous la symétrie électrofaible [42] :

$$T_L = \begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix}_L, U_R, D_R \quad (3.36)$$

Les technifermions sont des singulets sous l'interaction forte $SU(3)_C$, c.à.d. ils sont invariants sous ce groupe de jauge. Du point de vue physique, ceci signifie que les technifermions n'interagissent pas par échange de gluons, mais seulement par échange de technigluons. Sous le groupe de jauge de la Technicouleur G_{TC} , les technifermions ont une loi de transformation non triviale. En termes de la théorie des groupes, on dit qu'ils forment une représentation non triviale du groupe de la Technicouleur. Tous les autres fermions du modèle standard sont supposés être des singulets sous le groupe de la Technicouleur.

Pour que le modèle ne possède pas d'anomalie, on attribue les hypercharges 0, 1/2 et $-1/2$ à T_L , U_R et D_R respectivement [42, 43]. On appelle une anomalie une symétrie qui est présente au niveau classique du lagrangien, mais qui est perdue lors du passage à la description quantique de la théorie. On obtient alors des courants de Noether qui ne sont pas conservés alors qu'ils devraient l'être du point de vue classique de la théorie. Les anomalies se manifestent sous forme de diagrammes de Feynman triangulaires. En général, les anomalies rendent une théorie non renormalisable et donc incohérente. Le modèle standard possède justement les bons nombres quantiques pour être dépourvu d'anomalies. Ce phénomène est parfois désigné par l'appellation de « Miracle du modèle standard ». Si on veut introduire une nouvelle théorie comme la Technicouleur, il est avisé de choisir des nombres quantiques similaires à ceux du modèle standard.

Le doublet T_L joue donc exactement le même rôle que le doublet Φ introduit dans la section précédente, sauf que les techniquarks interagissent par échange de technigluons et non plus par un échange de gluons. Tous les résultats trouvés dans la section précédente restent donc

valides, et nous trouvons une masse pour les bosons donnée par [42] :

$$m_W = \frac{1}{2}g'F_\pi \quad (3.37)$$

$$m_Z = \frac{1}{4}(g^2 + g'^2)F_\pi \quad (3.38)$$

Jusqu'ici, l'interaction forte a été complètement ignorée et nous avons supposé que les bosons de jauge de l'interaction électrofaible obtiennent leur masse en absorbant les technipions. Or, en présence des interactions fortes, les pions aussi peuvent être absorbés par les bosons de jauge, comme nous l'avons vu dans la section précédente. En présence à la fois d'un condensat de quarks et d'un condensat de techniquarks, les bosons de jauge vont absorber un mélange de quarks et de techniquarks. Pour rendre compte de ce phénomène, il faut introduire une nouvelle combinaison d'états [42] :

$$|\text{pion absorbé}\rangle = \frac{F_\pi |\text{technipion}\rangle + f_\pi |\text{pion QCD}\rangle}{\sqrt{F_\pi^2 + f_\pi^2}} \quad (3.39)$$

$$|\text{pion physique}\rangle = \frac{F_\pi |\text{pion QCD}\rangle - f_\pi |\text{technipion}\rangle}{\sqrt{F_\pi^2 + f_\pi^2}} \quad (3.40)$$

Ces nouveaux états sont orthogonaux et normés. Le premier état représente la particule qui sera absorbée par les bosons de jauge tandis que le deuxième état représente le pion physique. Comme nous avons $F_\pi \gg f_\pi$, le premier état correspond surtout au technipion tandis que le deuxième état correspond au pion des interactions fortes. En effet, à l'échelle d'énergie de la brisure de la symétrie électrofaible, la technicoleur est prédominante, et la valeur du condensat de techniquarks est plus grande que celle du condensat formé par des simples quarks. Par conséquent, les bosons de jauge absorbent davantage de techniquarks que de quarks, et la particule physique qui reste est davantage quark que techniquark. Pour justifier le choix des nouveaux états il nous faut introduire le courant axial. En effet, dans la section (3.1.1), nous avons vu que le lagrangien des interactions fortes est invariant sous la symétrie axiale. Par le théorème de Noether, il y a donc un courant axial associé à cette symétrie, donné par [38] :

$$J_\mu^i = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5 T^i\psi \quad (3.41)$$

Pour avoir le courant axial total, il faut faire la somme sur tous les doublets ψ . La désintégration du pion par interactions faibles est contrôlée par l'élément de matrice du courant axial total entre le vide et le pion [42] :

$$\langle 0|J_\mu|\text{pion QCD}\rangle = f_\pi q_\mu \quad (3.42)$$

$$\langle 0|J_\mu|\text{technipion}\rangle = F_\pi q_\mu \quad (3.43)$$

Le couplage entre les nouveaux états et le vide est donc donné par [42] :

$$\langle 0|J_\mu|\text{pion absorbé}\rangle = \sqrt{F_\pi^2 + f_\pi^2}q_\mu \quad (3.44)$$

$$\langle 0|J_\mu|\text{pion physique}\rangle = 0 \quad (3.45)$$

Les bosons de jauge de l'interaction faible se couplent aux pions via le courant axial. Comme le pion physique ne se couple pas au courant axial, il ne se couple pas non plus aux bosons de jauge en question. Du coup, il n'est pas du tout absorbé par ces derniers, contrairement au deuxième état, qui est complètement absorbé. Notons que ce modèle peut aisément être

étendu à un modèle contenant une génération de technifermions. En effet, dans le modèle standard, les fermions ordinaires apparaissent en des générations, il est donc possible que les technifermions se présentent aussi en générations [42, 44].

Le modèle présenté dans cette section permet donc de donner une masse aux bosons de jauge de l'interaction faible. Un défaut grave de ce modèle est le fait que les fermions restent sans masse. En effet, les quarks et les techniquarks acquièrent peut-être une masse faible due à la brisure spontanée de la symétrie chirale et la brisure spontanée de la symétrie électrofaible, mais cette masse est très faible. Nous avons vu dans la section (3.1.2) que la symétrie chirale de l'interaction forte est brisée aussi de façon explicite, et donc il faut fournir une masse supplémentaire aux quarks. En outre, les leptons n'acquièrent pas de masse du tout dans ce modèle. La théorie contient donc encore trop de symétries. Pour y remédier, on introduit une sixième interaction afin de les briser. Il s'agit là du modèle de la Technicouleur étendue (ETC : Extended Technicolour).

3.2.2 Le modèle de la Technicouleur étendue (ETC)

Le modèle de la Technicouleur étendue a été proposé pour la première fois en 1979 par Dimopoulos et Susskind [45], ainsi que par Eichten et Lane [46]. Dans le mécanisme de Higgs on introduit des couplages de Yukawa afin de donner une masse aux fermions. La procédure dans le modèle ETC est similaire, sauf que les couplages de Yukawa apparaissent d'une manière beaucoup plus naturelle qu'ils ne le font dans le mécanisme de Higgs. Pour donner une masse aux fermions, il faut les coupler aux particules qui brisent la symétrie, à savoir les technifermions. Or, les gluons n'interagissent qu'avec les fermions ordinaires tandis que les technigluons n'interagissent qu'avec les technifermions. Il faut donc introduire une nouvelle interaction ETC qui rend possible le couplage des fermions aux technifermions. Cette interaction est une interaction de jauge et correspond donc à un groupe de jauge G_{ETC} qui doit être assez grand pour contenir le groupe de la Technicouleur G_{TC} . En effet, on suppose qu'à une certaine échelle d'énergie $\mu > v$, le groupe G_{ETC} est brisé et donne le groupe de la Technicouleur G_{TC} : $G_{ETC} \rightarrow G_{TC}$. Les bosons de jauge de l'interaction ETC vont alors devenir massifs et lier les fermions aux technifermions. Si on veut que les fermions puissent interagir avec les technifermions via les gluons ETC, il faut qu'ils soient contenus dans une même représentation du groupe G_{ETC} , c.à.d. il faut les placer dans un même multiplet.

Prenons un exemple. Supposons que le groupe de la Technicouleur soit donné par le groupe $SU(N)$ et le groupe de l'interaction ETC par $SU(N + 1)$. Dans ce cas, la représentation fondamentale $\mathbf{N} + \mathbf{1}$ du groupe de ETC est donné par le multiplet suivant [42] :

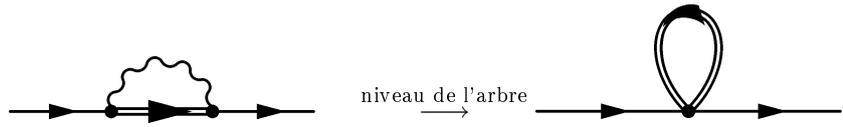
$$\left(\underbrace{F_1, F_2, \dots, F_N}_{\text{Multiplet de Technicouleur}}, \underbrace{f}_{\text{Singulet de Technicouleur}} \right) \quad (3.46)$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\text{Multiplet de ETC}}$

où F_i sont les technifermions et f un fermion ordinaire. Si le groupe ETC est alors brisé, nous obtenons une représentation \mathbf{N} de la Technicouleur, correspondant aux technifermions, ainsi qu'un singulet $\mathbf{1}$, correspondant à un fermion ordinaire. Comme on veut donner une masse à chaque fermion, il faut un multiplet ETC pour chaque fermion. Evidemment, si le groupe de la Technicouleur est toujours $SU(N)$, alors le groupe de ETC pourrait aussi être $SU(N + M)$. Dans ce cas, le groupe ETC est brisé en une représentation \mathbf{N} et en M singulets de la Technicouleur. Le nombre de multiplets ETC nécessaires est ainsi réduit. Une autre possibilité serait d'insérer le groupe de couleur $SU(3)_C$ dans le groupe de ETC. La brisure de symétrie

de ce dernier aura alors lieu selon le schéma suivant : $SU(N+3)_{ETC} \rightarrow SU(N)_{TC} \otimes SU(3)_C$. La représentation fondamentale $\mathbf{N}+\mathbf{3}$ est alors brisée en une représentation \mathbf{N} de Technicouleur et un triplet $\mathbf{3}$ de la couleur. Le triplet de couleur est un quark ordinaire et constitue un singulet sous la Technicouleur [42].

