

Faculté des Sciences Appliquées

LE RÔLE DE L'INSTANTON DANS LA
SPECTROSCOPIE DES HADRONS

BERTRAND DELVAUX

Travail de Fin d'Etude en vue de l'obtention du
Grade d'Ingénieur Civil Physicien

Promoteur : Fl.Stancu

Novembre 2003

LE RÔLE DE L'INSTANTON DANS LA SPECTROSCOPIE
DES HADRONS

By
Bertrand Delvaux

SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE
REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF
MASTER OF SCIENCE
AT
DALHOUSIE UNIVERSITY
HALIFAX, NOVA SCOTIA
OCTOBER 2003

© Copyright by Bertrand Delvaux, 2003

DALHOUSIE UNIVERSITY
DEPARTMENT OF
MATHEMATICS STATISTICS AND COMPUTING SCIENCE

The undersigned hereby certify that they have read and recommend to the Faculty of Graduate Studies for acceptance a thesis entitled “**Le rôle de l’instanton dans la spectroscopie des hadrons**” by **Bertrand Delvaux** in partial fulfillment of the requirements for the degree of **Master of Science**.

Dated: October 2003

Supervisor:

Fl. Stancu

Readers:

Keith Johnson

Tony Thompson

DALHOUSIE UNIVERSITY

Date: **October 2003**

Author: **Bertrand Delvaux**

Title: **Le rôle de l'instanton dans la spectroscopie des
hadrons**

Department: **Mathematics Statistics and Computing Science**

Degree: **M.Sc.** Convocation: **February** Year: **2004**

Permission is herewith granted to Dalhousie University to circulate and to have copied for non-commercial purposes, at its discretion, the above title upon the request of individuals or institutions.

Signature of Author

THE AUTHOR RESERVES OTHER PUBLICATION RIGHTS, AND NEITHER THE THESIS NOR EXTENSIVE EXTRACTS FROM IT MAY BE PRINTED OR OTHERWISE REPRODUCED WITHOUT THE AUTHOR'S WRITTEN PERMISSION.

THE AUTHOR ATTESTS THAT PERMISSION HAS BEEN OBTAINED FOR THE USE OF ANY COPYRIGHTED MATERIAL APPEARING IN THIS THESIS (OTHER THAN BRIEF EXCERPTS REQUIRING ONLY PROPER ACKNOWLEDGEMENT IN SCHOLARLY WRITING) AND THAT ALL SUCH USE IS CLEARLY ACKNOWLEDGED.

Table of Contents

Table of Contents	iv
I Introduction	1
II L'instanton en Mécanique Quantique	6
1 Rappels sur le formalisme Lagrangien	8
1.1 Fonction de Lagrange et équations de Lagrange	8
1.2 Fonction de Hamilton et équations canoniques	10
1.2.1 Moments conjugués des coordonnées	10
1.3 Principe de moindre action	12
2 Le Lagrangien de l'électrodynamique	14
2.1 Forme covariante dans l'espace de Minkowski	14
2.2 Forme Euclidienne	17
3 L'effet tunnel	20
3.1 La barrière de potentiel	20
3.1.1 Le problème tel qu'il apparaît en mécanique classique	20
3.1.2 Etude quantique de la barrière de potentiel	21
4 L'étude de l'instanton	25
4.1 Rappels sur la méthode WKB	25
4.2 Mécanique quantique, temps imaginaire, intégrales de chemin	28
4.2.1 Propagateur dans le temps imaginaire	34
4.2.2 Intégrales de chemin dans le temps imaginaire : l'effet tunnel à l'aide de la SCA	36

4.2.3	L'approximation du point de selle	38
4.3	Double puits de potentiel et instantons	41
4.3.1	la solution instanton	41
4.3.2	Le mode zéro	46
4.4	Déterminant de fluctuation	49
4.4.1	Déterminant de l'instanton	50
4.5	Gaz dilué d'instanton	51
4.5.1	Potentiel à double puits	51
4.5.2	potentiel périodique	58
4.6	Exemple de potentiel périodique	60
III Les instantons en QCD		63
5	Topologie du vide et Instantons de Yang-Mills	65
5.1	Formulation Euclidienne des théories YM	65
5.2	Topologie du vide de Yang-Mills	66
5.3	Le groupe d'homotopie	68
5.4	La charge topologique, l'effet tunnel, et le vide- θ	73
IV Conséquences de l'instanton dans la spectroscopie des hadrons		81
6	Les interactions dépendantes du spin induites par les instantons	82
7	Applications à la spectroscopie des hadrons	85
7.1	Introduction	85
7.2	Modèle de quark non-relativiste	86
7.3	Partie anharmonique du potentiel de confinement	88
7.4	Interaction hyperfine	89
7.5	Etats excités N et Δ	91
7.6	Conclusion	93
V Résumé		94
Bibliography		97

Part I

Introduction

Il apparaît que toutes les interactions fondamentales dans la nature sont de type de jauge. La théorie moderne des hadrons - chromodynamique quantique (QCD) - ne fait pas exception. Elle est basée sur l'invariance locale de jauge en rapport avec le groupe de couleur SU(3) faisant intervenir huit gluons de masse nulle. L'idée de l'invariance de jauge, néanmoins, est beaucoup plus vieille ¹ et dérive de l'électrodynamique quantique, qui fut historiquement le premier modèle de champ dans lequel des prédictions fructueuses furent obtenues. Le groupe de jauge dans ce cas est U(1) qui est Abélien. A la fin des années 40, les théoriciens avaient déjà appris à calculer toutes les quantités observables en électrodynamique quantique dans la forme de séries de $\alpha = 1/137$. Les premières étapes en QCD à la fin des années 70 furent aussi réalisées dans le cadre de la théorie des perturbations. Cependant, il devint clair, petit à petit, qu'en contraste avec l'électrodynamique, la physique du quark-gluon n'est pas toujours décrite par la théorie des perturbations. Les phénomènes les plus intéressants - le confinement des quarks colorés donnant lieu à des hadrons sans couleur et la formation du spectre hadronique - sont associés avec des effets non-perturbatifs (i.e., non descriptibles dans le cadre de la théorie des perturbations), ou plutôt, avec la structure compliquée du vide de la QCD, qui est rempli par les fluctuations du champ de gluons.

Maintenant, il est clair que la construction de la "fonction d'onde" complète du vide est un problème très difficile. Il reste encore non résolu. Néanmoins, on en sait déjà beaucoup sur les propriétés fondamentales du vide. Ayant ces informations, on peut faire un nombre de prédictions non-triviales sur le gluonium et d'autres aspects relégués de la phénoménologie des hadrons.

Notons seulement que l'élément principal est l'introduction de plusieurs valeurs moyennes dans le vide. Par exemple, l'intensité des champs de gluons dans le vide est mesurée par la quantité

$$\langle 0 | G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a | 0 \rangle \tag{0.0.1}$$

¹H.Weyl, Z.Phys. **56** 330 (1929)

où $G_{\mu\nu}^a$ est le tenseur du champ de gluons ($a = 1, \dots, 8$ est l'indice couleur). De manière similaire, la valeur du condensat de quarks $\langle 0|\bar{q}q|0\rangle$ est utilisée comme mesure des champs de quarks.

Dans une "théorie finale", si on en construit une telle, il sera possible de calculer tous les éléments de matrice nécessaires dans la phénoménologie sur base du Lagrangien de la QCD. On peut déjà dire que cela requièrra la connaissance des fluctuations non-perturbatives dans le vide physique. Ici, la phénoménologie prend contact avec le développement purement théorique.

En 1975, on découvrit un des plus beaux phénomènes en chromodynamique quantique. Nous parlons des instantons - solutions classiques des équations de champ avec une topologie non-triviale². La beauté des constructions théoriques a attiré l'intérêt de beaucoup de physiciens et mathématiciens. L'importance des instantons comme le premier exemple de fluctuations du champ de gluon non traitable par la théorie des perturbations ne fait pas de doute. En conséquence, bien que l'on puisse difficilement parler de fruits pratiques à ce niveau, il apparaît approprié d'expliquer l'essence physique du phénomène et de dériver les formules de base pour permettre au lecteur de trouver son chemin dans la littérature.

Une des principales conclusions qu'on devrait tenter d'établir est que la solution originale de Belavin-Polyakov-Schwartz-Tyupkin (instanton BPST) n'est pas la fluctuation qui est dominante dans la fonction d'onde du vide. Cependant, il n'y a pas de danger que sa beauté soit perdue. Dans une forme ou une autre, cela joue certainement un rôle dans la théorie des interactions fortes. Cette découverte des instantons a marqué le début d'une nouvelle étape dans la théorie des champs.

L'interprétation de l'instanton comme un effet tunnel entre deux minima voisins

²A.A.Belavin, A.M.Polyakov,A.S.Schwartz et Yu.S.Tyupking,Phys.Lett.**B59** 85 (1975)

est dû à Gribov³. L'énergie potentielle des champs du gluon est une fonction périodique dans une direction particulière et possède donc une succession de minima. Le nom d'instanton a été introduit par 't Hooft⁴. Il signifie le fait que la solution instanton, à part d'avoir une extension finie $\rho \sim \frac{1}{3}\text{fm}$, possède aussi une structure dans le temps (imaginaire). Dans son travail, 't Hooft a étudié plusieurs propriétés essentielles des fluctuations des champs gluoniques. Il a aussi incorporé les fermions (quarks) dans la théorie et a construit ce qu'on appelle le déterminant de de 't Hooft, d'où on peut tirer une interaction quark-quark induite par l'instanton. Cette interaction joue un rôle crucial dans la spectroscopie des baryons.

En plus, 't Hooft a montré que l'instanton joue un rôle aussi important dans la compréhension de l'anomalie axiale, $U_A(1)$. Cela veut dire que si le courant axial est conservé dans une théorie classique, il ne l'est plus dans la QCD, théorie quantique des champs (non-abéliens). Donc, la QCD ne possède pas une symétrie chirale $U_A(1)$. L'absence de symétrie $U_A(1)$ explique en particulier les grandes masses des mésons η et η' et la différence entre les angles de mélange des mésons pseudoscalaires et vectoriels⁵.

La complexité de l'étude d'un tel sujet nous oblige en à nous limiter à quelques aspects dans la description du problème. Dans la partie II, après avoir résumé quelques notions de base (chapitres 1-3), nous examinons l'instanton du point de vue de la mécanique quantique. On se base sur l'approximation semi-classique de Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB) dans sa forme donnée par la méthode de l'intégrale de chemin. Nous donnons l'exemple du double puits de potentiel où la solution instanton s'impose. Nous décrivons le mode zéro, essentiel pour l'instanton et le déterminant de l'instanton. Nous terminons par le modèle simple de gaz dilué d'instantons.

La partie III s'attache à la description de l'instanton du point de vue de la QCD.

³A.Polyakov, Nucl.Phys. **B120** 429 (1977)

⁴G.'t Hooft, Phys.Rev.**D14** 3432 (1976)

⁵G.'t Hooft "The physical Instantons in the Pseudoscalar and Vector Mesons Mixing" hep-th/9903189

Nous montrons que l'instanton est une propriété intrinsèque du vide de la QCD. Pour décrire la topologie complexe du vide de la QCD, nous introduisons quelques notions du groupe d'homotopie, la charge topologique et l'effet du tunnel dans le vide de la QCD.

La partie IV entrevoit les applications de l'interaction effective induite par l'instanton entre des quarks légers. Nous discutons un modèle simple qui reproduit qualitativement bien les spectres des baryons légers.

La dernière partie contient un résumé de nos travaux et donne quelques perspectives.

Part II

**L'instanton en Mécanique
Quantique**

Peu après la découverte des instantons dans les théories de Yang-Mills on s'est rendu compte que les instantons sont aussi associés à la description semi-classique de l'effet tunnel. Nous rappelons dans le chapitre 3 l'effet tunnel pour une barrière carrée où on peut calculer les coefficients de transmission et réflexion exactement. Dans le chapitre 4, nous introduisons l'approximation semi-classique de la mécanique quantique et la méthode de Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB) qui permet d'étudier l'effet tunnel pour une barrière quelconque. Par simplicité, nous considérons partout un problème à une dimension. Ainsi, nous pouvons mieux mettre en évidence les aspects quantiques cruciaux du problème. La physique des instantons en mécanique quantique pourrait aider à mieux comprendre les instantons de la QCD, dont la complexité est augmentée par la topologie et les effets de la théorie des champs. Nous traiterons aussi l'approximation semi-classique par la méthode de l'intégrale de chemin.

Chapter 1

Rappels sur le formalisme

Lagrangien

Nous rappelons ici brièvement les principales propriétés du Lagrangien et de l'Hamiltonien en mécanique classique. Ceci dans le but d'introduire le principe de moindre action, appliqué partout en physique, et en particulier dans ce travail de fin d'étude.