Les bosons médiateurs de l'interaction ETC couplent donc les fermions aux technifermions. Ainsi, un fermion, en émettant un gluon ETC, peut se transformer spontanément en un technifermion. En réabsorbant le gluon ETC émis, le technifermion peut ensuite se retransformer en un fermion ordinaire. Comme le gluon ETC est massif, il faut travailler au niveau de l'arbre, en éliminant le boson massif et en utilisant l'approximation de l'interaction à quatre fermions :


(3.47)

De même, le diagramme de la diffusion devient au niveau de l'arbre :


(3.48)

Dans la théorie de l'interaction faible, de tels diagrammes donnent un lagrangien d'interaction de la forme : $L_{int} = g'^2 \frac{J^1 J^2}{M_W^2}$ où J^1 et J^2 sont les deux courants fermioniques. Par analogie, on suppose que l'interaction à quatre fermions dans le cas de la théorie ETC donne une contribution similaire [44] :

$$L_{int} = \frac{1}{2} \frac{g_{ETC}^2}{M^2} \bar{F} \gamma_\mu f \bar{f} \gamma_\mu F \quad (3.49)$$

où g_{ETC} est la constante de couplage du groupe de ETC et M est la masse du gluon ETC. En appliquant une transformation de Fierz [47], on trouve [44] :

$$L_{int} = -\frac{1}{2\mu^2} ((\bar{F}F)(\bar{f}f) - (\bar{F}\gamma_5 F)(\bar{f}\gamma_5 f) + \dots) \quad (3.50)$$

A l'échelle d'énergie $v = 246$ GeV, la constante de couplage de la Technicouleur devient importante et il y a formation d'un condensat de Technifermions : $\langle 0 | \bar{F}F | 0 \rangle = v \neq 0$. Les fermions ordinaires acquièrent alors une masse donnée par [44] :

$$m_f = \frac{1}{2\mu^2} \langle 0 | \bar{F}F | 0 \rangle \quad (3.51)$$

Ainsi, le modèle ETC permet de donner une masse à la fois aux bosons de jauge et aux fermions. Néanmoins, il reste toujours un bémol dans la théorie. En effet, il manque encore le mécanisme qui permet de briser le groupe de ETC en le groupe de la Technicouleur. En outre, la théorie ne constitue pas encore une théorie de la physique des saveurs. Jusqu'à ce point, tous les fermions ont la même masse. Or, les générations sont caractérisées par le

fait que la masse des fermions diffère fortement d'une génération à l'autre. Ainsi, le quark up appartenant à la première génération a une masse de 1.5 à 5 MeV et correspond au quark le plus léger. Par contre, le quark le plus lourd, le quark top, appartient à la troisième génération et a une masse de 173 GeV environ, ce qui est presque égale à la masse de l'atome d'or. Dans la section suivante, nous allons présenter un modèle qui explique la brisure de ETC ainsi que l'existence de trois générations.

3.2.3 La Technicouleur en cascade

Les trois générations de fermions ne peuvent pas être produites avec une seule brisure de symétrie. En effet, il faut au moins trois brisures de symétrie successives à des échelles d'énergie différentes. Considérons par exemple le schéma suivant [44] :

$$SU(6)_{ETC} \xrightarrow{\mu} SU(5)_{E'TC} \xrightarrow{\mu'} SU(4)_{E''TC} \xrightarrow{\mu''} SU(3)_{TC} \quad (3.52)$$

Cette brisure de symétrie successive permet de donner une masse différente aux trois générations de fermions. Ainsi, la première génération donnée par (e, ν_e, u, d) acquiert une masse $m_f = \frac{1}{2\mu^2} \langle \bar{F}F \rangle_0$. La deuxième génération (μ, ν_μ, c, s) acquiert une masse donnée par $m'_f = \frac{1}{2\mu'^2} \langle \bar{F}F \rangle_0$, et ainsi de suite. A chaque échelle d'énergie μ , μ' et μ'' correspond une constante de couplage g_{ETC} , $g_{E'TC}$ et $g_{E''TC}$ qui devient assez forte pour provoquer la formation d'un condensat de technifermions, brisant ainsi les groupes de ETC, E'TC et E''TC successivement. La brisure de la symétrie électrofaible est alors provoquée par la constante de couplage de la Technicouleur g_{TC} qui devient important à une échelle d'énergie v .

Ce modèle postule donc que les groupes ETC, E'TC et E''TC se brisent par eux-mêmes. Pour qu'un groupe se brise par lui-même, il faut que le condensat qu'il forme ne soit pas un singulet sous le groupe en question. Ceci est possible si le groupe possède un contenu complexe en fermions. Prenons la théorie de l'interaction forte comme exemple. Les représentations de $SU(3)_C$ correspondent à la représentation fondamentale $\mathbf{3}$, pour les fermions, et à la représentation complexe conjuguée $\bar{\mathbf{3}}$ pour les antifermions. Nous avons vu dans la section (3.1.1) que deux quarks vont se combiner pour former une nouvelle représentation de $SU(3)_C$ sous forme d'un condensat. Les différentes combinaisons possibles sont données par [44] :

$$\mathbf{3} \times \mathbf{3} = \bar{\mathbf{3}} + \mathbf{6} \quad (3.53)$$

$$\bar{\mathbf{3}} \times \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{3} + \bar{\mathbf{6}} \quad (3.54)$$

$$\mathbf{3} \times \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} + \mathbf{8} \quad (3.55)$$

Ces combinaisons représentent les différents modes de diffusion possibles. En général, une diffusion peut être attractive ou répulsive. Le signe de la diffusion dépend des représentations initiales et finales [42]. Dans notre écriture ci-dessus, le premier terme du deuxième membre représente une diffusion attractive, le deuxième terme une diffusion répulsive. Les détails du calcul sont donnés dans l'annexe C. Ainsi, s'il y a par exemple diffusion entre un quark et un antiquark, elle est attractive si l'état final, correspondant à l'état combiné, est un singulet. Par contre, si le quark et l'antiquark diffuse en un octet, la diffusion est répulsive. Pour avoir la formation d'un condensat, il faut un état lié, c.à.d. il faut considérer les diffusions attractives seulement.

Dans la section (3.1.1), nous avons vu que le condensat qui brise la symétrie chirale est formé d'un quark et d'un antiquark, qui se combinent donc en un singulet de couleur. Ainsi, l'état fondamental est un invariant sous le groupe $SU(3)_C$, et celui-ci n'est donc pas brisé

en un sous-groupe de couleur. Or, à priori, selon les équations données ci-dessus, d'autres condensats formés de deux quarks ou de deux antiquarks sont possibles. Néanmoins, ces modes de condensation ne se produisent pas en réalité. En effet, le potentiel de liaison entre deux fermions est donnée de façon approximative par [44] :

$$V \approx C_f - C_1 - C_2 \quad (3.56)$$

où C_f est la valeur propre de l'opérateur de Casimir² associé à la représentation de l'état final et C_1, C_2 sont les valeurs propres des opérateurs de Casimir associés aux deux représentations initiales. Le potentiel est maximal pour le mode de condensation (3.55). Comme une énergie de liaison est une énergie négative, l'univers favorise la production du mode de condensation qui maximise l'énergie de liaison, afin de minimiser l'énergie de son état fondamental. La situation est similaire à celle qui se produit dans le supraconducteur du chapitre 2, qui cherche à minimiser son énergie en produisant un nombre maximal de paires de Cooper. Le mode de condensation avec le potentiel le plus élevé est appelé « le canal le plus attractif » (MAC : Most Attractive Channel) [44].

Supposons maintenant que le groupe $SU(3)_C$ ait un contenu non-réel en fermions. En général, un contenu non-réel en fermions se produit lorsqu'un groupe a une représentation fondamentale \mathbf{R} qui est différente de sa représentation complexe conjuguée $\bar{\mathbf{R}} : \mathbf{R} \neq \bar{\mathbf{R}}$. Supposons donc que le groupe $SU(3)_C$ n'ait par exemple pas de représentation $\bar{\mathbf{R}}$. Dans ce cas, le seul mode de condensation possible est le mode (3.54). Deux quarks se lieraient en un antitriplet de couleur, et non pas en un singulet. L'état fondamental ne serait plus invariant sous $SU(3)_C$, et le groupe de couleur $SU(3)_C$ serait brisé en un sous-groupe de couleur $SU(2)_C$ [42].