1.1 Fonction de Lagrange et équations de Lagrange

Considérons un système de n particules dans lequel les forces dérivent d'une énergie potentielle, que nous noterons simplement $V(\mathbf{r}_i)$. La *fonction de Lagrange*, ou *lagrangien*, de ce système est la fonction des $6n$ variables $\{x_i, y_i, z_i; \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i; i = 1, 2, \dots, n\}$ donnée par :

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i) = T - V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - V(\mathbf{r}_i) \quad (1.1.1)$$

Les équations du mouvement, sont données par les *équations de Lagrange* :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_i} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_i} &= 0 \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Quel que soit le type de coordonnées utilisées (cartésiennes ou non), les équations de Lagrange gardent la même forme. De nombreux systèmes physiques peuvent être décrits à un instant donné par un ensemble de N paramètres indépendants q_i ($i=1,2,\dots,N$), appelés *coordonnées généralisées* : la connaissance des q_i permet de calculer la position dans l'espace d'un point quelconque du système ; le mouvement de ce système est donc caractérisé par la donnée des N fonctions du temps $q_i(t)$. Les dérivées par rapport au temps $\dot{q}_i(t)$ sont dites *vitesses généralisées*. L'état du système à un instant donné t_0 est donc défini par les $q_i(t_0)$ et $\dot{q}_i(t_0)$. Si les forces agissant sur le système dérivent d'une énergie potentielle $V(q_1, q_2, \dots, q_N)$, le lagrangien $\mathcal{L}(q_1, q_2, \dots, q_N; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N)$ est encore la différence entre l'énergie cinétique totale T et l'énergie potentielle V . Les équations de Lagrange s'écrivent alors

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \tag{1.1.3}$$

où $\frac{d}{dt}$ désigne la *dérivée totale* par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \dot{q}_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^N \ddot{q}_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \tag{1.1.4}$$

Dans le cas général, le lagrangien est fonction des coordonnées q_i et des vitesses \dot{q}_i , et peut également dépendre explicitement du temps.

C'est précisément ce formalisme Hamiltonien qui nous intéresse dans le cadre de la mécanique quantique, et il constitue une base incontournable à la quantification d'un système physique.

1.2 Fonction de Hamilton et équations canoniques

Ici nous introduisons le formalisme Hamiltonien, comme alternative au formalisme Lagrangien. Pour un système physique décrit par N coordonnées généralisées, les équations de Lagrange 1.1.3 constituent un système de N équations différentielles couplées du second ordre, à N fonctions inconnues : les $q_i(t)$. On peut les remplacer par un système de $2N$ équations du premier ordre à $2N$ fonctions inconnues.

1.2.1 Moments conjugués des coordonnées

On définit le moment conjugué p_i de la coordonnée généralisée q_i par la formule :

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (1.2.1)$$

p_i est aussi appelé *impulsion généralisée*. Au lieu de définir l'état du système à un instant t donné par les N coordonnées $q_i(t)$ et les N vitesses $\dot{q}_i(t)$, nous le caractériserons dorénavant par les $2N$ variables :

$$\{q_i(t), p_i(t); i = 1, 2, \dots, N\} \quad (1.2.2)$$

Les quantités (q_i, p_i) sont les variables canoniques. Le passage des variables $(q_i, \dot{q}_i; t)$ aux variables $(q_i, p_i; t)$ se fait à l'aide de la transformation de Lagrange qui introduit le Hamiltonien du système :

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t) = \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t) \quad (1.2.3)$$

Comme \mathcal{L} , \mathcal{H} peut éventuellement dépendre explicitement du temps.

La différentielle totale de la fonction \mathcal{H} :

$$d\mathcal{H} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt \quad (1.2.4)$$

vaut, en tenant compte de 1.2.1 et de 1.2.3 :

$$\begin{aligned} d\mathcal{H} &= \sum_i [p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i] - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \\ &= \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

En identifiant les expressions 1.2.4 et 1.2.5, on voit que le passage des variables $\{q_i, \dot{q}_i\}$ aux variables $\{q_i, p_i\}$ entraîne :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad (1.2.6)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad (1.2.7)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (1.2.8)$$

En utilisant 1.2.1 et 1.2.6, on obtient les équations du mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

qui sont appelées équations canoniques de Hamilton. Comme annoncé, 1.2.9 est un système de $2N$ équations différentielles du premier ordre à $2N$ fonctions inconnues, les $q_i(t)$ et les $p_i(t)$.

1.3 Principe de moindre action

La mécanique classique est basée sur un principe variationnel, le principe de moindre action.

Il est commode d'interpréter les q_i comme les coordonnées d'un point Q dans un espace euclidien R_N à N dimensions ; il y a alors correspondance biunivoque entre les positions du système et les points de R_N . A un mouvement du système est associé un mouvement du point Q dans R_N : ce dernier mouvement est caractérisé par la fonction vectorielle à N dimensions $Q(t)$ dont les composantes sont les $q_i(t)$. Comme dans le cas simple d'une particule se déplaçant à une dimension, on peut représenter le mouvement du point Q , c'est-à-dire celui du système, par le graphe de $Q(t)$, qui est une courbe dans un espace-temps à $(N+1)$ dimensions (l'axe des temps étant rajouté aux N dimensions de R_N). Cette courbe permet de caractériser le mouvement considéré.

On peut se fixer les $q_i(t)$ de façon arbitraire, ce qui donne au point Q et au système un mouvement quelconque. Mais leur évolution réelle est déterminée par les conditions initiales et les équations du mouvement. Supposons que l'on sache que, au cours du mouvement réel, Q se trouve en Q_1 à l'instant t_1 et en Q_2 à un instant ultérieur t_2 .

Il existe a priori une infinité de mouvements possibles qui satisfont ces conditions : ils sont représentés par toutes les courbes, ou *chemins d'espace-temps*, qui joignent les points (Q_1, t_1) et (Q_2, t_2) .

Considérons un tel chemin d'espace-temps Γ . Si :

$$\mathcal{L}(q_1, q_2, \dots, q_N; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N; t) \equiv \mathcal{L}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}; t) \quad (1.3.1)$$

est le lagrangien du système étudié, l'action S_Γ correspondant au chemin Γ est par

définition :

$$S_\Gamma = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}[\mathbf{Q}_\Gamma(t), \dot{\mathbf{Q}}_\Gamma(t); t] \quad (1.3.2)$$

Le *principe de moindre action* s'énonce alors comme suit : parmi tous les chemins d'espace-temps joignant (Q_1, t_1) à (Q_2, t_2) , celui qui est effectivement suivi est celui dont l'action est minimale. Autrement dit, lorsqu'on passe du chemin effectivement suivi à un chemin infiniment voisin, l'action ne varie pas au premier ordre.

Chapter 2

Le Lagrangien de l'électrodynamique

Dans ce chapitre, nous faisons un bref rappel de quelques notions de l'électromagnétisme et d'électrodynamique quantique utiles pour la compréhension de ce travail de fin d'étude. Nous donnerons la forme de l'action dans l'espace de Minkowski et d'Euclide à 4-D.

2.1 Forme covariante dans l'espace de Minkowski

Dans l'espace-temps, un quadrivecteur contravariant s'écrit comme

$$x^\mu = (t, \vec{x}) \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (c = 1) \quad (2.1.1)$$

et nous utilisons le tenseur métrique

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; \quad g^\nu_\mu = \delta^\nu_\mu \quad (2.1.2)$$

pour passer à la forme covariante et inversément

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (t, -\vec{x}) \quad (2.1.3)$$

Les dérivées en forme covariantes et contravariantes sont

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \text{et} \quad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad (2.1.4)$$

Dans la même notation, les composantes du courant sont

$$j^\mu = (\rho, \vec{j}) \quad (2.1.5)$$

Le tenseur du champs électromagnétique, ayant la propriété d'être antisymétrique, s'écrit en fonction des composantes des champs \vec{E} et \vec{B} comme

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1.6)$$

Le tenseur de Levi-Civita $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ à 4 indices est une généralisation de celui à 3 indices : il est égal à +1 si $\mu\nu\rho\sigma$ est une permutation paire de 0, 1, 2, 3 et -1 si $\mu\nu\rho\sigma$ est une permutation impaire. Ce tenseur sert à transformer $F^{\mu\nu}$ en son dual défini comme

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = -\tilde{F}^{\nu\mu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1.7)$$

On peut voir que \tilde{F} s'obtient de F par la substitution $E \rightarrow B$, $B \rightarrow -E$. Donc, $\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\tilde{F}_{\rho\sigma} = -F^{\mu\nu}$.

Maintenant, il convient d'introduire le quadripotentiel

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}) = (A^0, \vec{A}) \quad (2.1.8)$$

et tenant compte des définitions de \vec{E} et \vec{B} en fonction de A_μ

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}A^0 - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (2.1.9)$$

on peut réécrire le tenseur $F^{\mu\nu}$ comme

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (2.1.10)$$

ou

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.1.11)$$

A partir de $F_{\mu\nu}$ on peut construire les invariants relativistes et en particulier la densité lagrangienne du champs électromagnétique

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \quad (2.1.12)$$

et l'action s'écrit

$$S = \int \mathcal{L}d^4x = \frac{1}{2} \int (\vec{E}^2 - \vec{B}^2)dx^0d^3x \quad (2.1.13)$$

Pour passer à la QED, il faut ajouter les fermions chargés électriquement et décrits par les champs ψ . Nous nous trouvons alors dans le cadre d'une théorie de jauge abélienne. La transformation de jauge est

$$U = e^{ia(x)} \quad (2.1.14)$$

et la densité *covariante* est donnée par

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu \quad (2.1.15)$$

à condition que le champ de jauge A_μ se transforme comme

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu a(x) \quad (2.1.16)$$

Avec l'ajout des fermions, la densité du Lagrangien, invariante de jauge et naturellement, comme discuté avant, invariante relativiste, s'écrit

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (2.1.17)$$

où m est la masse du fermion, et $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$. De ce Lagrangien, on peut dériver soit l'équation de Dirac, soit les équations de Maxwell, en utilisant les équations de Lagrange (ch. 1).

2.2 Forme Euclidienne

Comme nous verrons, la forme Euclidienne de la densité du Lagrangien est indispensable pour obtenir la solution instanton. L'espace Euclidien à 4-D s'obtient de l'espace de Minkowski en prenant

$$x_0 = -ix_4 \quad (2.2.1)$$

Donc,

$$\partial^0 = \frac{\partial}{\partial x_0} = -\frac{1}{i\partial x_4} = \frac{i}{\partial x_4} = i\partial_4 \quad (2.2.2)$$

Si l'on met

$$\partial_0 = \partial^0 = i\partial_4 \quad , \quad A^0 = A_0 = -iA_4 \quad (2.2.3)$$

la condition de Lorentz dans l'espace de Minkowski

$$\partial_\mu A^\mu = \partial_0 A^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (2.2.4)$$

devient

$$\partial_4 A_4 + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (2.2.5)$$

Le champ magnétique \vec{B} implique seulement l'espace Euclidien à 3-D et donc ne change pas

$$\vec{B} = (\vec{B})_{\text{Eucl}} \quad (2.2.6)$$

Par contre, le champs électrique change. On a par exemple

$$E_1 = F_{10} = \frac{\partial}{\partial x^1} A_0 - \frac{\partial}{\partial x_0} A_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1} (-iA_4) - i\frac{\partial}{\partial x_4} A_1 = i\left(\frac{\partial}{\partial x_1} A_4 - \frac{\partial}{\partial x_4} A_1\right) \quad (2.2.7)$$

Si en général, nous notons

$$(E_i)_{\text{Eucl}} = \frac{\partial}{\partial x_i} A_4 - \frac{\partial}{\partial x_4} A_i \quad (2.2.8)$$

on a

$$\vec{E} = i(\vec{E})_{\text{Eucl}} \quad (2.2.9)$$

En prenant dans l'éq. (2.1.13)

$$x^0 \rightarrow -ix_4 \quad , \quad \vec{E} \rightarrow i\vec{E} \quad (2.2.10)$$

on peut déduire la forme Euclidienne S_E de l'action

$$S = \frac{1}{2} \int (-\vec{E}^2 - \vec{B}^2)(-i)dx^4d^3x = iS_E \quad (2.2.11)$$

donc

$$S_E = \frac{1}{2} \int (\vec{E}^2 + \vec{B}^2)d^4x \quad (2.2.12)$$

dans la métrique d'Euclide à 4-D.

L'extension de la formulation Euclidienne d'une théorie abélienne à une théorie non abélienne est donnée au début du chapitre 5. Comme ici, la discussion sera restreinte aux champs de bosons (photons en QED, bosons intermédiaires pour les interactions faibles, gluons en QCD) et nous ne discuterons pas les champs de fermions.

Chapter 3

L'effet tunnel

Pour introduire cette notion très importante en mécanique quantique qu'est l'effet tunnel, nous donnerons l'exemple simplifié d'une particule se trouvant en présence d'une barrière de potentiel de type rectangulaire. Le problème est exactement soluble dans ce cas, ce qui facilite sa compréhension.

3.1 La barrière de potentiel

3.1.1 Le problème tel qu'il apparaît en mécanique classique

Nous étudions un mouvement à une seule dimension ; une particule, de masse m se déplace de gauche à droite dans un potentiel rectangulaire tel que :

$$V = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ V_0 & 0 < x < a \\ 0 & x \geq a \end{cases} \quad (3.1.1)$$

L'énergie de la particule est E . Nous supposons par exemple qu'elle est inférieure

à V_0 .

En mécanique classique, la particule est repoussée (réfléchie) si $E < V_0$. Si $E > V_0$, la particule passe librement (transmission) au-delà de $x > a$. En mécanique quantique, la situation est différente, justement dû à l'effet tunnel.

3.1.2 Etude quantique de la barrière de potentiel

Comme dans le cas classique, nous considérons que la particule vient de la région des x négatifs. Elle est alors réfléchie et/ou transmise par la barrière. Nous verrons que, dans le problème quantique, la réflexion, et la transmission se produisent avec une certaine probabilité pour toute énergie de la particule. Cela permet d'introduire un coefficient de réflexion R et un coefficient de transmission T .

Comportement asymptotique

D'abord, nous considérons une particule qui vient de la gauche avec une énergie $E > 0$. Elle peut être renvoyée par la barrière de potentiel ou pénétrer à travers. Donc, le comportement asymptotique est le suivant : pour $x < 0$, nous voulons une fonction d'onde pour représenter une particule se déplaçant vers la gauche (particule réfléchie) ainsi que vers la droite (particule incidente) ; pour $x > a$, nous voulons que la fonction d'onde représente uniquement une particule se déplaçant vers la droite (particule transmise).