Un groupe qui ne possède pas un contenu réel en fermions est par exemple le groupe $SU(5)$. En effet, les représentations du contenu en fermions pour ce groupe sont $\bar{\mathbf{5}}$ et $\mathbf{10}$. Pour ce groupe, les modes de condensation possibles sont donnés par [44] :

$$\mathbf{10} \times \mathbf{10} = \bar{\mathbf{5}} + \mathbf{50} + \mathbf{45} \quad (3.57)$$

$$\bar{\mathbf{5}} \times \bar{\mathbf{5}} = \bar{\mathbf{10}} + \bar{\mathbf{15}} \quad (3.58)$$

$$\mathbf{10} \times \bar{\mathbf{5}} = \mathbf{5} + \bar{\mathbf{45}} \quad (3.59)$$

La combinaison qui permet de réduire l'énergie du vide au maximum est celle de deux représentations $\mathbf{10}$ se combinant en une représentation $\bar{\mathbf{5}}$. Le vide n'est donc pas invariant sous le groupe $SU(5)$, qui est par conséquent brisé en le sous-groupe $SU(4)$. Les multiplets de fermions sont alors brisés selon [44] :

$$\bar{\mathbf{5}} = \bar{\mathbf{4}} + \mathbf{1} \text{ et } \mathbf{10} = \mathbf{6} + \mathbf{4} \quad (3.60)$$

La représentation fondamentale $\mathbf{4}$ du groupe $SU(4)$ a donc maintenant une représentation complexe conjuguée donnée par $\bar{\mathbf{4}}$. Le contenu en fermions est donc réel. Le MAC est donné par la combinaison de $\mathbf{4}$ et de $\bar{\mathbf{4}}$ en un singulet. Le groupe $SU(4)$ n'est donc pas brisé. Pour réaliser ce modèle de façon concrète, il faut donc trouver un groupe G_{ETC} qui possède justement les bons MACs pour aboutir au groupe de la Technicouleur par brisure de symétrie successive. Trouver un groupe qui réponde à toutes les contraintes est tout sauf facile, et à l'heure actuelle, aucun modèle concret n'existe.

2. Un opérateur de Casimir est un opérateur appartenant à un certain groupe et qui commute avec tous les générateurs de ce groupe. A chaque représentation de ce groupe peuvent être associées des valeurs différentes des opérateurs de Casimir.

3.3 Défauts de la Technicouleur

Les modèles proposés jusqu'ici souffrent de plusieurs problèmes qui n'ont pas encore été résolus à l'heure actuelle. Il existe deux défauts principaux qui sont communs à tous les modèles. Un de ces défauts est lié à l'existence de courants neutres changeant de saveur (FCNC : Flavour-changing neutral currents). L'autre défaut est lié aux tests précis de l'interaction électrofaible (precision electroweak tests). Dans les sections suivantes, nous allons d'abord exposer ces défauts pour présenter ensuite un dernier modèle de la Technicouleur, qui permettra peut-être d'y remédier.

3.3.1 Courants neutres changeant de saveur : FCNC

Les FCNCs sont des courants qui permettent à un fermion d'une certaine saveur de se transformer en un autre fermion de saveur différente mais de charge électrique identique. Un tel processus n'a jamais été observé expérimentalement, il est donc probable que ce processus ne se produit pas ou rarement en réalité. Toute théorie digne de ce nom doit par conséquent contenir un théorème interdisant ce genre de processus [48, 49, 50, 51].

Le modèle standard prédit l'existence des courants FCNCs. Or, il existe aussi un autre mécanisme appelé mécanisme de GIM, qui a été proposé en 1970 par Glashow, Iliopoulos et Maiani [52] et qui supprime les FCNCs. Expliquons comment les FCNCs apparaissent dans le modèle standard. En général, les FCNCs sont prédits dans toute théorie qui ne traite pas les trois générations de fermions de la même façon. Dans le modèle standard, les couplages de Yukawa donnent une masse différente aux trois générations et le boson de Higgs se couple donc différemment aux fermions d'une génération à l'autre. Pour trois générations, le couplage de Yukawa s'écrit comme suit :

$$L = - \sum_{i,j=1}^3 (\lambda_{ij} \bar{d}_{Ri} \Phi^\dagger Q_{Lj} + \tilde{\lambda}_{ij} \bar{u}_{Ri} \tilde{\Phi}^\dagger Q_{Lj}) + h.c. \quad (3.61)$$

$$\text{avec } Q_{Lj} = \begin{pmatrix} u_j \\ d_j \end{pmatrix}_L \quad (3.62)$$

où i et j sont les indices de saveur : $u_i = u, c, t$ et $d_i = d, s, b$ pour $i = 1, 2, 3$. Après la brisure de symétrie, le couplage de Yukawa prend la forme suivante :

$$L = - \sum_{i,j=1}^3 (\bar{d}_{Ri} (M_d)_{ij} d_{Lj} + \bar{u}_{Ri} (M_u)_{ij} u_{Lj}) + h.c. \quad (3.63)$$

$$\text{avec } (M_d)_{ij} = \lambda_{ij} \frac{v}{\sqrt{2}} \text{ et } (M_u)_{ij} = \tilde{\lambda}_{ij} \frac{v}{\sqrt{2}} \quad (3.64)$$

La matrice M n'est pas diagonale. Ainsi, les états propres du hamiltonien de l'interaction faible ne correspondent pas aux états propres de la matrice de la masse. Ceci est lié au fait que l'interaction faible est brisée spontanément et qu'elle n'est pas couplée à la masse. Pour diagonaliser la matrice M , on utilise le théorème de la bidiagonalisation, qui dit que toute matrice peut être diagonalisée par deux matrices unitaires : $U^\dagger M V = \text{diag}(m_1, m_2, m_3)$ avec $V^\dagger M^\dagger M V = \text{diag}(m_d, m_s, m_b)$ et $U^\dagger M M^\dagger U = \text{diag}(m_u, m_c, m_t)$. Dénotons par un « ' » les états propres de l'interaction faible. Les états propres de la masse sont notés sans « ' ». Les états propres de l'interaction faible sont liés aux états propres de la masse par des

transformations unitaires :

$$\begin{pmatrix} u' \\ c' \\ t' \end{pmatrix}_{L,R} = U_{L,R} \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}_{L,R} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix}_{L,R} = V_{L,R} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_{L,R} \quad (3.65)$$

Les états u_i et d_i ont donc maintenant une masse bien définie. Regardons quel effet un changement de base des états u'_i et d'_i vers les états u_i et d_i a sur l'expression des courants de l'interaction faible. Le courant faible neutre des quarks devient :

$$\overline{(u', c', t')}_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} u' \\ c' \\ t' \end{pmatrix}_L = \overline{(u, c, t)}_L (U_L^\dagger U_L) \gamma^\mu \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}_L \quad (3.66)$$

Comme U est une matrice unitaire $U^\dagger U = 1$, nous voyons que le courant neutre reste inchangé. Il n'y a pas de mélange entre générations pour le courant neutre. Par contre, le courant faible chargé devient :

$$\overline{(u', c', t')}_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix}_L = \overline{(u, c, t)}_L (U_L^\dagger V_L) \gamma^\mu \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_L \quad (3.67)$$

La matrice $V \equiv U_L^\dagger V_L$ est une matrice unitaire et décrit le mélange entre générations induit par le courant chargé. Cette matrice est appelée matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM). La matrice CKM vaut à peu près un sur les diagonales et l'amplitude de ses éléments diminue quand on s'éloigne de la diagonale. Ainsi, un quark top peut par exemple se transformer en quark bottom via l'émission d'un boson W^+ . L'amplitude de ce processus est alors donnée par l'élément de matrice V_{33} .

Les courants chargés peuvent donner lieu à des phénomènes interdits dans la nature. Par

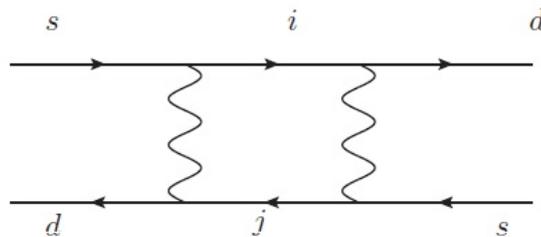


FIGURE 3.1 – Diagramme de diffusion pour la transition $\Delta s = 2 \quad s\bar{d} \rightarrow d\bar{s}$, avec $i, j = u, c, t$.

phénomène « interdit » on entend un phénomène qui n'est observé que rarement. Un tel phénomène est illustré sur la figure (3.1), qui illustre une transition indirecte avec un changement d'étrangeté égal à deux : $\Delta s = 2$. En effet, en travaillant au niveau de l'arbre et en utilisant l'approximation à quatre fermions, le processus de la figure (3.1) peut être décrit par un lagrangien effectif donné par :

$$L \approx \frac{g'}{M_W^2} J_1 J_2 = \frac{g'}{M_W^2} (\bar{d} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) s) (\bar{d} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) s) \quad (3.68)$$

La charge électrique de \bar{d} est identique à la charge électrique de s . Les courants chargés donnent donc lieu à un courant neutre effectif changeant de saveur, il s'agit donc d'un FCNC.

Dans le modèle standard, il y a néanmoins le mécanisme de GIM, qui supprime fortement l'amplitude du processus illustré à la figure (3.1). En effet, on peut montrer que l'amplitude du diagramme de la figure (3.1) est proportionnelle à la somme suivante, qui vaut zéro :

$$\sum_{i=1}^3 V_{is} V_{id}^* = 0 \quad (3.69)$$

La somme vaut zéro parce que la matrice CKM est unitaire. Au niveau de l'arbre, l'amplitude et donc la probabilité de ce processus est zéro. Néanmoins, si on travaille au-delà du niveau arbre, il y a des termes supplémentaires qui apparaissent qui ne sont pas nuls mais qui sont quand même fortement supprimés. Le mécanisme de GIM a été introduit à une époque où le quark c n'a pas encore été découvert. Afin d'obtenir le bon mélange entre les générations pour supprimer les FCNCs, les auteurs du mécanisme de GIM ont dû postuler l'existence d'un quatrième quark, et ce n'est que plus tard que le quark en question, le charm, fut découvert. La matrice CKM est la généralisation du mécanisme de GIM à six quarks, afin d'inclure les quarks top et bottom.

Nous avons vu que dans les modèles de Technicouleur, l'interaction à quatre fermions est permise. Ainsi, un fermion peut se transformer en un technifermion, puis en un autre fermion dont la saveur peut être différent du premier. La Technicouleur prédit donc l'existence de tels courants. En effet, comme les couplages de Yukawa, la théorie de la Technicouleur doit impérativement distinguer les trois générations afin de pouvoir donner une masse différente à chaque génération. Dès lors, il faut construire un mécanisme similaire au mécanisme de GIM du modèle standard qui permettrait de supprimer les courants FCNCs. A l'heure actuelle, aucun mécanisme satisfaisant n'a encore été proposé. En plus du fait que les FCNCs n'ont pas été observés expérimentalement, il y a un autre problème lié aux FCNCs. En effet, les FCNCs permettent certaines transitions qui donnent une limite supérieure à la masse des quarks, du moins si on admet que la Technicouleur est similaire à l'interaction forte. Cette limite est assez basse, et permet tout juste de donner une masse correcte aux fermions de la première génération, mais pas aux fermions de la deuxième et troisième génération, qui sont beaucoup trop lourds [48, 49, 50, 51].

3.3.2 Tests de précision électrofaible

Certaines grandeurs du modèle standard, comme par exemple l'angle électrofaible, qui donne le rapport entre les masses des bosons W et Z , sont déterminées de façon très précise par les données expérimentales. Ce fait contraint fortement la nouvelle physique qui se cache peut-être aux hautes énergies. En effet, une nouvelle physique comme la Technicouleur apporte des corrections aux grandeurs du modèle standard. Comme certaines de ces grandeurs, surtout celles liées à la théorie électrofaible, sont connues de façon très précise, les corrections en question ne doivent pas être trop importantes, ce qui impose de nombreuses contraintes à toute théorie visant à introduire une nouvelle physique. Les corrections peuvent être mesurées par trois paramètres, à savoir les trois paramètres de Peskin-Takeuchi U , T et S , que nous allons définir un peu plus loin. L'introduction d'une nouvelle physique aux hautes énergies modifie les diagrammes de l'interaction des bosons W et Z avec eux-mêmes, ce qui se traduit par une modification du propagateur de ces derniers. La correction est de la même

forme que celle que nous avons vue en (3.26), et peut être développée en série de Taylor [53] :

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \Pi(k^2) \quad (3.70)$$

$$= \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) (\Pi(0) + k^2 \Pi'(0) + O(k^2/\mu_{new})) \quad (3.71)$$

où μ_{new} désigne l'échelle d'énergie à laquelle la nouvelle physique se manifeste. A cause de la conservation de la charge, il faut $\Pi_{W^+W^+}^{\mu\nu} = \Pi_{W^-W^-}^{\mu\nu}$. Les corrections aux propagateurs de W^+ et W^- ont donc la même amplitude. Les corrections aux propagateurs des bosons W^3 et B sont notées $\Pi_{W^3W^3}^{\mu\nu}$ et $\Pi_{BB}^{\mu\nu}$. Finalement, la correction au diagramme décrivant le mélange entre les bosons neutres est notée $\Pi_{W^3B}^{\mu\nu}$. Les paramètres de Peskin-Takeuchi sont alors définis comme suit [53] :

$$S \equiv -16\pi \Pi'_{W^3B}(0) \quad (3.72)$$

$$T \equiv \frac{4\pi}{\sin(\theta_W)^2 \cos(\theta_W)^2 M_Z^2} (\Pi_{W^+W^+}(0) - \Pi_{W^3W^3}(0)) \quad (3.73)$$

$$U \equiv 16\pi (\Pi'_{W^+W^+}(0) - \Pi'_{W^3W^3}(0)) \quad (3.74)$$

Ainsi, S mesure le mélange des bosons neutres. Comme nous l'avons vu dans la section 3.1.2., le boson W^3 (resp. B) peut se transformer en un boson B (resp. W^3) en passant par l'émission et l'absorption d'une paire de quarks. Si le nombre de fermions permettant une telle transformation augmente, alors le mélange et donc S augmente. Par conséquent, le paramètre S limite le nombre d'isodoublets qu'une nouvelle théorie peut apporter. Ceci constitue bien entendu un problème pour les théories de la Technicouleur, car même le modèle le plus simple (voir section 3.2.1) nécessite l'introduction d'un nouveau doublet de fermions. Le paramètre T mesure la différence de masse entre les bosons W et Z , qui est donnée par l'angle électrofaible. En fait, il s'agit là d'une mesure de la violation de l'isospin faible. Si cette dernière symétrie ($SU(2)_{I_W}$ globale) avait été exacte, les bosons W et Z auraient la même masse. Le paramètre U mesure la même différence mais à un ordre plus élevé. Les valeurs des paramètres de Peskin-Takeuchi sont limitées par les précisions expérimentales qu'on a sur la valeur des paramètres de la théorie électrofaible [54] :

$$S = 0.01 \pm 0.10(-0.08) \quad (3.75)$$

$$T = 0.03 \pm 0.11(+0.09) \quad (3.76)$$

$$U = 0.06 \pm 0.10(+0.01) \quad (3.77)$$

Pour trouver ces valeurs, on a supposé que la masse de la particule de Higgs vaut 117 GeV. Les nombres entre parenthèses correspondent aux valeurs obtenues pour une masse de la particule de Higgs égale à 300 GeV. Toute nouvelle théorie doit reproduire des valeurs de S , T et U qui sont en accord avec ces valeurs expérimentales. La valeur de S a été calculée pour un modèle de la Technicouleur à une génération, en supposant que la Technicouleur est similaire à QCD. La valeur trouvée est approximativement égale à l'unité : $S \approx 1$ [48]. La valeur théorique diffère donc énormément de la valeur expérimentale, ce qui suggère que la Technicouleur a encore beaucoup de progrès à réaliser avant de pouvoir être considérée comme une théorie alternative au mécanisme de Higgs.

3.3.3 La Technicouleur marchante

La Technicouleur marchante, désignée par le nom de Walking Technicolour en anglais, est une proposition d'un modèle qui permet de résoudre les problèmes liés aux FCNCs et

aux paramètres de Peskin-Takeuchi. En effet, ces deux problèmes résultent du fait que la Technicouleur est basée sur la théorie de l'interaction forte, et donc asymptotiquement libre. Par conséquent, la constante de couplage g_{TC} de la Technicouleur évolue rapidement avec l'échelle d'énergie. Dès que le groupe ETC se brise et donne le groupe de la Technicouleur à une échelle d'énergie μ_{ETC} , la constante de couplage de la Technicouleur devient importante rapidement et le condensat des technifermions se forme à une échelle d'énergie proche de μ_{ETC} : $\mu_{ETC} \approx v$. Ainsi, l'interaction ETC est prédominante à une échelle d'énergie assez basse et influence donc fortement la physique connue aux énergies plus faibles. Ceci résulte en de nouveaux phénomènes hypothétiques qui ne sont pas observés expérimentalement à ces énergies-là et en des modifications trop importantes des paramètres de l'interaction électrofaible. Une façon d'éviter ce genre de problèmes est d'admettre que la Technicouleur n'est pas similaire à la chromodynamique quantique, et que la constante de couplage de la Technicouleur évolue lentement, contrairement à la constante de couplage de l'interaction forte. Ainsi, on peut avoir $v \equiv \mu_{TC} \ll \mu_{ETC}$, avec g_{TC} qui est plus ou moins constante sur cet intervalle. Cette hypothèse permet de résoudre entre autres le problème de la masse des fermions trop faible induite par les FCNCs [48].