Une particule dans une région où elle n'est pas soumise à une force, qui se déplace dans une direction déterminée, avec une énergie finie, a nécessairement un impulsion bien définie et en conséquence peut être représentée par une fonction propre unidimensionnelle $u(x) \propto e^{ipx/\hbar}$ si la particule se déplace dans la direction des x positifs avec une impulsion p , et $u(x) \propto e^{-ipx/\hbar}$ si la particule se déplace dans le sens des x

négatifs avec la même énergie. Donc, vu que l'équation d'onde dans les régions où $V(x) = 0$ est

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dx^2} = Eu \quad (3.1.1)$$

nos solutions asymptotiques sont

$$\begin{aligned} u(x) &= Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x \leq 0 \\ u(x) &= Ce^{ikx} & x \geq a \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

où $k = p/\hbar = +(2mE/\hbar^2)^{\frac{1}{2}}$ est le nombre d'onde. Les solutions (3.1.2) sont appropriées pour les régions où aucune force n'est exercée.

Normalisation

La signification physique des coefficients A, B et C peuvent être compris en remplaçant (3.1.2) dans la forme unidimensionnelle de la densité de courant de probabilité $S(x) = \frac{\hbar}{2im} (\psi^* \frac{d\psi}{dx} - \psi \frac{d\psi^*}{dx})$. Cela donne :

$$S(x) = v(|A|^2 - |B|^2) \quad x < 0 \quad (3.1.3)$$

$$S(x) = v|C|^2 \quad x > a \quad (3.1.4)$$

où $v = \hbar k/m$ est la vitesse de la particule associée au nombre d'onde k . Etant donné que ces expressions sont indépendantes de x , on peut montrer qu'elles peuvent être interprétées comme le flux net (positif vers la droite) à travers les deux régions. Cette interprétation est cohérente avec l'interprétation de A, B et C comme amplitudes des fonctions d'ondes incidentes, réfléchies et transmises.

La normalisation absolue des fonctions d'onde (3.1.2) n'est pas importante pour ce problème ; c'est parce que nous ne sommes intéressés que dans les rapports $|B|^2/|A|^2$ et $|C|^2/|A|^2$, qui sont les coefficients de réflexion R et de transmission T par la barrière.

Les coefficients R et T

A l'intérieur de la barrière de potentiel, le caractère de la solution à dépend de la valeur de E par rapport à V_0 . Supposons tout d'abord que $E > V_0$, de sorte que nous pouvons définir un nombre d'onde à l'intérieur de la barrière : $\alpha = [2m(E - V_0)/\hbar^2]^{\frac{1}{2}}$. Alors la solution à l'intérieur vaut

$$u(x) = Fe^{i\alpha x} + Ge^{-i\alpha x} \quad 0 \leq x \leq a \quad (3.1.5)$$

La continuité de u et du/dx en $x = 0$ et $x = a$ requise par les conditions aux frontières fournit quatre relations entre les cinq coefficients. Nous pouvons éliminer F et G et trouver les rapports B/A et C/A .

$$\begin{aligned} \frac{B}{A} &= \frac{(k^2 - \alpha^2)(1 - e^{2i\alpha a})}{(k + \alpha)^2 - (k - \alpha)^2 e^{2i\alpha a}} \\ \frac{C}{A} &= \frac{4k\alpha e^{i(\alpha - k)a}}{(k + \alpha)^2 - (k - \alpha)^2 e^{2i\alpha a}} \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Les carrés des modules des rapports (3.1.6) sont les coefficients de réflexion et de transmission

$$\begin{aligned} R &= \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \left[1 + \frac{4k^2\alpha^2}{(k^2 - \alpha^2)^2 \sin^2 \alpha a} \right]^{-1} = \left[1 + \frac{4E(E - V_0)}{V_0^2 \sin^2 \alpha a} \right]^{-1} \\ T &= \left| \frac{C}{A} \right|^2 = \left[1 + \frac{(k^2 - \alpha^2)^2 \sin^2 \alpha a}{4k^2\alpha^2} \right]^{-1} = \left[1 + \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha a}{4E(E - V_0)} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

On peut vite s'assurer de (3.1.7) que $|B/A|^2 + |C/A|^2 = 1$ comme attendu.

Les équations (3.1.7) montrent que le coefficient de transmission approche

$$\left(1 + \frac{mV_0 a^2}{2\hbar^2} \right)^{-1} \quad (3.1.8)$$

quand l'énergie de la particule approche l'énergie du sommet de la barrière ($E \rightarrow V_0$). Cela montre que pour une barrière très haute (V_0 grand) ou très large (a grand), $T \rightarrow 0$, i.e. on retourne au régime de la mécanique classique. Quand l'énergie E augmente ($E > V_0$), le coefficient de transmission oscille en augmentant de manière stable vers l'unité. Il y a transmission parfaite lorsque $\alpha a = \pi, 2\pi, \dots$, ce qui signifie, quand la barrière contient un nombre entier de demi longueurs d'onde.

Dans le cas où $0 < E < V_0$, le coefficient de transmission peut s'obtenir de (3.1.6), en remplaçant α par $i\beta$, avec

$$\beta = \left[\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.1.9)$$

Le résultat pour le coefficient de transmission est

$$T = \left| \frac{C}{A} \right|^2 = \left[1 + \frac{V_0^2 \sinh^2 \beta \alpha}{4E(V_0 - E)} \right]^{-1} \quad (3.1.10)$$

qui décroît de manière monotone de la valeur (3.1.8) quand E descend en-dessous de V_0 . Ce comportement se nomme *effet tunnel* à travers la barrière.

Dans la section suivante, la barrière présente une forme quelconque et le problème n'est plus exactement soluble. Dans ce cas, nous devons utiliser l'approximation semi-classique de WKB.

Chapter 4

L'étude de l'instanton

4.1 Rappels sur la méthode WKB

Nous rappelons ici quelques aspects basiques développés dans l'approximation semi-classique, dans la forme développée par Wenzel, Kramers et Brillouin (WKB).

La méthode WKB génère des solutions approximatives à l'équation de Schrödinger pour les fonctions d'onde qui ont une longueur d'onde λ petite en comparaison avec les variations spatiales du potentiel. Cette situation correspond à la limite semi-classique, i.e. pour $\hbar \rightarrow 0$ où

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} \rightarrow 0 \tag{4.1.1}$$

Les structures macroscopiques, par exemple, suivent en principe le comportement dicté par la Mécanique Classique car leur fonction d'onde varie extrêmement rapidement en comparaison avec les variations du potentiel sous-jacent, ou d'autre longueur caractéristique du problème, même si elles sont d'origine microscopique.

Pour mettre en oeuvre l'approximation semi-classique, on écrit la méthode WKB la fonction d'onde comme :

$$\psi(x) = e^{i\Phi(x)/\hbar} \quad (4.1.2)$$

Insérant 4.1.2 dans l'équation de Schrödinger

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) - E\right]\psi(x) = 0 \quad (4.1.3)$$

on obtient l'équation de base de la méthode WKB :

$$\frac{1}{2m} \Phi'^2(x) - \frac{i\hbar}{2m} \Phi''(x) = E - V(x) \quad (4.1.4)$$

Cette équation différentielle non-linéaire peut être résolue de manière itérative. On développe

$$\Phi(x) = \Phi_0(x) + \hbar\Phi_1(x) + \hbar^2\Phi_2(x) + \dots \quad (4.1.5)$$

et on égale les termes du même ordre de \hbar des deux côtés. Pour chaque puissance de \hbar il correspond donc une équation WKB. L'équation de l'ordre zéro a pour solution

$$\Phi_0(x) = \pm \int^x dx' p(x') \quad \text{avec} \quad p(x) \equiv \sqrt{2m[E - V(x)]} \quad (4.1.6)$$

où $p(x)$ est l'impulsion de la particule dans un potentiel constant $U_x = \text{const}$ dont la valeur vaut celle de V en x . Si $V(x)$ varie lentement comparé à $\psi(x)$, ψ est en fait égal localement au potentiel U_x et la solution d'ordre zéro

$$\psi_0(x) = e^{i/\hbar \int^x dx' \sqrt{2m[E - V(x')]} } \quad (4.1.7)$$

devient une approximation très utile. En la réinsérant dans l'équation de Schrödinger, on obtient:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) - E\right]\psi_0(x) = -\frac{i\hbar}{2} \frac{V'(x)\psi_0(x)}{\sqrt{2m[E - V(x)]}} \quad (4.1.8)$$

On confirme que c'est une solution (au terme de correction près), qui se trouve dans le membre de droite, qui est en fait $\mathcal{O}(\hbar)$ et proportionnel à la variation V' du potentiel.

La qualité de l'approximation de l'ordre zéro peut être mesurée plus systématiquement en testant si le terme négligé dans 4.1.4 est petit, c'est-à-dire si

$$\left| \frac{\frac{i\hbar}{2m} \Phi''}{\frac{1}{2m} \Phi'^2} \right| = \left| \hbar \frac{\Phi''}{\Phi'^2} \right| = \left| \frac{d}{dx} \frac{\hbar}{\Phi'} \right| \ll 1 \quad (4.1.9)$$

Avec $\lambda(x) \equiv 2\pi\hbar/p(x) = 2\pi\hbar/\Phi'_0$ et avec $\Phi'_0 \sim \Phi'$ (au premier ordre), cela devient :

$$\frac{1}{2\pi} \left| \frac{d\lambda}{dx} \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\frac{d\lambda}{dx} \cdot \lambda}{\lambda} \right| \equiv \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\delta\lambda}{\lambda} \right| \ll 1 \quad (4.1.10)$$

où $\delta\lambda$ est la variation de λ sur la distance d'une longueur d'onde. De l'inégalité ci-dessus, nous apprenons que le développement semi-classique est applicable dans les régions de l'espace où la longueur d'onde de De Broglie est petite comparée aux variations typiques du potentiel (en conséquence, les états très excités se comportent de plus en plus classiquement) et où il n'y a que de petits changements sur des distances de l'ordre de la longueur d'onde.

Le traitement semi-classique de l'effet tunnel implique une étape caractéristique supplémentaire, sachant que l'effet Tunnel se produit dans des potentiels pourvus de régions classiquement interdites, i.e. des régions $x \in [x_l, x_u]$ où $E < V(x)$. Les frontières x_l, x_u sont les points critiques classiques. A l'intérieur des régions interdites classiquement, $p(x)$ devient imaginaire et la solution 4.1.7 décroît exponentiellement comme

$$\psi_{0,tunnel}(x) = e^{-1/\hbar \int_{x_l}^{x_u} dx' \sqrt{2m[V(x')-E]}} \quad (4.1.11)$$

Une comparaison des deux solutions 4.1.7 et 4.1.11 montre que, formellement, la signification des régions interdites et autorisées peut être interchangée par le remplacement

$$t \rightarrow -i\tau \quad \Rightarrow \quad E \rightarrow iE, \quad V \rightarrow iV \quad (4.1.12)$$

qui transforme en fait 4.1.7 en amplitude tunnel décrite par 4.1.11. En d'autres termes, on peut calculer les amplitudes de l'effet tunnel en SCA (Approche Semi-Classique) par les méthodes standards WKB, tout en faisant un prolongement analytique au temps imaginaire.

4.2 Mécanique quantique, temps imaginaire, intégrales de chemin

En mécanique quantique, la quantité qui contient toutes les informations sur le système, est l'élément de matrice de l'opérateur d'évolution temporel

$$\langle x_f | e^{-iHT/\hbar} | x_i \rangle \quad (4.2.1)$$

Cette quantité représente la probabilité que la particule se propage de

$$x_i \quad \text{en} \quad t = -\frac{T}{2} \quad \text{à} \quad x_f \quad \text{en} \quad t = \frac{T}{2} \quad (4.2.2)$$

Etudions le mouvement à une dimension d'une particule sans spin évoluant dans un potentiel $V(x)$. Nous allons résoudre ce problème d'une manière inhabituelle, mais

cette méthode sera fort utile par la suite, puisqu'elle peut être généralisée à la théorie des champs.

Prenons une masse unitaire $m = 1$, de sorte que la forme du Lagrangien vaut :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) \quad (4.2.3)$$

Prenons comme conditions aux limites :

$$\begin{aligned} x\left(-\frac{T}{2}\right) &= x_i \\ x\left(+\frac{T}{2}\right) &= x_f \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Une méthode élégante d'étudier l'amplitude de transition de ce processus, est de prendre la somme sur tous les chemins joignant les points $(-T/2, x_i)$ et $(+T/2, x_f)$, pondéré par

$$e^{i(S)} \quad (4.2.5)$$

où l'action, dénotée par S , est reliée au Lagrangien par la relation :

$$S = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} dt \mathcal{L}(x, \dot{x}) \quad (4.2.6)$$

Ecrire donc sous la forme d'une intégrale de chemin, l'amplitude de transition vaut :

$$\langle x_f, \frac{T}{2} | x_i, -\frac{T}{2} \rangle = \langle x_f, 0 | e^{-iHt_0} | x_i, 0 \rangle = N \int [Dx] e^{iS(x(t))} \quad (4.2.7)$$

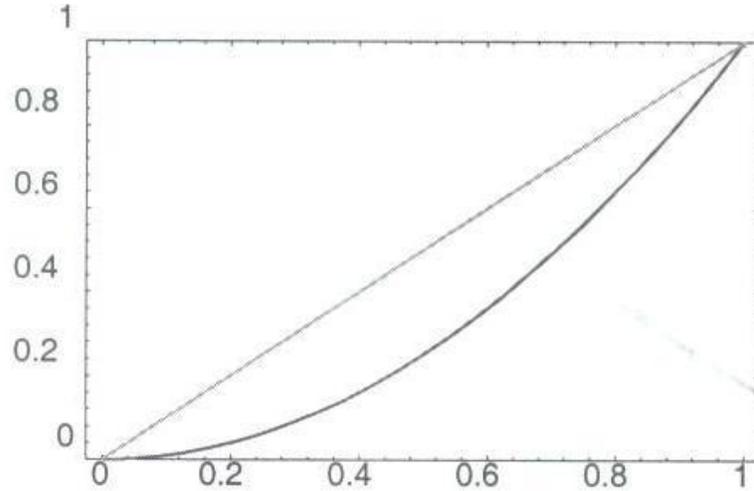


Figure 4.1: Les deux chemins de $(x, t) = (0, 0)$ à $(1, 1)$ dont l'action est comparée

où H est l'Hamiltonien et $\exp(-iHt_0)$ est l'opérateur d'évolution du système. Le facteur N dans le membre de droite est un facteur de normalisation. Dans la discrétisation de la coordonnée du temps (formule de Trotter) par intervalles Δt de sorte que $t_n = n\Delta t$, la mesure $[Dx]$ s'écrit

$$D[x] := \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{mN}{2\pi i \hbar t}\right)^{1/2} \prod_{n=1}^{N-1} \left(\frac{mN}{2\pi i \hbar t}\right)^{1/2} dx_n \quad (4.2.8)$$

où $x_n = x(t_n)$.