Pour rappel, à l'échelle d'énergie μ_{ETC} , la masse des fermions est donnée par :

$$m(\mu_{ETC}) \approx \frac{1}{\mu_{ETC}^2} \langle \bar{F}F \rangle_{ETC} \quad (3.78)$$

Le condensat de Technifermions à une échelle d'énergie μ_{ETC} est lié au condensat $\langle \bar{F}F \rangle_{TC} \approx F_\pi$ à l'échelle μ_{TC} par la relation suivante [48] :

$$\langle \bar{F}F \rangle_{ETC} = \langle \bar{F}F \rangle_{TC} \exp \left(\int_{\mu_{TC}}^{\mu_{ETC}} \frac{d\mu}{\mu} \gamma_m(\mu) \right) \quad (3.79)$$

Ce résultat est donné par la théorie de la renormalisation. L'opérateur $\gamma_m(\mu)$ est appelé la dimension anomale. Une analyse non perturbative donne que $\gamma_m \approx 1$ sur l'intervalle $[\mu_{TC}, \mu_{ETC}]$. Néanmoins, cette analyse est beaucoup trop longue pour la présenter dans cette section. D'ailleurs, un mémoire a déjà été dédié à un sujet similaire à l'université de Liège et nous renvoyons donc le lecteur intéressé à la référence [55]. Comme nous avons maintenant que $\mu_{TC} \neq \mu_{ETC}$, l'intégrale du membre de droite ci-dessus n'est plus zéro, et donc la masse des fermions (3.78) devient :

$$m(\mu_{ETC}) \approx \frac{1}{\mu_{ETC}^2} \langle \bar{F}F \rangle_{TC} \frac{\mu_{ETC}}{\mu_{TC}} \quad (3.80)$$

La masse des fermions est donc amplifiée puisqu'elle évolue maintenant comme $1/\mu$ et non plus comme $1/\mu^2$. L'amplification de la masse permet ainsi de donner une masse non seulement aux fermions de la première génération, mais aussi aux fermions de la deuxième génération. Néanmoins, ce modèle ne permet toujours pas de donner une masse aux fermions de la troisième génération, qui restent toujours trop lourds. Ainsi, le problème de masse provoquée par les FCNCs n'est résolu que partiellement. En ce qui concerne les paramètres de Peskin-Takeuchi, la situation est un peu obscure. En effet, d'une part il existe des arguments qui indiquent que sous certaines conditions, la Technicouleur marchante pourrait reproduire les bonnes valeurs de ces paramètres. D'autre part, dans d'autres circonstances, la Technicouleur marchante pourrait aussi produire des valeurs erronées des paramètres de Peskin-Takeuchi. Tant qu'il n'existe pas de modèle concret de la Technicouleur marchante, il est impossible de prédire si ce modèle permet réellement de résoudre tous les problèmes liés aux paramètres S, T et U [48].

3.4 Bilan

Nous avons commencé le chapitre en présentant la brisure de la symétrie chirale de la chromodynamique quantique, sur laquelle est basée la théorie de la Technicoleur. En effet, nous avons vu comment la brisure de la symétrie électrofaible peut être considérée comme une conséquence directe de la brisure de la symétrie chirale des interactions fortes. Ce scénario a permis de reproduire la bonne relation entre les masses, mais à une échelle d'énergie erronée. C'est pourquoi on a introduit une nouvelle interaction dont la symétrie chirale est alors brisée à une échelle d'énergie supérieure, impliquant ensuite la brisure de la symétrie électrofaible à la bonne échelle d'énergie $v = 246$ GeV. Nous avons alors passé en revue plusieurs modèles qui permettraient de réaliser la théorie en question. A chaque étape, nous avons exhibé les défauts du modèle en question, pour ensuite donner un modèle amélioré permettant de résoudre certains de ces défauts. Néanmoins, au final, nous avons montré qu'il existe encore des problèmes qu'aucun de ces modèles, du plus simple au plus sophistiqué, ne permet de résoudre. En effet, les modèles de la Technicoleur sont soumis à une multitude de contraintes qu'ils doivent satisfaire et par conséquent, il est extrêmement difficile de réaliser des modèles concrets qui répondent à tous ces critères.

La Technicoleur est probablement une théorie qui contient un plus grand nombre de modèles que n'importe quelle autre théorie. En fait, les modèles présentés dans ce travail ne constituent qu'une petite sélection de modèles parmi beaucoup d'autres. Par exemple, un autre modèle bien connu est celui de la Technicoleur fortement étendue (Strong Extended Technicolour). Ce modèle postule que la brisure de la symétrie électrofaible n'est pas seulement due aux interactions de la Technicoleur, mais aussi à l'interaction ETC. Ainsi, le condensat de technifermions brisant la symétrie électrofaible n'est pas seulement formé par échange de technigluons, mais aussi par échange de gluons ETC [48]. Ceci permet d'augmenter la valeur moyenne dans le vide du condensat, et donc aussi la masse des fermions via l'interaction à quatre fermions, ce qui pourrait rendre possible l'attribution d'une masse adéquate aux fermions de la troisième génération. Un autre modèle intéressant est celui de la « Technicoleur assistée par le quark top » (Topcolour assisted Technicolour) qui postule que la troisième génération de fermions correspond en fait à la première génération de technifermions. Ainsi, le condensat formé par les technifermions correspond à un condensat formé de quarks top [56].

Bien que la théorie de la Technicoleur soit plus naturelle que le mécanisme de Brout-Englert-Higgs, beaucoup de physiciens la considèrent comme étant trop compliquée et peu élégante. La difficulté de réaliser des modèles concrets la rend encore moins attractive. Néanmoins, il ne faut pas oublier que la Technicoleur constitue bien plus qu'une simple alternative au mécanisme de Brout-Englert-Higgs. Comme déjà mentionné à plusieurs reprises, la Technicoleur est la seule théorie à l'heure actuelle qui permet d'expliquer la physique des saveurs. Ainsi, même si la Technicoleur est un jour définitivement abandonnée en tant qu'alternative au mécanisme de Brout-Englert-Higgs, elle ne sera pas oubliée, puisqu'elle fournit de nombreux indices permettant d'établir une théorie des saveurs. En outre, la Technicoleur introduit une multitude de nouvelles particules, et constitue donc une théorie qui d'une façon très naturelle contient un grand nombre de candidats possibles pour la Matière Noire.

Conclusion

Nous avons commencé ce travail de fin d'études en introduisant le concept d'une brisure spontanée de symétrie et en présentant le mécanisme de Brout-Englert-Higgs. Nous l'avons fait à la fois dans le cadre d'une théorie abélienne et d'une théorie non-abélienne. Ensuite, nous avons appliqué le mécanisme de Brout-Englert-Higgs à la physique de l'état solide. Nous avons vu qu'effectivement, de nombreux phénomènes de la supraconductivité peuvent être décrits par des brisures de symétrie et le mécanisme de Brout-Englert-Higgs. Finalement, nous avons présenté une théorie alternative à la théorie de Higgs, à savoir la Technicouleur. Néanmoins, ce travail n'inclut qu'une partie infiniment petite du vaste sujet que constituent les brisures spontanées de symétrie et le mécanisme de Brout-Englert-Higgs. En effet, dans le premier chapitre, nous avons discuté du mécanisme de Brout-Englert-Higgs du modèle standard, qui correspond à un mécanisme de Brout-Englert-Higgs minimal. Il existe d'autres modèles plus compliqué qui font intervenir deux ou plusieurs doublets de Higgs au lieu d'un seul [57].

De même, dans le deuxième chapitre, nous nous sommes concentrés sur la brisure de la symétrie électromagnétique apparaissant dans les supraconducteurs. Or, il existe des théories selon lesquelles d'autres symétries sont brisées dans les supraconducteurs, comme par exemple la symétrie discrète du renversement du temps [58]. De tels supraconducteurs sont appelés des supraconducteurs non-conventionnels, et sont apparus lorsqu'on cherchait à expliquer le phénomène de la supraconductivité à haute température.

Dans la conclusion du troisième chapitre, nous avons déjà mentionné qu'il existe beaucoup d'autres modèles de la théorie de la Technicouleur. Néanmoins, les théories de la Technicouleur ne constituent évidemment pas les seules théories alternatives au mécanisme de Brout-Englert-Higgs. Il y a par exemple de nombreuses théories qui font intervenir une dimension supplémentaire en plus des quatre dimension de l'espace temps [59]. Une des ces théories postule par exemple que les bosons de jauge deviennent massifs en absorbant leur propre cinquième composante [60]. D'autres théories alternatives au mécanisme de Brout-Englert-Higgs font intervenir ce qu'on appelle des non-particules (unparticles) [61]. Dans ces théories, on travaille uniquement avec des champs se trouvant dans leur état fondamental. Dès lors, on travaille avec différents types de vide et non pas avec des particules, d'où le nom de « unparticles ».

Malheureusement, ce travail de fin d'études doit se limiter à une soixantaine de pages, et nous avons donc dû faire une sélection des sujets à discuter. En espérant que le choix de sujets a été intéressant, nous encourageons le lecteur désireux d'approfondir ses connaissances relatives à ces sujets de consulter la bibliographie.

Annexe A

Définitions et notations

Coordonnées co- et contra- variantes :

A un espace vectoriel V muni d'une base $\{e_{(\mu)}\}$ peut être associé un espace dual V^* muni d'une base duale $\{e^{(\mu)}\}$. L'espace dual V^* consiste de toutes les formes linéaires de V . A tout vecteur x peuvent donc être associé deux types de coordonnées : celles dans l'espace V et celles dans l'espace V^* :

$$x = x^\mu e_{(\mu)} \text{ et } x = x_\mu e^{(\mu)} \text{ avec } \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (\text{A.1})$$

Les coordonnées avec l'indice en bas constituent les coordonnées co-variantes, tandis que les coordonnées portant l'indice en haut sont appelées coordonnées contra-variantes. Souvent, on dénote le vecteur x simplement par ses coordonnées x^μ ou x_μ . Les vecteurs portent leur indice « naturellement » en haut [62] :

$$x^\mu = (x^0, \mathbf{x}) \text{ et } x_\mu = (x_0, -\mathbf{x}) \quad (\text{A.2})$$

Les formes portent leur indice naturellement en bas. Un exemple d'une forme est le gradient d'une fonction scalaire $\partial_\mu \phi$:

$$\partial_\mu \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla \right) \phi \text{ et } \partial^\mu \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, -\nabla \right) \phi \quad (\text{A.3})$$

Soit $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = e_\mu e_\nu = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ le tenseur métrique. Alors la relation entre les coordonnées co-variantes et contra-variantes est donnée par :

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \text{ et } x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \quad (\text{A.4})$$

Par conséquent, le produit scalaire entre deux vecteurs x et p est donné par :

$$x \cdot p = x^\mu p_\mu = x^0 p^0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} \quad (\text{A.5})$$

Groupe discret :

Un groupe discret est un groupe dont le nombre d'éléments est dénombrable. Le nombre d'éléments peut être fini ou infini.

Groupe continu :

Un groupe continu est un groupe dont le nombre d'éléments est indénombrable. On désigne par groupe de Lie un groupe continu dont tous les éléments peuvent être écrits comme une combinaison d'un nombre fini d'éléments de ce groupe. Ce nombre fini d'éléments constitue une base de ce groupe. Ces éléments peuvent être écrits sous la forme suivante :

$$S_i = e^{\theta_i I_i} \quad (\text{A.6})$$

où θ_i est un paramètre prenant des valeurs continues. Les I_i sont appelés les générateurs du groupe. Les relations de commutation entre les générateurs forment ce qu'on appelle une algèbre de Lie. Dans ce travail, tous les groupes rencontrés sont des groupes de Lie. Par exemple, le groupe des rotations dans l'espace est un groupe de Lie. La base est formée par les matrices S_x , S_y et S_z qui désignent les rotations autour des trois axes. Les paramètres θ_i désignent les angles de rotation. Une rotation autour d'un axe quelconque peut être décrite comme une combinaison de rotations autour des axes x , y et z .

Champ scalaire :

Un champ scalaire décrit des particules de spin 0. Les excitations d'un champ scalaire réel correspondent à des particules neutres, tandis que les particules chargées constituent les modes d'un champ scalaire complexe.

Champ spinoriel :

Un champ spinoriel décrit les particules de spin 1/2 comme par exemple les électrons. Un spineur de Dirac est un objet à quatre composantes complexes qui possède des lois de transformation différentes de celles d'un vecteur. A un spineur $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T$ peut être associé un spineur adjoint défini par $\bar{\psi} = (\psi_1^*, \psi_2^*, -\psi_3^*, -\psi_4^*) = \psi^\dagger \gamma_0$, où γ_0 est la première matrice de Dirac. Le produit $\bar{\psi}\psi$ se transforme comme un scalaire sous une transformation de Lorentz, tandis que le produit $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ se transforme comme un vecteur. En général, le spineur adjoint décrit les antiparticules.

Champ vectoriel :

Un champ vectoriel décrit des particules de spin 1. En général, les bosons médiateurs des interactions, appelés bosons de jauge, sont décrits par des champs vectoriels. Ainsi, le photon par exemple est décrit par le quadrivecteur $A^\mu = (\Phi, \mathbf{A})$ où Φ est le potentiel électrique et \mathbf{A} le potentiel vecteur.

Composantes levogyres et dextrogyres :

Considérons les opérateurs de projection suivants, appelés opérateurs de chiralité :

$$P_L = \frac{1 - \gamma^5}{2} \text{ et } P_R = \frac{1 + \gamma^5}{2} \text{ avec } \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (\text{A.7})$$

Les composantes levogyres d'un spineur de Dirac ψ sont alors données par $P_L\psi = \psi_L$ et les composantes dextrogyres par $P_R\psi = \psi_R$. Les spineurs ψ_L et ψ_R sont appelés spineurs de Weyl et sont des objets à deux composantes dans la représentation de Weyl. Dans la représentation de Dirac, ce sont des objets à quatre composantes mais dont deux composantes seulement sont indépendantes. Ils sont états propres de l'opérateur γ^5 : $\gamma^5\psi_L = -\psi_L$ et $\gamma^5\psi_R = \psi_R$. Les opérateurs de chiralité peuvent être reliés à l'opérateur d'hélicité pour des particules de masse nulle. Ainsi, le spineur de Weyl ψ_L décrit des particules dont l'impulsion et le spin sont antiparallèles et ψ_R décrit des particules dont le spin et l'impulsion sont parallèles.

Propagateur :

Si un champ est décrit par son équation de mouvement, alors le propagateur de ce champ correspond à la transformée de Fourier de la fonction de Green de l'équation. Par exemple, un champ scalaire massif ϕ est décrit par l'équation de Klein-Gordon :

$$(\square_x + m)\phi = 0 \quad (\text{A.8})$$

La fonction de Green $D(x - y)$ correspond alors à la solution de l'équation suivante :

$$(\square_x + m^2)D(x - y) = -i\delta^{(4)}(x - y) \quad (\text{A.9})$$

Si $\tilde{D}(p)$ correspond à la transformée de Fourier de la fonction de Green, alors cette dernière peut être écrite sous la forme suivante :

$$D(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \tilde{D}(p) \quad (\text{A.10})$$

En remplaçant, l'équation devient :

$$(\square_x + m) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \tilde{D}(p) = -i\delta^{(4)}(x-y) \quad (\text{A.11})$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} (-p^2 + m^2) \tilde{D}(p)}_{\delta^{(4)}(x-y)} = -i\delta^{(4)}(x-y) \quad (\text{A.12})$$

$$\Leftrightarrow (-p^2 + m^2) \tilde{D}(p) = -i \quad (\text{A.13})$$

$$\Leftrightarrow \tilde{D}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2} \quad (\text{A.14})$$

Ainsi, la masse de la particule est donnée par le pôle du propagateur. Prenons encore comme un autre exemple le propagateur d'un champ vectoriel. Dans la quantification de Gupta-Bleuler, le lagrangien d'un champ vectoriel libre s'écrit :

$$L = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (\text{A.15})$$

où λ est une constante arbitraire. Les équations de mouvement sont alors données par :

$$\square A^\nu - (1 - \lambda) \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0 \quad (\text{A.16})$$

La fonction de Green P est alors la solution de l'équation suivante :

$$(\square g_\tau^\mu - (1 - \lambda) \partial^\mu \partial_\tau) P^{\tau\sigma} = -i\delta^{(4)} g^{\mu\sigma} \quad (\text{A.17})$$

Si \tilde{P} est la transformée de Fourier de P , alors dans l'espace réciproque l'équation devient :

$$(p^2 g_\tau^\mu - (1 - \lambda) p^\mu p_\tau) \tilde{P}^{\tau\sigma} = -i g^{\mu\sigma} \quad (\text{A.18})$$

On pose : $\tilde{P}^{\tau\sigma} = A g^{\tau\sigma} + B p^\tau p^\sigma$. En remplaçant cette expression dans l'équation, on trouve :

$$A p^2 g^{\mu\sigma} - A(1 - \lambda) p^\mu p^\sigma + B p^2 (p^\sigma p^\mu) - B(1 - \lambda) p^2 p^\mu p^\sigma = -i g^{\mu\sigma} \quad (\text{A.19})$$

En choisissant $A = \frac{-i}{p^2}$, le premier terme du membre de gauche se simplifie avec le membre de droite. Ensuite, si $p^\mu p^\sigma \neq 0$, l'équation se simplifie à :

$$-A(1 - \lambda) + B p^2 - B p^2 (1 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow -A(1 - \lambda) + B p^2 \lambda = 0 \quad (\text{A.20})$$

Avec $A = \frac{-i}{p^2}$, on trouve $B = -\frac{i}{p^2} \left(\frac{1-\lambda}{\lambda p^2} \right)$. Finalement, le propagateur $\tilde{P}^{\tau\sigma}$ est donné par :

$$\tilde{P}^{\tau\sigma} = -\frac{i}{p^2} \left(g^{\tau\sigma} + \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) \frac{p^\tau p^\sigma}{p^2} \right) \quad (\text{A.21})$$

Le choix $\lambda = 1$ correspond à la jauge de Feynmann. Dans ce travail, nous allons travailler dans la jauge de Landau, qui est donnée par le choix $\lambda = \infty$. Notons encore que dans le cas d'un champ vectoriel massif, il faut encore ajouter un terme de masse $1/2 m^2 A_\mu A^\mu$ au lagrangien. Dans ce cas, le propagateur prend la forme suivante :

$$\tilde{P}^{\tau\sigma} = -\frac{i}{p^2 - m^2} \left(g^{\tau\sigma} - \frac{p^\tau p^\sigma}{m^2} \right) \quad (\text{A.22})$$

Encore une fois, la masse de la particule est donnée par le pôle du propagateur.