A la limite semi-classique, i.e. pour $\hbar \rightarrow 0$, l'action classique peut devenir beaucoup plus grande que \hbar . Comme conséquence, l'intégrale de chemin est dominée par les chemins dans le voisinage des points stationnaires $x_{cl}(t)$ de l'action (s'ils existent), ce qui satisfait

$$\frac{-\delta}{\delta x(t)} S[x] = m\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (4.2.9)$$

avec les conditions aux limites

$$x_{cl}\left(-\frac{T}{2}\right) = x_i, \quad x_{cl}\left(\frac{T}{2}\right) = x_f \quad (4.2.10)$$

Ces chemins classiques sont importants non parce qu'ils donnent eux-mêmes des contributions dominantes à l'intégrale (en fait, leurs contributions s'annulent vu que l'ensemble des chemins classiques est de mesure zéro) mais plutôt car l'action des chemins voisins varie le moins autour d'eux. Donc, une infinité de chemins voisins, qui se trouvent dans la "région de cohérence" avec des facteurs de phase $\exp(iS/\hbar)$ similaires, s'additionnent de manière cohérente. Pour les chemins en-dehors de la région de cohérence, les phases varient si rapidement que les contributions des chemins voisins interfèrent de manière destructive et deviennent sans importance dans l'intégrale de chemin. Cela explique de manière intuitive l'importance des chemins classiques en mécanique quantique.

Pour avoir une idée plus quantitative de la région de cohérence, définissons-la approximativement comme étant l'ensemble des chemins dont la phase diffère de moins de π de la phase du chemin classique (la "phase stationnaire"), ce qui implique

$$\delta S[x] = S[x] - S[x_{cl}] \leq \pi \hbar \quad (4.2.11)$$

Donc, pour une particule macroscopique avec

$$S \simeq 1 \text{ erg sec} \simeq 10^{27} \hbar \quad (4.2.12)$$

seul un voisinage extrêmement proche du chemin classique contribue, vu que $\delta\phi = \delta S/\hbar$ est très sensible aux variations du chemin. Un exemple numérique rend ceci plus explicite : deux alternatives de chemins de $(x, t) = (0, 0)$ à $(x, t) = (1 \text{ cm}, 1 \text{ s})$ (voir Fig. 4.1) pour une particule libre: le chemin classique $x_{cl}(t) = t$ avec $S[x_{cl}] = \int_0^t dt (m/2) v[x_{cl}]^2 = m \text{ cm}^2 / (2 \text{ sec})$ et le chemin alternatif $x_{alt}(t) = t^2$ avec $S[x_{alt}] = 2m \text{ cm}^2 / (3 \text{ sec})$. Pour une particule classique avec

$$m = 1 \text{ g} \Rightarrow \delta S = S[x_{alt}] - S[x_{cl}] = \frac{m \text{ cm}^2}{6 \text{ sec}^2} \simeq 1.6 \times 10^{26} \hbar \Rightarrow \delta\phi \simeq 1.6 \times 10^{26} \text{ rad} \gg \pi$$

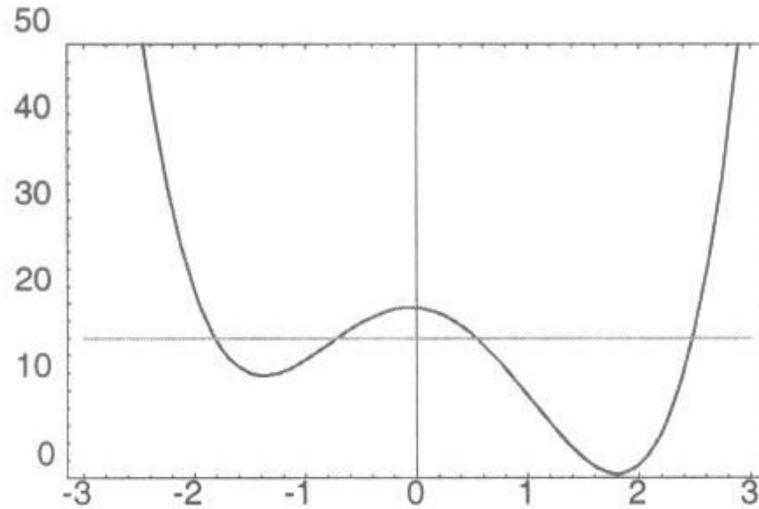


Figure 4.2: Un potentiel typique d'effet tunnel avec minima non-dégénérés. L'énergie totale (ligne horizontale) est plus petite que la bosse, de sorte qu'il existe une région classiquement interdite

(4.2.13)

le chemin alternatif est extrêmement incohérent et donc sans signification, alors que pour un électron avec

$$m = 10^{-27} \text{g} \Rightarrow \delta S \simeq \frac{1}{6} \hbar \Rightarrow \delta \phi \simeq \frac{1}{6} \text{rad} \ll \pi \quad (4.2.14)$$

c'est bien à l'intérieur de la région de cohérence et cela apporte une importante contribution à l'intégrale de chemin.

Visiblement, donc, le mouvement d'un électron libre (même très rapide) ne peut être décrit de manière classique. On doit avoir recours à la mécanique quantique où le chemin de l'électron est beaucoup plus incertain et, en fait, n'est pas une observable. D'autre part, il existe aussi des situations microscopiques où les fluctuations quantiques ne détruisent pas totalement les résultats classiques et qui peuvent,

par conséquent, être traités de manière semi-classique. Comme exemple typique, on trouve la diffusion sur un potentiel qui varie lentement vu les états très excités dans les atomes.

Cependant, l'approximation de la phase stationnaire ne parvient pas à décrire l'effet tunnel. La raison en est que de tels processus sont caractérisés par des potentiels avec une région (ou barrière) "classiquement" interdite qui ne peut être transgressée par des particules classiques. En d'autres termes, il n'existe pas de solution classique de (4.2.9) avec des conditions aux frontières correspondant à la pénétration de la barrière dans un potentiel du type montré dans Fig. 4.2. En conséquence, l'action $S[x]$ n'a pas d'extremum avec des conditions aux frontières de type effet tunnel, et donc, l'intégrale de chemin (4.2.5) n'a pas de point stationnaire.

Cela signifie-t-il que la SCA devient irréalisable pour l'effet tunnel? Heureusement non, naturellement, comme le montre l'approximation standard WKB. Le problème est particulier à l'approximation de la phase stationnaire dans le cadre de l'intégrale de chemin, qui en fait, cesse d'exister. La façon la plus directe de surmonter ce problème serait de généraliser l'approximation familière du point de selle pour des intégrales ordinaires. Cette méthode fonctionne en déformant le chemin d'intégration dans le plan complexe de sorte qu'il passe par les pôles de l'exposant de l'intégrand. Etant donné qu'il existe en fait des solutions complexes des équations combinées (4.2.9) et (4.2.10) dans les potentiels de type effet tunnel (en d'autres termes, l'action complexe obéit toujours à l'équation de Hamilton-Jacobi), une généralisation de la méthode du pôle complexe aux intégrales sur des chemins complexes semblerait naturelle. Mais malheureusement, l'intégration sur des chemins complexes n'a pas été suffisamment développée.

Néanmoins, dans beaucoup de cas - incluant notre problème d'effet tunnel - un

prolongement analytique de l'intégrale de chemin au temps imaginaire, comme rencontré précédemment dans le cadre de la WKB, sert les mêmes objectifs. C'est la façon dont nous allons appliquer la SCA à l'effet tunnel dans les sections suivantes.

4.2.1 Propagateur dans le temps imaginaire

Comme nous venons de le mentionner, les chemins qui forment la base de la SCA pour l'effet tunnel dans le cadre de la méthode de l'intégrale de chemin peuvent être identifiés par le prolongement analytique au temps imaginaire.

Afin de se préparer à l'utilisation de cette approche, voyons d'abord comment obtenir l'énergie de l'état fondamental et la fonction d'onde dans les situations d'effet tunnel, sur base de l'élément de matrice

$$Z(x_f, x_i) = \langle x_f | e^{-HT_E/\hbar} | x_i \rangle \quad (4.2.1)$$

obtenu de (4.2.3) en prolongeant analytiquement

$$t \rightarrow i\tau \quad (\Rightarrow T \rightarrow -iT_E) \quad (4.2.2)$$

Cette procédure (ensemble avec sa contrepartie $p_0 \rightarrow ip_4$ dans l'espace des impulsions) est souvent appelée une "rotation de Wick". (Soit dit en passant, notons que l'opérateur d'évolution imaginaire du "temps" généré par $e^{-HT_E/\hbar}$ n'est pas unitaire et ne conserve donc pas la probabilité. Il faut aussi rappeler que l'élément de matrice (4.2.1) joue un rôle fondamental en mécanique statistique (sa trace sur l'espace des états, correspondant à la somme sur tous les chemins périodiques, est la fonction de partition))

L'élément de matrice $Z(x_f, x_i)$ s'écrit (dorénavant, nous omettrons l'indice E de T_E)

$$Z(x_f, x_i) = \sum_n e^{-E_n T/\hbar} \langle x_f | n \rangle \langle n | x_i \rangle \quad (4.2.3)$$

en terme du spectre du Hamiltonien statique H donné par

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad 1 = \sum_n |n\rangle\langle n| \quad (4.2.4)$$

Les énergies E_n sont les valeurs propres réelles, qui ne sont pas affectées par le prolongement analytique. Pour T grand, l'état fondamental domine,

$$Z(x_f, x_i) \rightarrow e^{-E_0 T/\hbar} \langle x_f | 0 \rangle \langle 0 | x_i \rangle \quad (4.2.5)$$

et l'énergie de l'état fondamental devient

$$E_0 = -\hbar \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln Z(x_f, x_i) \quad (4.2.6)$$

Afin de calculer l'énergie de l'état fondamental (et la fonction d'onde) d'un système quantique, on a juste besoin de prendre la limite $T \rightarrow \infty$ de l'élément de matrice imaginaire (4.2.1). Cette façon pratique d'obtenir les propriétés de l'état fondamental est utilisée, par exemple, pour calculer les masses des hadrons. Dans les sections suivantes, nous montrerons comment calculer les éléments de matrice $Z(x_f, x_i)$ de manière semi-classique dans le cadre de la méthode de l'intégrale de chemin.

4.2.2 Intégrales de chemin dans le temps imaginaire : l'effet tunnel à l'aide de la SCA

Le propagateur en mécanique quantique (4.2.1) dans le temps imaginaire a une représentation d'intégrale de chemin qui peut être obtenue de (4.2.5) par prolongement analytique :

$$Z(x_f, x_i) = \mathcal{N} \int D[x] e^{\frac{-S_E[x]}{\hbar}} = \mathcal{N} \int D[x]_{\{x(-T/2)=x_i|x(T/2)=x_f\}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{-T/2}^{T/2} d\tau \mathcal{L}_E(x, \dot{x})} \quad (4.2.1)$$

Il est utile de définir la "mesure" de cette intégrale plus explicitement. A cette fin, on étend $x(\tau)$ à un ensemble complet, orthonormé de fonctions réelles $\tilde{x}_n(\tau)$ autour d'un chemin fixé $\bar{x}(\tau)$ comme

$$x(\tau) = \bar{x}(\tau) + \eta(\tau) \quad \text{où} \quad \eta(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \tilde{x}_n(\tau) \quad (4.2.2)$$

et

$$\int_{-T/2}^{T/2} d\tau \tilde{x}_n(\tau) \tilde{x}_m(\tau) = \delta_{mn} , \quad \sum_n \tilde{x}_n(\tau) \tilde{x}_n(\tau') = \delta(\tau - \tau') \quad (4.2.3)$$

En outre, on suppose que \bar{x} satisfait les conditions aux limites implicites à l'intégrale de chemin, i.e.

$$\bar{x}(+T/2) = x_f , \quad \bar{x}(-T/2) = x_i , \quad \tilde{x}_n(\pm T/2) = 0 \quad (4.2.4)$$

Comme conséquence, nous avons

$$D[x] = D[\eta] = \prod_n \frac{dc_n}{\sqrt{2\pi\hbar}} \quad (4.2.5)$$

Exprimons maintenant la forme explicite de $\mathcal{L}_E(x, \dot{x})$ par prolongement analytique de l'intégrale de chemin comme

$$iS = i \int_{-T/2}^{T/2} dt \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 - V[x] \right) \rightarrow i \int_{-T/2e^{-i\pi/2}}^{T/2e^{-i\pi/2}} dt \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V[x] \right] \equiv -S_E \quad (4.2.6)$$

Après substitution $t \rightarrow -i\tau$, nous obtenons

$$-S_E = i(-i) \int_{-T/2}^{T/2} d\tau \left(-\frac{m}{2} \dot{x}^2 - V[x] \right) \equiv - \int_{-T/2}^{T/2} d\tau \mathcal{L}_E[x] \quad (4.2.7)$$

de laquelle nous retenons

$$\mathcal{L}_E[x] = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + V(x) \quad (4.2.8)$$

Donc, en plus de changer le facteur de i dans l'exposant en signe moins, le prolongement analytique a l'implication cruciale que le potentiel change son signe.