Annexe B

Le théorème de Noether

Le théorème de Noether dit qu'à chaque symétrie continue du Lagrangien correspond un courant conservé. Soit une transformation continue que l'on peut écrire sous une forme infinitésimale selon la manière suivante :

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) + ig\alpha T\delta\phi(x) \equiv \phi(x) + \alpha\Delta\phi(x) \quad (\text{B.1})$$

où g correspond à la constante de couplage du groupe, α constitue un paramètre infinitésimal, et T est le générateur du groupe. Pour que les équations d'Euler-Lagrange restent invariantes sous cette transformation, il faut que le lagrangien change au plus d'une quadridivergence [62] :

$$L \rightarrow L + \alpha\partial_\mu J^\mu \equiv L + \alpha\Delta L \quad (\text{B.2})$$

où J^μ correspond à une certaine fonction. Pour une variation $\Delta\phi$ du champ ϕ , la variation du Lagrangien est donnée par [62] :

$$\alpha\Delta L = \frac{\partial L}{\partial\phi}(\alpha\Delta\phi) + \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\partial_\mu(\alpha\Delta\phi) \quad (\text{B.3})$$

$$= \alpha\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta\phi\right) + \alpha\left(\frac{\partial L}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\right)\Delta\phi \quad (\text{B.4})$$

Le deuxième terme s'annule, car l'équation d'Euler-Lagrange doit être vérifiée. En identifiant (B.2) et (B.4), on obtient :

$$\partial_\mu J^\mu - \partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta\phi\right) = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$\Leftrightarrow \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (\text{B.6})$$

$$\text{avec} \quad j^\mu = J^\mu - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta\phi \quad (\text{B.7})$$

Nous avons donc effectivement un courant j^μ conservé. Notons que la conservation du courant est équivalente à dire que la charge Q associée au courant est constante dans le temps. En effet, la charge Q associée au courant j^μ est définie par [62] :

$$Q \equiv \int j^0 d^3x \quad (\text{B.8})$$

Nous avons donc :

$$\frac{dQ}{dt} = \int \partial_0 j^0 d^3x = - \int \partial_i j^i d^3x \quad (\text{B.9})$$

La deuxième égalité est due à la conservation du courant. L'intégrale sur le volume de la divergence du courant peut être transformée en intégrale de surface du courant. Cette surface englobe un volume infini et constitue donc la frontière de l'univers. Le courant est proportionnel au champ ϕ . Or, on suppose que les champs s'annulent à la frontière de l'univers, puisqu'on ne sait pas très bien ce qui se passe avec les champs s'ils sortent de l'univers. Dès lors, l'intégrale sur la surface vaut zéro et par conséquent la charge Q est conservée dans le temps.

Lors d'une brisure explicite de symétrie, le lagrangien change d'un terme qui n'est pas une quadridivergence d'une certaine fonction. La variation du lagrangien est alors de la forme :

$$\delta(L + \ell) = \partial_\mu J^\mu + \delta\ell \tag{B.10}$$

où la variation δL est égale à une quadridivergence $\partial_\mu J^\mu$ et la variation $\delta\ell$ ne peut pas être écrite sous la forme d'une quadridivergence. Dans ce cas, nous voyons que contrairement à une brisure spontanée de symétrie, le courant n'est plus conservé. Néanmoins, si la brisure explicite de symétrie $\delta\ell$ est petite, alors le courant est approximativement conservé.

Annexe C

Le potentiel d'interaction entre deux quarks

Dans la théorie des groupes, les équations (3.45) à (3.47) peuvent être obtenues en utilisant les diagrammes de Young :

$$\square \times \square = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (\text{C.1})$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \times \square = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (\text{C.3})$$

A chaque diagramme de Young, on peut associer deux nombres λ et μ , définis comme suit :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (\text{C.4})$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (\text{C.5})$$

Dans l'exemple ci-dessus, nous avons donc $\lambda = 3$ et $\mu = 2$. λ correspond donc aux nombres de colonnes à une ligne et μ correspond au nombre de colonnes à deux lignes. Pour un simple quark \square nous avons $(\lambda\mu) = (10)$ et pour un antiquark, représenté par deux carrés verticaux, $(\lambda\mu) = (01)$. Un singulet, représenté par trois carrés verticaux, a $(\lambda\mu) = (00)$. La dimension d'une représentation est donnée par la formule suivante [63] :

$$d^{(\lambda,\mu)} = \frac{1}{2}(1 + \lambda)(1 + \mu)(\lambda + \mu + 2) \quad (\text{C.6})$$

Ainsi, la représentation d'un simple quark \square a une dimension $d^{(1,0)} = 3$. En effet, dans la nature, les quarks apparaissent sous la forme d'un triplet de couleur. Souvent, on fait référence à une représentation par sa dimension. Notons que plusieurs diagrammes peuvent donner une même représentation. Ces diagrammes sont alors parfaitement équivalents. Un exemple en sont les diagrammes \square et le premier diagramme du membre de droite de la ligne (C.2), qui correspondent tous les deux à la représentation d'un quark (10).

Le potentiel d'interaction V entre deux quarks est proportionnel à la quantité suivante [63] :

$$V \approx \frac{1}{r} C_i \cdot C_j \text{ avec } C_i \cdot C_j = \sum_{c=1}^8 \frac{\lambda_i^c \lambda_j^c}{2} \quad (\text{C.7})$$

où r est la distance relative entre les deux quarks et les matrices λ^c sont les matrices de Gell-Mann, correspondant aux générateurs du groupe de couleur $SU(3)_C$. Pour déterminer le signe du potentiel d'interaction, il faut donc déterminer les valeurs propres de l'opérateur $C_i \cdot C_j$. Pour un système de deux quarks i et j , les générateurs $C^c = \frac{\lambda^c}{2}$ sont donnés par [63] :

$$C^c = C_i^c + C_j^c \text{ avec } c = 1, \dots, 8 \quad (\text{C.8})$$

où C_i^c correspond au générateur de $SU(3)_C$ s'appliquant à la particule i . En élevant cette expression au carré et en sommant sur c , on trouve :

$$C_i \cdot C_j = \frac{1}{2} (C^2 - C_i^2 - C_j^2) \quad (\text{C.9})$$

où C^2 , C_i^2 et C_j^2 sont les opérateurs de Casimir de la représentation du système formé des deux quarks, et de la représentation des particules i et j respectivement. Pour une représentation $(\lambda\mu)$, les valeurs propres des opérateurs de Casimir sont données par :

$$C^2 \psi_{(\lambda\mu)} = \frac{1}{3} (\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3\lambda + 3\mu) \psi_{(\lambda\mu)} \quad (\text{C.10})$$

Nous renvoyons le lecteur intéressé par une démonstration de cette relation à la page 288 de la référence [63]. Dès lors, les valeurs propres des opérateurs de Casimir de la représentation d'un quark (10) et d'un antiquark (01) sont données par :

$$C_i^2 \psi_{(10)} = \frac{4}{3} \psi_{(10)} \text{ et } C_i^2 \psi_{(01)} = \frac{4}{3} \psi_{(01)} \quad (\text{C.11})$$

La ligne (C.1) nous dit que deux quarks peuvent se combiner en un antitriplet ou en un sextet (20). La valeur propre de l'opérateur de Casimir de la représentation (20) est donnée par :

$$C^2 \psi_{(20)} = \frac{10}{3} \psi_{(20)} \quad (\text{C.12})$$

En utilisant la relation (C.9), selon que les quarks se combinent en un antitriplet ou en un sextet, nous avons que le potentiel est proportionnel à :

$$\langle C_i \cdot C_j \rangle_{(01)} = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \right) = -\frac{2}{3} \quad (\text{C.13})$$

$$\langle C_i \cdot C_j \rangle_{(20)} = \frac{1}{2} \left(\frac{10}{3} - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \right) = \frac{1}{3} \quad (\text{C.14})$$

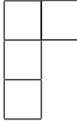
Le potentiel est donc négatif pour une combinaison en un antitriplet, ce qui signifie que la combinaison selon ce mode est attractive. Par contre, le potentiel est positif pour une combinaison en un sextet, et donc la combinaison selon ce dernier mode est répulsive. On peut procéder de la même façon pour trouver les potentiels correspondant aux lignes (C.2)

à (C.3). Les résultats sont repris dans le tableau ci-dessous :

Dimension Diagramme (état final) $\langle C_i \cdot C_j \rangle$

$\bar{3}$		$-\frac{2}{3}$
-----------	---	----------------

6		$\frac{1}{3}$
---	---	---------------

3		$-\frac{2}{3}$
---	---	----------------

$\bar{6}$		$\frac{1}{3}$
-----------	---	---------------

1		$-\frac{4}{3}$
---	---	----------------

8		$\frac{1}{6}$
---	--	---------------

(C.15)

Nous voyons que la combinaison d'un quark et d'un antiquark en un singulet est le mode de condensation le plus favorable d'un point de vue énergétique. Il en résulte que le groupe $SU(3)_C$ n'est pas brisé par la formation d'un condensat de quarks.

Bibliographie

- [1] P.W. Anderson, « Plasmons, Gauge Invariance and Mass », Phys. Rev. **130** (1963) 439.
- [2] P.W. Anderson, « Random-Phase Approximation in the Theory of Superconductivity », Phys. Rev. **112**(1958) 1900.
- [3] F. Englert and R. Brout, « Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons », Phys. Rev. Lett.**13** (1964) 321.
- [4] P.W. Higgs, « Broken symmetries, massless particles and gauge fields », Phys. Rev. Lett. **12** (1964a) 132.
- [5] P.W. Higgs, « Broken symmetries and the masses of gauge bosons », Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 508.
- [6] G.S. Guralnik, C.R. Hagen, and T.W.B. Kibble, « Global conservation laws and massless particles », Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 585.
- [7] A. Das et T. Ferbel, Introduction to nuclear and particle physics (JW : NY, 1994).
- [8] J. Goldstone, A. Salam, S. Weinberg, « Broken Symmetries », Phys. Rev. **3** (1962) 127.
- [9] V. Rubakov, Classical Theory of Gauge Fields (Princeton university press, 2002).
- [10] F. Mandl et G. Shaw, Quantum field theory, 2nd edition 2010 (JW : NY, 2010).
- [11] T.P. Cheng et L.F. Li, Gauge theory of elementary particle physics (Oxford university press, 1984).
- [12] G.J. Gounaris, R. Kögerler, H. Neufeld, « Relationship between longitudinally polarized vector bosons and their unphysical scalar partners », Phys. Rev. D, **34**, (1986) 3257.
- [13] S.F. Noveas, « Standard Model : An Introduction », In *Sao Paulo 1999, Particles and fields* 5-102 [hep-ph/0001283].
- [14] S. Weinberg, The quantum theory of fields volume II : Modern applications (Cambridge university press, 1995).
- [15] D. Perkins, Particle Astrophysics, 2nd edition (Oxford university press, 2009).
- [16] D. Fontaine, « Mélange des saveurs selon le modèle standard »(mémoire présenté à l'université de Liège en 2007).
- [17] H. Kamerlingh Onnes, « Further experiments with liquid helium. C. On the change of electric resistance of pure metals at very low temperatures, etc. IV. The resistance of pure mercury at helium temperatures. », Leiden Comm. **120b** (1911).
- [18] H. Kamerlingh Onnes, « Further experiments with liquid helium. D. On the change of electric resistance of pure metals at very low temperatures, etc. V. The disappearance of the resistance of mercury. », Leiden Comm. **122b** (1911).
- [19] H. Kamerlingh Onnes, « Further experiments with liquid helium. G. On the change of electric resistance of pure metals at very low temperatures, etc. VI. On the sudden change in the rate at which the resistance of mercury disappears. », Leiden Comm. **124c** (1911).

- [20] W. Meissner, R. Ochsenfeld, « Ein neuer Effekt bei Eintritt der Supraleitfähigkeit », *Naturwiss.*, **21** (1933) 787.
- [21] V.L. Ginzburg, L.D. Landau, « To the Theory of Superconductivity », *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **20** (1950) 1064. [This paper is available in English in L.D. Landau, « Collected papers ». Pergamon Press, Oxford, 1965].
- [22] J. Bardeen, L. Cooper, J. Schrieffer, « Theory of Superconductivity », *Phys. Rev.* **108** (1957) 1175.
- [23] S. Weinberg, « Superconductivity for Particular Theorists », *Progress of Theoretical Physics Supplement* **86**(1986) 43.
- [24] C.P. Poole Jr., H.A. Farach, R.J. Creswick, R. Prozorov, Superconductivity 2nd edition (Academic Press, 2007).
- [25] L.P. Gor'kov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **36** (1959) 1918 [Engl. transl. : *Soviet Phys.-JETP* **9** (1959) 1364.
- [26] V.V. Schmidt, P. Müller, A.V. Ustinov (Eds.), The Physics of Superconductors : Introduction to Fundamentals and Applications (Springer, 1997).
- [27] G. Arfken, Mathematical Methods for Physicists 3rd edition (Academic Press, 1985).
- [28] M. Tinkham, Introduction to Superconductivity 2nd edition (Courier Dover Publications, 2004).
- [29] H. Fröhlich, « Theory of the Superconducting State. I. The Ground State at the Absolute Zero of Temperature », **79**(1950) 845.
- [30] S. Blundell, Magnetism in Condensed Matter, (Oxford university press, 2001).
- [31] L.N.Cooper, « Bound Electron Pairs in a Degenerate Fermi Gas », *Phys.Rev.* **104** (1956) 1189.
- [32] C.L. Henley, « Lecture 7.3 BCS theory », [http ://people.ccmr.cornell.edu/ clh/Book-sample/7.3.pdf](http://people.ccmr.cornell.edu/~clh/Book-sample/7.3.pdf), (13.03.2012).
- [33] B.S. Deaver, W.M. Fairbank, « Experimental Evidence for Quantized Flux in Superconducting Cylinders », *Phys. Rev. Lett.* **7** (1961) 43.
- [34] R. Doll, M. Näbauer, « Experimental Proof of Magnetic Flux Quantization in a Superconducting Ring. », *Phys. Rev. Lett.* **7** (1961) 51.
- [35] K. Moriyasu, « Breaking of gauge symmetry : A geometrical view », *Am.J.Phys.* **48** (1980) 200.
- [36] C. Lorcé, « Brisures de symétrie et génération de masse »(mémoire présenté à l'université de Liège en 2004).
- [37] M. Gell-Mann et M. Levy, *Nuovo Cimento* **16** (1960) 53.
- [38] V. Koch, « Introduction to Chiral Symmetry »(1995), arXiv :nucl-th/9512029.
- [39] L. Susskind, « Dynamics of spontaneous symmetry breaking in the Weinberg-Salam theory », *Phys. Rev. D*, **20** (1979) 2619.
- [40] S. Weinberg, « Implications of dynamical symmetry breaking », *Phys. Rev. D* **13** (1976) 974.
- [41] S. Weinberg, « Implications of dynamical symmetry breaking : An addendum », *Phys. Rev. D* **19** (1979) 1277.
- [42] E. Farhi et L. Susskind, « Technicolour », Ref. TH.2975-CERN (1980).

- [43] C.T. Hill et E.H. Simmons, « Strong Dynamics and Electroweak Symmetry Breaking », Phys. Rept. **381** (2003) 235 [Erratum-ibid. **390** (2004) 553].
- [44] P. Sikivie, « An Introduction To Technicolour », Ref. TH.2951-CERN (1980).
- [45] S. Dimopoulos et L. Susskind, « Mass without scalars », Nuclear Physics B **155** (1979) 237.
- [46] E. Eichten et K. Lane, « Dynamical breaking of weak interaction symmetries », Phys. Lett. B **90** (1980) 125.
- [47] S.P. Klevansky, « The Nambu-Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics », Reviews of Modern Physics, **64** (1992) 649.
- [48] K. Lane, « An Introduction To Technicolor », In *Boulder 1993, Proceedings, The building blocks of creation* 381-408, and Boston U. - BU-HEP-94-02 (94,rec.Jan.) 32 p [hep-ph/9401324].
- [49] K. Lane, « Technicolor 2000 », (2000), arXiv :hep-ph/0007304.
- [50] K. Lane, « Technicolor », (1995), arXiv :hep-ph/9501249.
- [51] K. Lane, « Two Lectures on Technicolor », (2002), arXiv :hep-ph/0202255.
- [52] S.L. Glashow, J. Iliopoulos et L. Maiani, « Weak Interactions with Lepton-Hadron Symmetry », **2** (1970) 1285.
- [53] N. Kitazawa, « Tumbling and Technicolor Theory », (1994), arXiv :hep-ph/9401231.
- [54] K. Nakamura et al. (Particle Data Group), J. Phys. G **37**, (2010), 075021.
- [55] F.Pauquay, « Le propagateur du gluon »(mémoire présenté à l'université de Liège en 1999).
- [56] G. Cvetič, « Top quark condensation », Rev. Mod. Phys. **71** (1999) 513.
- [57] I. P. Ivanov, V. Keus et E. Vdovin, « Abelian symmetries in multi-Higgs-doublet models », J. Phys. A **45** (2012) 215201.
I. P. Ivanov et V. Keus, « Frustrated symmetries in multi-Higgs-doublet models », Phys. Lett. B **695** (2011) 459.
A. Degee et I. P. Ivanov, « Higgs masses of the general 2HDM in the Minkowski-space formalism », Phys. Rev. D **81** (2010) 015012.
I. P. Ivanov, « Minkowski space structure of the Higgs potential in 2HDM », Phys. Rev. D **75** (2007) 035001 [Erratum-ibid. D **76** (2007) 039902].
- [58] G.M. Luke *et al.*, « Time-Reversal Symmetry Breaking Superconductivity in Sr_2RuO_4 », arXiv :cond-mat/9808159v1 (1998).
- [59] C. A. Scrucca, M. Serone and L. Silvestrini, « Electroweak symmetry breaking and fermion masses from extra dimensions », Nucl. Phys. B **669** (2003) 128.
C. Csáki, C. Grojean, H. Murayama, L. Pilo et J. Terning, « Gauge Theories on an Interval : Unitarity without a Higgs », arXiv :hep-ph/0305237v1 (2003).
C. Csáki, C. Grojean, L. Pilo et J. Terning, « Towards a Realistic Model of Higgsless Electroweak Symmetry Breaking », Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 10180.
- [60] C. Csáki, C. Grojean, H. Murayama, « Standard Model Higgs from Higher Dimensional Gauge Fields », Phys. Rev. D **67** (2003) 085012.
- [61] D. Stancato, et J. Terning, « The Unhiggs », JHEP **0911** (2009) 101.
X. Calmet, N. G. Deshpande, X. G. He, S. D. H. Hsu, « Invisible Higgs boson, continuous mass fields and unHiggs mechanism », Phys. Rev. D **79** (2009) 055021.

- [62] M.E. Peskin, D.V. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory, Westview Press (1995).
- [63] F. Stancu, Group Theory in Subnuclear Physics, Oxford University Press (1996).