La conséquence est immédiate pour la SCA : maintenant il existe (une ou plusieurs) solutions dans le temps imaginaire à l'équation du mouvement

$$\frac{-\delta}{\delta x(\tau)} S_E[x] = m\ddot{x}_{cl} - V'(x_{cl}) = 0 \quad (4.2.9)$$

avec des conditions aux frontières de type effet tunnel. Ces solutions correspondent à une particule qui débute en x_i , déboucle la pente à travers le minimum local de $-V(x)$ (qui correspond au pic d'une barrière classiquement interdite de $+V(x)$) et grimpe jusqu'en x_f , selon les conditions aux frontières

$$x\left(-\frac{T}{2}\right) = x_i, \quad x\left(\frac{T}{2}\right) = x_f \quad (4.2.10)$$

Notons au passage que les solutions de (4.2.8) contiennent un nombre quantique conservé, "l'énergie Euclidienne"

$$E_E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x) \quad (4.2.11)$$

qui découle immédiatement de $\dot{E}_E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x)$ et l'équation de mouvement (4.2.9).

La propriété essentielle de ces solutions dans notre contexte est qu'elles sont des points de selle de l'intégrale de chemin au temps imaginaire (4.2.1). Pour $\hbar \rightarrow 0$ les seules contributions non nulles à l'intégrale de chemin proviennent donc du voisinage de x_{cl} et peuvent être calculées grâce à l'approximation du point de selle.

4.2.3 L'approximation du point de selle

Examinons à présent l'approximation du point de selle de manière explicite. A cette fin, écrivons

$$x(\tau) = x_{cl}(\tau) + \eta(\tau) \quad (4.2.1)$$

développons l'action autour du point x_{cl} stationnaire (resp. de selle) (plus tard nous sommerons les contributions de tous les points de selle) au second ordre en η ,

$$S_E[x] = S_E[x_{cl}] + \frac{1}{2} \int d\tau \int d\tau' \eta(\tau) \frac{\delta^2 S_E[x_{cl}]}{\delta x(\tau) \delta x(\tau')} \eta(\tau') + \mathcal{O}(\eta^3) \quad (4.2.2)$$

$$= S_E[x_{cl}] + \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} d\tau \eta(\tau) \hat{F}(x_{cl}) \eta(\tau) + \mathcal{O}(\eta^3) \quad (4.2.3)$$

(la première dérivée s'annule vu que S_E est minimal en x_{cl}) où nous avons abrégé l'opérateur

$$\frac{\delta^2 S_E[x]}{\delta x(\tau) \delta x(\tau')} = \left[-m \frac{d^2}{d\tau^2} + \frac{d^2 V(x_{cl})}{dx^2} \right] \delta(\tau - \tau') \equiv \hat{F}(x_{cl}) \delta(\tau - \tau') \quad (4.2.4)$$

qui gouverne les dynamiques des fluctuations autour de x_{cl} .

Développons à présent les fluctuations $\eta(\tau)$ dans les fonctions propres (réelles) \tilde{x}_n de \hat{F} ,

$$\eta(\tau) = \sum_n c_n \tilde{x}_n(\tau) \quad , \quad (4.2.5)$$

avec

$$\hat{F}(x_{cl}) \tilde{x}_n(\tau) = \lambda_n \tilde{x}_n(\tau) \quad (4.2.6)$$

Les \tilde{x}_n satisfont les conditions aux frontières et sont normalisés. (Vu que \hat{F} est réel, hermitique, et limité, il a un spectre complet.) Pour le moment, nous supposons aussi que toutes les valeurs propres sont positives, $\lambda_n > 0$. (Ce n'est pas vrai en général. Plus tard, nous rencontrerons des exemples de valeurs propres qui s'annulent. Dans le cas des solutions "bounce", il peut même y avoir des valeurs propres négatives.) L'action peut alors être écrite comme :

$$S_E[x] = S_E[x_{cl}] + \frac{1}{2} \sum_n \lambda_n c_n^2 + \mathcal{O}(\eta^3) \quad (4.2.7)$$

Maintenant, utilisons la définition (4.2.5) de la mesure et (4.2.2) pour réécrire

$$Z(x_f, x_i) = \mathcal{N} \int D[x] e^{-\frac{S_E[x]}{\hbar}} \simeq \mathcal{N} e^{-\frac{S_E[x_{cl}]}{\hbar}} \int D[\eta] e^{-\frac{1}{2\hbar} \int_{-T/2}^{T/2} d\tau \eta(\tau) \hat{F}(x_{cl}) \eta(\tau)} \quad (4.2.8)$$

et en utilisant (4.2.7) nous avons

$$Z(x_f, x_i) = \mathcal{N} e^{-\frac{S_E[x_{cl}]}{\hbar}} \prod_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dc_n}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{1}{2\hbar} \sum_n \lambda_n c_n^2} \quad (4.2.9)$$

$$= \mathcal{N} e^{-\frac{S_E[x_{cl}]}{\hbar}} \prod_n \int_{-\infty}^{\infty} dc_n \frac{e^{-\frac{1}{2\hbar} \lambda_n c_n^2}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \quad (4.2.10)$$

Après avoir effectué les intégrations de Gauss (qui découplent, et peuvent donc être réalisées indépendamment), nous avons

$$Z(x_f, x_i) = Z(x_f, x_i) = \mathcal{N} e^{-\frac{S_E[x_{cl}]}{\hbar}} \prod_n \lambda_n^{-1/2} \quad (4.2.11)$$

$$\equiv \mathcal{N} e^{-\frac{S_E[x_{cl}]}{\hbar}} (\det \hat{F}[x_{cl}])^{-1/2} \quad (4.2.12)$$

où une somme $\sum_{x_{cl}}$ est sous-entendue s'il existe plus d'un point de selle. La formule (4.2.11) résume la SCA pour $Z(x_f, x_i)$ jusqu'à l'ordre $\mathcal{O}(\hbar)$.

Au-dessus, nous avons introduit le déterminant d'un opérateur différentiel comme le produit de ses valeurs propres

$$\det \hat{O} = \prod_n \lambda_n, \quad \text{pour } \hat{O}\psi_n(x) = \lambda_n(x), \quad (4.2.13)$$

qui généralise la définition standard pour les matrices quadratiques. Plus tard, nous donnerons une définition plus détaillée de tels déterminants (qui rendent finis les produits infinis ci-dessus, en adoptant un choix spécifique pour le facteur de normalisation \mathcal{N}) et nous montrerons comment ils peuvent être calculés explicitement.

Résumons ce que nous avons accompli jusqu'à présent. Le prolongement analytique aux temps imaginaires, qui semblait relever de l'artifice, nous a permis d'identifier ces chemins dont les voisinages donnent les contributions dominantes à l'intégrale de chemin pour un processus d'effet tunnel dans la limite semi-classique, et d'évaluer cette intégrale de chemin à l'ordre $\mathcal{O}(\hbar)$ dans l'approximation du point de selle. En termes plus physiques, la situation peut être décrite comme suit : pour les problèmes d'effet tunnel, il n'existe pas de trajectoire d'action minimale (i.e. des solutions classiques) avec les conditions aux frontières appropriées en temps réel. En conséquence, toutes les trajectoires entre ces conditions aux frontières (sur lesquelles nous sommes dans l'intégrale de chemin à temps réel) interfèrent de manière hautement destructive. Cependant, leur effet net peut être approximativement rassemblé dans un nombre fini de régions dans l'espace des fonctions, à savoir celles dans le

voisinage des points de selle dans le temps imaginaire. En d'autres termes, alors que les amplitudes de l'effet tunnel devraient être retrouvées dans les temps réels issus d'un mélange de chemins non-stationnaires (une tâche interdite en pratique), elles sont concentrées autour des chemins classiques dans le temps imaginaire, et sont par conséquent accessibles à l'approximation du point de selle. L'interférence destructive dans les temps réels laisse une trace visible, cependant, à savoir la suppression de l'exponentielle de (4.2.11) due au facteur de Gamov $\exp(-S_E/\hbar)$ qui est typique des amplitudes de l'effet tunnel.

4.3 Double puits de potentiel et instantons

Dans les sections suivantes, nous appliquerons les mécanismes développés ci-dessus à de simples problèmes d'effet tunnel avec des potentiels qui ressemblent autant que possible à la situation que nous rencontrerons par la suite en QCD.

4.3.1 la solution instanton

Examinons donc les processus d'effet tunnel entre des minima dégénérés du potentiel. Un simple potentiel de la forme appropriée est

$$V(x) = \frac{\alpha^2 m}{2x_0^2} (x^2 - x_0^2)^2 \quad (4.3.1)$$

(voir Fig. 4.3) qui a trois points de selle. Deux d'entre eux sont triviaux

$$1) \quad x_{cl}(\tau) = x_0 \quad (4.3.2)$$

$$2) \quad x_{cl}(\tau) = -x_0 \quad (4.3.3)$$

et ne contribuent pas à l'effet tunnel (vu qu'ils ne peuvent pas satisfaire les conditions aux frontières correspondantes ; cependant, ils contribuent à $Z(x_0, x_0)$ ou $Z(-x_0, -x_0)$)

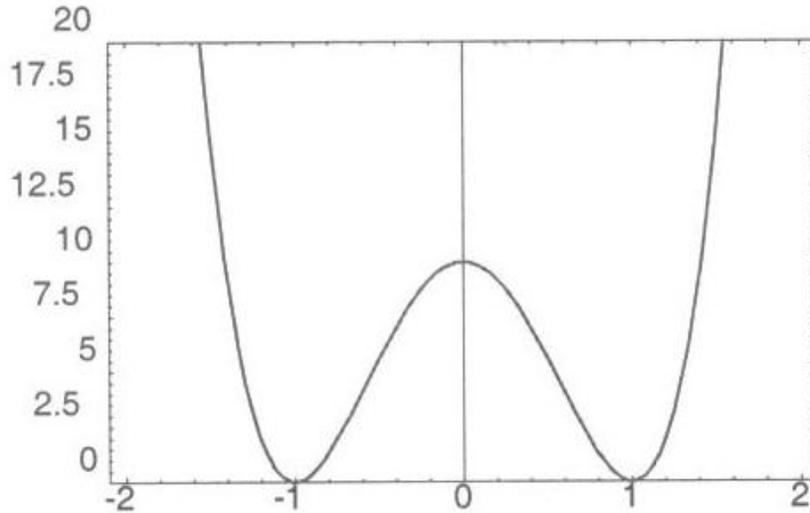


Figure 4.3: Le double puits de potentiel avec $\frac{\alpha^2 m}{2x_0^2} = 10$ et $x_0 = 1$

où $Z(x_f, x_i)$ est défini par (4.2.1). Le troisième point de selle a une dépendance temporelle et correspond à la solution qui interpole entre les deux maxima de $-V$,

$$x_{cl}(-T/2) = +x_0 \quad (4.3.4)$$

$$x_{cl}(T/2) = -x_0 \quad (4.3.5)$$

ou dans la direction opposée, i.e. commençant en $-x_0$ et terminant en x_0 .

La classification des solutions ci-dessus est commune à tous les potentiels qui ressemblent qualitativement, et tous les résultats quantitatifs obtenus ci-dessus s'appliqueront aussi à de tels potentiels. La manière la plus simple d'obtenir cette solution part de l'énergie euclidienne conservée avec $E_E = 0$, qui correspond à la limite $T \rightarrow \infty$ qui nous intéresse (étant donné que la particule dans le système mécanique analogue commence à une vitesse (presque) nulle en x_0 et donc aura besoin d'un temps (presque) infini pour atteindre $-x_0$):

$$E_E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2V}{m}} \quad (4.3.6)$$

Comme d'habitude, la racine carrée positive est sous-entendue, donc, on a

$$\pm \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{V(x)}} = d\tau \quad (4.3.7)$$

qui peut être intégré pour devenir

$$\pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_{cl}(\tau_0)}^{x_{cl}(\tau)} \frac{dx}{\sqrt{V(x)}} = \mp \frac{x_0}{\alpha} \int_{x_{cl}(\tau_0)}^{x_{cl}(\tau)} \frac{dx}{x_0^2 - x^2} = \mp \frac{1}{\alpha} \arctan h\left(\frac{x}{x_0}\right) \Big|_{x_{cl}(\tau_0)}^{x_{cl}(\tau)} = \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau = \tau - \tau_0 \quad (4.3.8)$$

Nous choisissons maintenant τ_0 , la constante d'intégration, comme étant le "centre" de la solution dans le temps imaginaire en imposant $x_{cl}(\tau_0) = 0$, et nous obtenons finalement

$$3) \quad x_{cl}(\tau) \equiv x_{I/\bar{I}}(\tau) = \mp x_0 \tanh \alpha(\tau - \tau_0) \quad (4.3.9)$$

La solution x_I avec le signe moins est appelée **INSTANTON** (voir Fig. 4.4) du potentiel 4.3.1. L'effet tunnel de $-x_0$ à x_0 correspond à la solution de l'anti-instanton $x_{\bar{I}}(\tau) = -x_I(\tau)$.

Evidemment, cette nomenclature est une pure convention. (Nous répétons que, du point de vue conceptuel, il n'y a rien de spécial à propos du potentiel 4.3.1. Des potentiels similaires avec des minima dégénérés auront des solutions intanton similaires bien que ceux-ci ne peuvent généralement pas être trouvés de manière analytique).

Notez que les instantons sont par nécessité dépendants du temps vu qu'ils doivent être interpolés entre les minima du potentiel. Le nom "instanton" (qui vient de 't

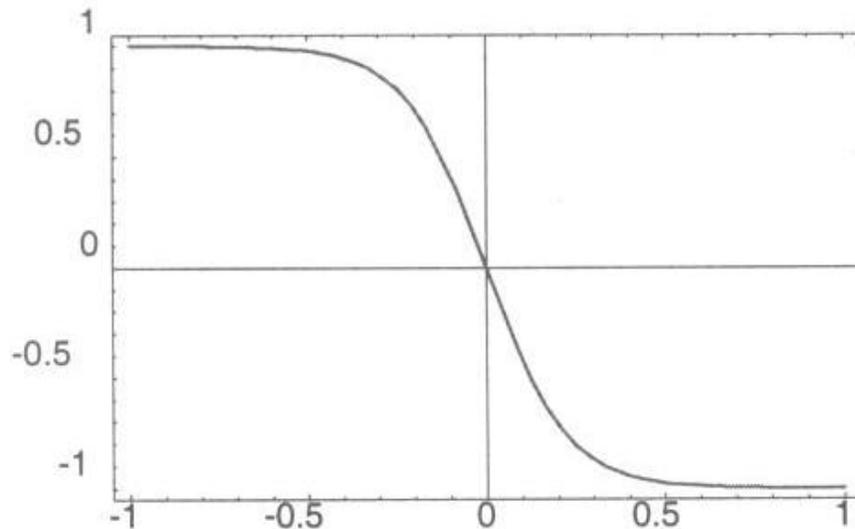


Figure 4.4: La solution instanton dans le potentiel à double puits de la Fig. 4.3

Hoof) indique en outre que la transition par effet tunnel est rapide, i.e. de manière presque instantanée¹. En effet, à partir de l'équation de mouvement (pour $E_E = 0$) pour l'instanton,

$$\frac{dx_I}{d\tau} = -\sqrt{\frac{2}{m}V(x_I)} \quad (4.3.10)$$

on obtient, à large τ , (où $V(x_I)$ peut être étendu autour de $-x_0$ avec $V(-x_0) = V'(-x_0) = 0$ et $V''(-x_0) = 4\alpha^2 m$)

$$\frac{dx_I}{d\tau} \simeq -2\alpha[x_I - (-x_0)] \quad (4.3.11)$$

Après séparation de variables,

$$\frac{dx_I}{x_I + x_0} = d\ln(x_I + x_0) = -2\alpha d\tau \quad (4.3.12)$$

¹L'instanton ne devrait dès lors pas être confondu avec une particule du genre soliton. Il y a une équivalence générale importante, pourtant, entre les instantons et les solitons statiques dans la théorie (des champs) correspondante dans une dimension spatiale additionnelle. Notre instanton, par exemple, est la solution classique du soliton de la théorie des champs $\lambda\phi^4$ de dimension $1+1$

et l'intégration révèle que la solution asymptotique pour l'écart

$$\Delta x_I(\tau) \equiv x_I(\tau) + x_0 \quad (4.3.13)$$

de l'instanton de sa valeur "du vide" $-x_0$ décroît rapidement de manière exponentielle pour des larges τ_0 :

$$\Delta x_I(\tau_0 + \tau) \rightarrow \Delta x_I(\tau_0)e^{-2\alpha\tau} \quad (4.3.14)$$

De plus, l'échelle de temps caractéristique

$$\tilde{\tau} = \frac{1}{2\alpha} \quad (4.3.15)$$

de l'extinction de Δx_I devient arbitraire pour α grand. Dans le système mécanique analogue, cela signifie qu'à une particule partant de x_0 rien de plus ne se passe pendant longtemps, vu que sa vitesse reste presque nulle. Cependant, quand cela approche finalement le minimum de $-V$ en $x = 0$, cela accélère rapidement à travers le minimum, et décélère également rapidement près de $-x_0$, passant tout le temps restant à remonter complètement et atteindre $-x_0$ pour $T \rightarrow \infty$. La "raideur" de la transition augmente avec α , le paramètre de couplage qui contrôle la hauteur de la barrière de potentiel.

L'action (Euclidienne) de la solution (anti-) instanton, qui régit la suppression exponentielle de l'amplitude de l'effet tunnel, est facilement obtenue avec l'aide de la "première intégrale" (Eq. 4.3.6),

$$S_I \equiv S_E[x_I] = m \int_{-T/2}^{T/2} d\tau \dot{x}_I^2 = m \int_{x_0}^{-x_0} dx_I \dot{x}_I = -\frac{\alpha m}{x_0} \int_{x_0}^{-x_0} dx_I (x_0^2 - x_I^2) = \frac{4}{3} \alpha m x_0^2 \quad (4.3.16)$$

et égal à l'action de l'anti-instanton. Une autre manière d'écrire l'action,

$$S_E[x_I] = m \int_{x_0}^{-x_0} dx_I \dot{x}_I = \int_{-x_0}^{x_0} dx \sqrt{2mV(x)} = \int_{-x_0}^{x_0} dx p_E(x) \quad (4.3.17)$$

avec $p_E(x) = \sqrt{2mV(x) - E_E}$ (rappelant que $E_E = 0$ pour la solution instanton) montre que le facteur de suppression exponentielle $\exp(-S_I/\hbar)$ n'est rien d'autre que le facteur de Gamov déjà rencontré dans l'équation 4.1.7. Comme attendu, l'approche de l'intégrale de chemin reproduit le résultat WKB prolongée analytiquement pour l'amplitude de l'effet tunnel.

Nous pouvons ajouter 2 commentaires. Premièrement, il existe plus de points de selle, i.e. les solutions de l'équation 4.2.9, que nous en avons discuté plus haut. Ces solutions additionnelles ne correspondent pas aux mouvements de la particule qui commencent et terminent tous deux aux maxima de $-V$ cependant. En conséquence, ils ne satisfont pas les conditions aux limites de l'effet tunnel (4.3.2) bien qu'ils devraient impliquer la pénétration de barrière. De plus, ils ne correspondent pas à l'approche semi-classique pour l'état fondamental vu que leur action devient infinie pour $T \rightarrow \infty$. Physiquement, c'est évident vu que, dans ces solutions, la particule se déplace infiniment loin du centre du potentiel ($|x| \rightarrow \infty$) et donc atteint une vitesse infinie pour $T \rightarrow \infty$. Finalement, on note que pour des barrières de potentiel très basses (i.e. pour $\alpha \rightarrow 0$) et en concordance de hautes barrières de potentiel, les méthodes semi-classiques peuvent échouer. Dans de tels cas, les approches variationnelles peuvent aider.

4.3.2 Le mode zéro

Les solutions constantes 1) et 2) ci-dessus partagent la symétrie complète du Hamiltonien H (i.e. de V). Ce n'est pas le cas, cependant, pour la solution instanton vu que ce dernier est localisé dans le temps imaginaire autour de τ_0 et par conséquent manque de l'invariance de la translation temporelle continue de H indépendant de τ . Comme conséquence, les solutions instanton forment une famille continue et dégénérée à un paramètre dont les membres sont caractérisés par leur centre temporel τ_0 . Dans l'approximation du point de selle pour l'intégrale de chemin, nous devons sommer

(i.e. intégrer) sur toutes les contributions à partir de tous les τ_0 . Dans cette section, nous verrons comment ceci est réalisable.

A cette fin, revenons à notre "formule maître" de l'approche semi-classique (4.2.11) qui fut établie sous l'hypothèse $\lambda_n > 0$, i.e. pour des valeurs propres positives de l'opérateur de fluctuation \hat{F} . Il n'est pas difficile de voir que cette hypothèse n'est pas valide dans le cas de l'instanton. Vu que l'instanton casse "spontanément" la symétrie de translation temporelle de V , il doit y avoir un mode zéro dans le spectre de \hat{F} (pour $T \rightarrow \infty$), i.e. une fonction propre

$$\tilde{x}_0(\tau) = \sqrt{\frac{m}{S_I}} \dot{x}_I = -\frac{\sqrt{3\alpha}}{2} \frac{1}{\cosh^2(\alpha(\tau - \tau_0))} \quad (4.3.1)$$

avec la valeur propre $\lambda_0 = 0$ que l'on a normalisé à un pour $T \rightarrow \infty$, où (4.3.6) applique :

$$\int_{-T/2}^{T/2} d\tau [\tilde{x}_0(\tau)]^2 = S_I^{-1} \int_{-T/2}^{T/2} d\tau (m\dot{x}_I^2) = 1 \quad (4.3.2)$$

Afin de vérifier que 4.3.1 est en fait un mode zéro, il suffit de prendre une dérivée temporelle de l'équation de mouvement 4.2.9 :

$$m\ddot{x}_I - V'(x_I) = 0 \Rightarrow [m\partial_\tau^2 - V''(x_I)]\dot{x}_I = -\hat{F}\dot{x}_I = 0 \Rightarrow \hat{F}\tilde{x}_0(\tau) = 0 \quad (4.3.3)$$

L'origine physique de ce mode zéro est assez évidente : cela correspond à un décalage infinitésimal du centre instanton τ_0 , i.e. une translation infinitésimale de la solution instanton. Vu que l'instanton décalé est dégénéré avec l'original, une telle fluctuation ne coûte pas d'action et (4.2.7) implique que la valeur propre correspondante de \hat{F} , i.e. λ_0 , doit être nulle.

La solution instanton (4.3.9) décroît de manière monotone, ce qui implique que le mode zéro satisfasse $\tilde{x}_0(\tau) \leq 0$ (cf. 4.3.1) et donc n'a pas de mode. Comme conséquence, le mode zéro est la fonction propre (unique) de \hat{F} avec la plus petite valeur propre. Tous les modes qui restent ont $\lambda_n > 0$ et pour eux, les intégrales Gaussiennes dans l'équation (4.2.11) sont bien définies. Ce n'est pas le cas, cependant, pour l'intégration de c_0

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dc_0 e^{-\frac{1}{2\hbar} \lambda_0 c_0^2}}{\sqrt{2\pi\hbar}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dc_0}{\sqrt{2\pi\hbar}} \quad (4.3.4)$$

qui n'est pas Gaussien du tout! Et ça ne devrait pas être le cas, vu que les fluctuations provoquées par le décalage τ_0 $\eta(\tau) \sim \tilde{x}_0(\tau)$ ne sont pas estompées même quand elles sont grandes (i.e. pour c_0 grand), dû à l'indépendance de l'action de l'instanton vis à vis de τ . Cette dernière rend l'intégrand indépendant de c_0 et donc l'intégrale divergente.

Mais c'est justement le genre de divergence que nous devrions attendre en tout cas de l'intégration sur l'ensemble infini des points de selle, i.e. sur tous les τ_0 , comme discuté plus haut. En fait, il est facile de montrer que

$$dc_0 \propto d\tau_0 \quad (4.3.5)$$

en comparant les déviations dx d'un chemin donné $x(\tau)$ qui sont causées par des petites translations temporelles $\tau_0 \rightarrow \tau_0 + d\tau_0 \Rightarrow dx = \frac{dx_I}{d\tau_0} d\tau_0 = -\dot{x}_I d\tau_0$, et

petits coefficients de décalage $c_0 \rightarrow c_0 + dc_0 \Rightarrow dx = \frac{dx}{dc_0} dc_0 = \tilde{x}_0 dc_0 = \sqrt{\frac{m}{S_I}} \dot{x}_I dc_0$.

En égalant les deux déviations (et en redéfinissant le signe de dc_0 de manière à ce que l'intégrale sur c_0 et τ_0 aient les mêmes limites) donne

$$dc_0 = \sqrt{\frac{S_I}{m}} d\tau_0 \quad (4.3.6)$$

Donc l'intégration sur c_0 peut être réalisée exactement et (dans la limite $T \rightarrow \infty$) revient justement à sommer sur tous les points de selle à un instanton. A cause de la présence d'un mode zéro, l'expression (4.2.11) doit donc être remplacée par

$$Z_I(-x_0, x_0) = \mathcal{N} e^{-\frac{S_E[x_I]}{\hbar}} \sqrt{\frac{S_E[x_I]}{2\pi\hbar m}} T (\det \hat{F}[x_I]')^{-1/2} \quad (4.3.7)$$

où le prime dans le déterminant indique que λ_0 est exclu du produit des valeurs propres, l'opérateur \hat{F} étant défini par l'équation (4.3.3). Naturellement, le facteur T dans (4.3.7) devient infini à la limite $T \rightarrow \infty$ que nous prendrons à la fin. Cet infini est une conséquence de la quantité infinie des points de selle qui contribuent et sera annulé par d'autres infinis, laissant les observables parfaitement finies comme cela devrait être.

4.4 Déterminant de fluctuation

Notre prochaine tâche est de donner un sens aux déterminants fonctionnels comme on en a rencontré ci-dessus, et de calculer

$$\det \hat{F}[x_I]' = \det \left[-m \frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{cl}) \right]' \quad (4.4.1)$$

à partir des fluctuations principales autour de l'instanton (avec les contributions du mode zéro enlevées) explicitement. Ensemble avec la partie du mode zéro, cela prendra en charge les contributions en $\mathcal{O}(\hbar)$ de la SCA. Bien que le calcul explicite de (4.4.1) relève plutôt de l'exercice technique, nous le réaliserons dans un détail considérable. Une des raisons est de développer l'intuition pour le calcul des déterminants en théorie quantique des champs, vu qu'ils se passent généralement pendant la quantification de solutions classiques étendues (au-delà des instantons, e.g. solitons, monopôles, etc.). En réalité, toutes les démarches typiques du calcul se généralisent

plutôt directement à la QCD. En conséquence, cela peut servir comme substitut pédagogique pour le véritable calcul en QCD, qui est un tour de force.

Dans cet ouvrage, nous ne développons pas le calcul, mais nous donnons directement le résultat. Pour résumer la démarche adoptée, nous partons d'un problème simple : nous cherchons un potentiel non-trivial V qui cependant donne un opérateur de fluctuation \hat{F} dont les valeurs propres peuvent être obtenues facilement et analytiquement. Le choix le plus évident nous porte à travailler avec le potentiel de l'oscillateur harmonique

$$V_{ho}(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \quad (4.4.2)$$

4.4.1 Déterminant de l'instanton

Notre tâche sera de calculer le déterminant de fluctuation qui apparaît dans l'amplitude d' $\mathcal{O}(\hbar)$ de l'effet tunnel

$$Z_I(-x_0, x_0) = Z_{ho}(0, 0)e^{-\frac{S_E[x_I]}{\hbar}} \sqrt{\frac{S_E[x_I]}{2\pi\hbar m}} \omega T \left\{ \frac{\det \hat{F}[x_I]'}{\omega^{-2} \det \hat{F}[x_{h0}]} \right\}^{-1/2} \quad (4.4.1)$$

autour de l'instanton. Nous obtenons comme résultat :

$$Z_I(-x_0, x_0) = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{\pi}} e^{-\omega T/2} \omega T \sqrt{\frac{6S_E[x_I]}{\pi\hbar m}} e^{-\frac{S_E[x_I]}{\hbar}} \quad (4.4.2)$$

C'est le propagateur de mécanique quantique du problème de l'effet tunnel à double puits de potentiel. Les analogues exacts du facteur exponentiel de Gamov et du facteur préexponentiel $\sqrt{S_I}$ provenant du mode zéro apparaissent dans le secteur à un instanton de la QCD.

4.5 Gaz dilué d'instanton

Jusqu'à présent, nous nous sommes concentrés sur les points de selle qui correspondent aux solutions d'un instanton unique. Ce n'est pas tout, cependant : il y a des points de selle (approximatifs) additionnels qui contribuent aussi à l'amplitude semi-classique de l'effet tunnel pour de grands T . Nous allons maintenant analyser ces solutions "multi-instantons", tout d'abord dans le potentiel familier à double puits et par la suite, dans son extension périodique (qui représente l'analogie en mécanique quantique le plus proche du vide semi-classique de Yang-Mills).

4.5.1 Potentiel à double puits

Vu que l'instanton dévie seulement dans un petit intervalle $\Delta\tau = 1/(2\alpha)$ de façon appréciable de x_0 ou $-x_0$, et vu que le recouvrement entre des instantons et des anti-instantons voisins est exponentiellement petit, les solutions multi-(anti)-instanton de (4.2.9) peuvent être approximativement écrites comme une chaîne (i.e. une superposition ordonnée) de N instantons et antiinstantons alternés, suffisamment séparés temporellement par l'intervalle (moyen)

$$\bar{\Delta}_\tau = \frac{T}{N} \gg \frac{1}{2\alpha} \quad (4.5.1)$$

Ces chaînes correspondent à N effets tunnel, de va et vient entre les deux minima du potentiel. Intuitivement, il est clair que leur importance, associée à la fréquence de leur occurrence, augmente avec T .

Les solutions approximatives des N -instantons, composées de simples instantons

et anti-instantons en alternance aux temps $\tau_{0,k}$, peuvent donc être écrites comme ²

$$x_N(\tau) = \sum_{k=1}^N x_{I,\bar{I}}(\tau - \tau_{0,k}) \quad (4.5.3)$$

où N doit être impair pour satisfaire les conditions aux frontières. Elles deviennent solutions exactes pour des séparations infinies $|\tau_{0,k+1} - \tau_{0,k}| \rightarrow \infty$. Les centres des (anti-) instantons sont ordonnés dans le temps Euclidien comme

$$-\frac{T}{2} \ll \tau_{0,1} \ll \tau_{0,2} \dots \ll \tau_{0,N} \ll \frac{T}{2} \quad (4.5.4)$$

Toutes les solutions multi-instantons doivent être incluses comme des points de selle additionnels en approche semi-classique. Nous allons maintenant dériver l'expression correspondante pour $Z(-x_0, x_0)$ en utilisant les solutions approximatives (4.5.3) à la place. Cette simplification porte le nom de "l'approximation du gaz dilué d'instanton" (DIGA : Dilute Instanton Gas Approximation).

La contribution de la solution approximative du gaz instanton à l'intégrale de chemin est

$$Z_N \simeq \mathcal{N} \int D[\eta] e^{-S_E[x_N + \eta]/\hbar} \quad (4.5.5)$$

Ecrivons maintenant la fluctuation générale $\eta(\tau)$ comme une somme de fluctuations indépendantes, $\eta_k(\tau)$ localisées autour de chaque (anti-) instanton et $\eta_0(\tau)$

²Eq. (4.5.3) doit être comprise comme un raccourci pour l'expression plus précise

$$x_N(\tau) = \sum_{k=1}^{(N+1)/2} x_I(\tau - \tau_{0,2k-1}) + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} x_{\bar{I}}(\tau - \tau_{0,2k}) \quad (4.5.2)$$

qui se charge explicitement du fait que les première et dernière transitions dans la chaîne doivent être des instantons, et que ceux entre consistent en un anti-instanton et $(N-3)/2$ paires d'un anti-instanton suivi par un instanton

autour des parties approximativement constantes $x(\tau) = \pm x_0$ entre eux :

$$\eta(\tau) = \eta_0(\tau) + \sum_{k=1}^N \eta_k(\tau) \quad (4.5.6)$$

Cela implique que $\eta_0(\tau)$ peut être fini partout sur $[-T/2, T/2]$ (sauf aux frontières) tandis que les $\eta_k(\tau)$ sont localisées en temps autour du k -ième (anti-) instanton.

En conséquence, l'action se décompose approximativement en la somme des actions pour chaque (anti-) instanton et une partie pour le "vide" :

$$S_E[x_N + \eta] \simeq S_E[x_0 + \eta_0] + \sum_{k=1}^N S_E[x_I + \eta_k] \quad (4.5.7)$$

(Rappel : $S[x_d = \pm x_0] = 0$ et $S[x_0 + \eta] = S[-x_0 + \eta]$, dû à la symétrie du potentiel). Cette formule exprime le fait (approximatif) que les (anti-) instantons ont trop peu de recouvrement pour interagir. En outre, la mesure de l'intégrale de chemin se factorise en intégrales sur les fluctuations localisées autour des instantons, et celles entre. En conséquence, Z_N se factorise comme

$$Z_N(x_0, -x_0) \simeq \mathcal{N} \int D[\eta_0] e^{-S_E[x_0 + \eta_0]/\hbar} \times \prod_{k=1}^N \mathcal{N} \int D[\eta_k] e^{-S_E[x_I + \eta_k]/\hbar} \quad (4.5.8)$$

$$= Z_0(x_0, x_0) [Z_I(-x_0, x_0)]^N \quad (4.5.9)$$

Nous avons écrit le produit ci-dessus d'une manière implicite. A strictement parler, les N facteurs $Z_I(-x_0, x_0)$ ont différentes conditions aux frontières vu que les points aux extrémités $\pm x_0$ sont (presque) atteints à différents temps dans chaque facteur, associé avec l'ordre dans le temps de l'(anti-) instanton dont ils proviennent. Cependant, à cause de l'invariance de la translation temporelle, cela ne fait aucune

différence pour la valeur de $Z_I(-x_0, x_0)$ hormis à travers la contribution du mode zéro. En effet, pour ce dernier, nous devons intégrer sur la position temporelle τ_0 de l'(anti-) instanton (ou, de manière équivalente, sur c_0),

$$Z_I = Z'_I \sqrt{\frac{S_I}{2\pi\hbar m}} \int d\tau_0 \equiv \tilde{Z}_I \int d\tau_0 \quad (4.5.10)$$

où maintenant le rang du centre $\tau_{0,k}$ du k -ième (anti-) instanton est restreint par le fait qu'il ne peut se produire qu'après le $(k-1)$ -ième, i.e. $\tau_{0,k-1} < \tau_{0,k} < T/2$. L'intégration sur les $\tau_{0,k}$ prend donc la forme

$$\int_{-T/2}^{T/2} d\tau_{0,1} \int_{\tau_{0,1}}^{T/2} d\tau_{0,2} \dots \int_{\tau_{0,N-1}}^{T/2} d\tau_{0,N} = \frac{T^N}{N!} \quad (4.5.11)$$

qui a pour résultat

$$Z_N \simeq Z_0 \frac{(\tilde{Z}_I T)^N}{N!} \quad (4.5.12)$$

L'expression ci-dessus détermine la contribution N -instanton explicitement vu que nous avons déjà calculé Z_0 (avec $\omega = 2\alpha$) et vu que \tilde{Z}_I peut être immédiatement obtenu :

$$Z_0(\pm x_0, \pm x_0) = \mathcal{N}(\det[-\partial_\tau^2 + \omega^2])^{-1/2} \rightarrow \left(\frac{m\hbar\omega}{\pi}\right)^{1/2} e^{-\omega T/2} \quad (4.5.13)$$

$$\tilde{Z}_I = 2\alpha \sqrt{\frac{6S_E[x_I]}{\pi\hbar m}} e^{-\frac{S_E[x_I]}{\hbar}} = 4\sqrt{\frac{2\alpha^3 x_0^2}{\pi\hbar}} e^{-\frac{4}{3}\alpha m x_0^2/\hbar} \quad (4.5.14)$$

Afin de collecter les contributions multi-instanton à $Z(x_0, -x_0)$, nous devons sommer sur tous les N impairs (pour rappel, les N 's impairs sont requis par les conditions aux frontières) et on obtient

$$Z_{DIGA}(x_0, -x_0) = Z_0 \sum_{N \text{ impair}} \frac{(\tilde{Z}_I T)^N}{N!} = \frac{Z_0}{2} \{e^{\tilde{Z}_I T} - e^{-\tilde{Z}_I T}\} = Z_0 \sinh(\tilde{Z}_I T) \quad (4.5.15)$$

(Notez que la seconde exponentielle dans le membre de droite ci-dessus enlève les contributions paires dans \tilde{Z}_I et double les impaires dans \tilde{Z}_I). Une expression analogue pour $Z_{DIGA}(-x_0, -x_0)$ est obtenue quand seules les contributions provenant des nombres pairs d'instantons sont sommés. Les deux résultats peuvent être combinés dans l'expression

$$Z_{DIGA}(\pm x_0, -x_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar\omega}{\pi} \right)^{1/2} e^{-\omega T/2} \{ e^{\tilde{Z}_I T} \mp e^{-\tilde{Z}_I T} \} \quad (4.5.16)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar\omega}{\pi} \right)^{1/2} \{ e^{-(\omega/2 - \tilde{Z}_I)T} \mp e^{-(\omega/2 + \tilde{Z}_I)T} \} \quad (4.5.17)$$

dont les deux plus bas niveaux d'énergie du système (i.e. ceux de l'état fondamental et du premier état excité) peuvent être trouvés comme

$$E_0 = -\hbar \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln Z_{DIGA}(\pm x_0, -x_0) = -\hbar \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [-(\omega/2 - \tilde{Z}_I)T] \\ = \frac{\hbar\omega}{2} - \hbar\tilde{Z}_I \quad (4.5.18)$$

$$E_1 = -\hbar \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [-(\omega/2 + \tilde{Z}_I)T] = \frac{\hbar\omega}{2} + \hbar\tilde{Z}_I \quad (4.5.19)$$

Comme attendu, la conséquence de l'effet tunnel est de séparer les énergies dégénérées $\hbar\omega/2$ de l'état fondamental de la fonction d'onde $|\pm x_0\rangle$ centrée en chacun des deux minima du potentiel. Les états propres correspondant sont obtenus de manière similaire à partir des préfacteurs de l'exponentielle dans (4.5.16). Pour l'état fondamental (premier état excité), on trouve la combinaison linéaire symétrique (antisymétrique)

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |x_0\rangle + | -x_0\rangle \} \quad (4.5.20)$$

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |x_0\rangle - | -x_0\rangle \} \quad (4.5.21)$$

Ce sont les résultats standards de la méthode WKB pour l'amplitude de l'effet tunnel, avec la séparation typique

$$\Delta E \sim e^{-\frac{S_E[x_I]}{\hbar}} \quad (4.5.22)$$

des niveaux d'énergie des états connectés par effet tunnel, bien que nous les ayons obtenus dans le cadre quelque peu moins familier des intégrales de chemin à temps imaginaire. Il est remarquable que l'approche semi-classique fonctionne bien même pour des états fondamentaux du système, i.e. pour ceux avec les plus grandes longueurs d'onde de de Broglie λ , bien que ce λ n'est pas petit comparé à la taille du potentiel. Notez de plus que, en contraste avec le cas sans effet tunnel et les états fondamentaux $\pm|x_0\rangle$, les états ci-dessus sont des états propres de parité bien déterminée (sous lesquels $x_0 \leftrightarrow -x_0$). Le nouvel état fondamental (4.5.20), en particulier, est invariant vis-à-vis de la parité : la parité artificiellement brisée en l'absence de l'effet tunnel est restaurée.

Avant de clore ce chapitre, nous devrions parler du potentiel en sommant sur tout le gaz d'instanton dans l'équation (4.5.15). En effet, pour un nombre N augmentant d'(anti-) instantons dans l'intervalle constant T la condition de dilution est de moins en moins satisfaite, impliquant que à partir d'un grand nombre N , les termes correspondants dans la somme violeront cette condition fondamentale imposée par DIGA. Néanmoins, la formule de Stirling $n! \simeq (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}$ pour de grands n montre que la somme (4.5.15) est dominée par les termes avec

$$\frac{\tilde{Z}_I T}{N} \sim \mathcal{O}(1) \quad (4.5.23)$$

et que les contributions de grands N sont rapidement supprimés.

En conséquence, seul N avec

$$\frac{N}{T} \lesssim C e^{-\frac{S_E[x_I]}{\hbar}} \quad (4.5.24)$$

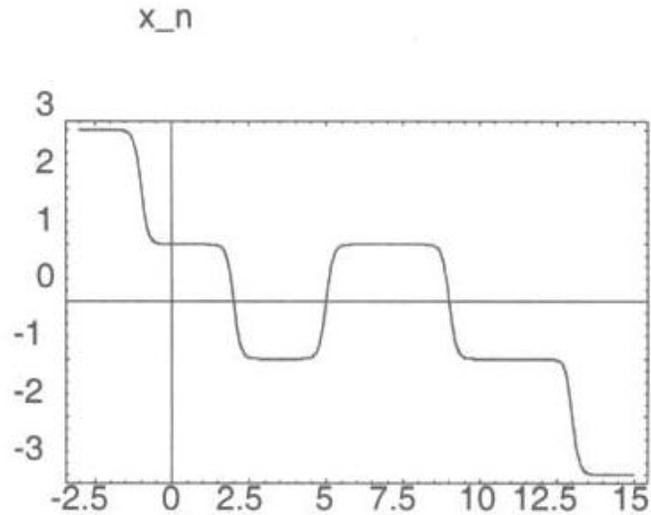


Figure 4.5: Une solution multi-instanton dans le potentiel périodique. L'abscisse dénote le temps Euclidien τ tandis que l'ordonnée donne la position variable x . Les valeurs entières de x correspondent aux minima $x_{0,n}$ du potentiel périodique

i.e. avec une densité d'instanton exponentiellement petite dans la limite semi-classique (qui peut être amélioré à volonté en augmentant α vu que nous avons trouvé que $S_E[x_I] = (4/3)\alpha m x_0^2$), contribue de manière significative dans la somme (4.5.15). Cela assure que Z_{DIGA} est dominée par les termes dans lesquels la condition de dilution de DIGA est bien satisfaite.

Notre principale motivation pour l'utilisation des méthodes de l'instanton dans les solutions du problème de l'effet tunnel était que cette procédure peut être directement généralisée aux théories de jauge. Afin de développer l'analogie avec la QCD aussi loin que possible, pourtant, nous devrions encore aller un cran plus loin en mécanique quantique et étudier un potentiel périodique avec minima dégénérés. Ce sera le sujet de la section suivante.

4.5.2 potentiel périodique

Considérons maintenant l'extension périodique du potentiel à double puits. Ce type de potentiel ressemble de très près à la situation que nous rencontrerons dans le chapitre suivant décrivant la situation en QCD.

Dans un potentiel périodique à minima dégénérés, les instantons et anti-instantons peuvent se suivre arbitrairement un après l'autre, en commençant au minimum où le précédent se termine, i.e. en connectant les minima adjacents $x_{0,n}$ et $x_{0,n\pm 1}$ (voir Fig. 4.5). En généralisant nos conventions prises plus tôt, on définira l'instanton (anti-instanton) comme le segment de la solution qui interpole entre les minima voisins à gauche (droite), i.e. qui diminue (augmente) n . Allant du minimum avec l'index n_i à l'index n_f , correspondant aux conditions aux frontières

$$x\left(-\frac{T}{2}\right) = x_{0,n_i} \quad x\left(\frac{T}{2}\right) = x_{0,n_f} \quad (4.5.1)$$

requiert donc que le nombre d'anti-instantons moins le nombre d'instantons, $N_{\bar{I}} - N_I$, soit égal à $n_f - n_i$. En conséquence, le propagateur semi-classique devient

$$Z_{per}(x_{n_f}, x_{n_i}) \simeq Z_0 \sum_{N_I=0}^{\infty} \sum_{N_{\bar{I}}=0}^{\infty} \frac{(\tilde{Z}_I T)^{N+N_{\bar{I}}}}{N!N_{\bar{I}}!} \delta_{N_{\bar{I}}-N_I-(n_f-n_i)} \quad (4.5.2)$$

Avec la représentation

$$\delta_{ab} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{i\theta(a-b)} \quad (4.5.3)$$

du symbole de Kronecker, l'expression de Z_{per} peut être réécrite comme

$$Z_{per}(x_{n_f}, x_{n_i}) \simeq Z_0 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-i\theta(n_f-n_i)} \sum_{N_I=0}^{\infty} \frac{(\tilde{Z}_I T e^{-i\theta})^{N_I}}{N_I!} \sum_{N_I=0}^{\infty} \frac{(\tilde{Z}_I T e^{i\theta})^{N_I}}{N_I!} \quad (4.5.4)$$

$$= Z_0 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-i\theta(n_f-n_i)} e^{\tilde{Z}_I T e^{-i\theta} + \tilde{Z}_I T e^{i\theta}} \quad (4.5.5)$$

et en utilisant encore l'expression (4.5.13) pour Z_0 , on arrive à

$$Z_{per}(x_{n_f}, x_{n_i}) = \left(\frac{m\hbar\omega}{\pi}\right)^{1/2} e^{-\omega T/2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-i\theta(n_f-n_i)} e^{2\tilde{Z}_I T \cos\theta} \quad (4.5.6)$$

$$= \left(\frac{m\hbar\omega}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-i\theta(n_f-n_i)} e^{-(\omega/2-2\tilde{Z}_I \cos\theta)T} \quad (4.5.7)$$

Comme avant, on peut maintenant obtenir l'état fondamental à partir de la limite $T \rightarrow \infty$. L'expression ci-dessus montre qu'on a, en fait, une "bande" continue d'énergies paramétrisées par θ

$$E_0(\theta) = -\hbar \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [-(\frac{\omega}{2} - 2\tilde{Z}_I \cos\theta)T] \quad (4.5.8)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2} - 2\hbar\tilde{Z}_I \cos\theta \quad (4.5.9)$$

Naturellement, il est bien connu que les énergies dans un potentiel périodique forme des "bandes" continues. Notre résultat est juste l'analogue de, par exemple, la bande la plus basse des états électroniques dans un potentiel périodique d'un métal. Sans surprise donc, les états propres correspondants sont les "ondes de Bloch"

$$|\theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\hbar\omega}{\pi}\right)^{1/4} \sum_n e^{in\theta} |n\rangle \quad (4.5.10)$$

où $|n\rangle$ est l'état localisé au n -ième minimum du potentiel périodique.

Cela conclut notre discussion des instantons en mécanique quantique. On pourrait en dire beaucoup plus à propos d'eux, de leur cousins qui servent de médiateurs à l'effet tunnel entre minima non-dégénérés, leurs connections à la théorie des perturbations d'ordres supérieurs en temps réel, etc. Pourtant, nous avons obtenu notre principal objectif : l'extension semi-classique et les propriétés de l'état fondamental dans un potentiel qui imite la situation du vide en QCD. Nous allons à présent examiner les instantons en QCD.

4.6 Exemple de potentiel périodique

Dans cette section, nous donnons un exemple simple qui nous permettra d'illustrer la notion importante de charge topologique. Cette notion sera reprise dans sa forme générale au chapitre suivant.

Un exemple intéressant de la solution instanton en mécanique classique est fourni par le potentiel périodique

$$U(x) = \frac{1}{2}\mathcal{S}^2(x) = \frac{m^4}{\lambda}\left(1 - \cos \frac{\sqrt{\lambda}x}{m}\right) \quad (4.6.1)$$

montré à la figure ... Encore, il y a un nombre infini d'états fondamentaux classiques (avec $E = 0$) représentés dans la figure par x_n , avec $x_0 = 0$. Dans le problème correspondant de l'instanton dans le temps Euclidien, le potentiel $U(x)$ se retourne, avec les pics en x_n ayant une énergie $E = 0$. Une particule en x_1 peut alors rouler jusqu'en x_2 , simulant l'effet tunnel dans l'espace de Minkowski. Ce mouvement correspond à l'action Euclidienne définie par (4.2.7) et (4.2.8)

$$S_E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dx_4} \right)^2 + \frac{2m^4}{\lambda} \sin^2 \frac{\sqrt{\lambda}x}{2m} \right] dx_4 \quad (4.6.2)$$

avec $x_4 = \tau$. Notez que les limites en x_4 sont $\pm\infty$ vu que l'énergie $E = 0$ aux points extrêmes. Le minimum de S_E est obtenu quand

$$\frac{dx}{dx_4} = \mp \frac{2m^2}{\sqrt{\lambda}} \sin \frac{\sqrt{\lambda}x}{2m} \quad (4.6.3)$$

Cela donne la solution

$$\tan\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{4m}x + C\right) = \pm \exp(mx_4) \quad (4.6.4)$$

comme cela peut être vérifié par différentiation. Ici, C est une constante à être choisie pour fixer la condition initiale. Par exemple, si $x = 0$ en $x_4 = -\infty$, on prend $C = 0$.

Alors pour $x_4 \rightarrow \infty$, x approche la valeur $\pm\pi/2 \times (4m/\sqrt{\lambda})$, qui est x_1 (ou $-x_1$), le pic adjacent à droite (ou à gauche) de $x = 0$. En prenant le signe + dans Eq. (4.6.4), et $C = 0$, on dessine la solution "à un instanton" dans la figure.... Soit $\phi = \sqrt{\lambda}x/m$, $\tau = mx_4$. Alors, on voit que

$$[\phi(\tau = \infty) - \phi(\tau = -\infty)] = 2\pi - 0 = 2\pi \quad (4.6.5)$$

Une solution "à un instanton" pourrait aussi représenter un changement dans ϕ de 2π à 4π , ou de 4π à 6π , etc. en divisant l'espace x en différents secteurs topologiques. Donc, c'est caractérisé par une "charge topologique"

$$q = \frac{1}{2\pi}[\phi(\infty) - \phi(-\infty)] = (1 - 0) = 1 \quad (4.6.6)$$

Cependant, dans cet exemple simple de mécanique, les solutions sont restreintes à $q = \pm 1$, on pourrait imaginer des situations plus générales où la charge topologique

$$q = \frac{1}{2\pi}[\phi(\infty) - \phi(-\infty)] = (n_2 - n_1) \quad (4.6.7)$$

est un entier non restreint à ± 1 . Un déplacement translationnel le long de x peut changer n_2 et n_1 , mais $q = n = (n_2 - n_1)$ caractériserait donc une solution "à n -instantons", invariante sous translation. Si $q = 0$, la particule reste en point de l'espace, et il n'y a pas de solution instanton. Nous verrons que la charge topologique q est la même que le "winding number", une propriété topologique associée à la "projection" d'un espace dans un autre, comme un cercle \rightarrow cercle, etc.

Ces exemples simples de solutions instanton sont données pour nous préparer au problème plus difficile en théorie des champs, tout spécialement aux champs de Yang-Mills. Comme nous l'verrons dans le chapitre suivant, l'état fondamental classique, défini par $\rightarrow F_{\mu\nu} = 0$, peut être décrit par un nombre infini de configurations de champs $V_\mu = -i/g(\partial_\mu h)h^{-1}$. Ici, $h(x)$ est un élément du groupe de jauge

non-abélien dans l'espace interne approprié. Etant donnée cette théorie des champs, peut-on dire s'il y a des solutions instanton? Les solutions instanton dans l'espace Euclidien voudraient dire qu'il existe un effet tunnel entre des états dégénérés. Il vient en fait que quelques simples concepts topologiques, menant à l'identification du groupe d'homotopie adéquat, peuvent nous donner un coup de main dans ce problème. Nous commençons donc la prochaine section en expliquant le concept de groupe d'homotopie.

Part III

Les instantons en QCD

Quelle est la pertinence de la discussion ci-dessus sur l'effet tunnel pour la QCD? En anticipant, la réponse est que plusieurs aspects importants de la SCA se généralisent à la théorie de Yang-Mills Euclidienne à quatre dimensions (i.e. le temps imaginaire), une fois qu'on a identifié les points de selle des intégrales fonctionnelles correspondantes dans le temps imaginaire. Notre première tâche sera donc de trouver les minima de l'action classique de Yang-Mills. De manière remarquable, il se fait qu'ils sont déterminés par la topologie du groupe de jauge et qu'ils forment les minima d'un "potentiel" périodique analogue à celui rencontré ci-dessus.

Les solutions correspondant à l'effet tunnel, les instantons de Yang-Mills, sont des champs de jauge classiques avec d'intrigantes propriétés topologiques. Ces dernières introduisent de nouveaux phénomènes physiques sans analogie avec les exemples de mécanique quantique. Certains de ces phénomènes, incluant ceux en rapport avec le secteur des quarks légers de la QCD, seront discutés dans le présent chapitre.

Chapter 5

Topologie du vide et Instantons de Yang-Mills

5.1 Formulation Euclidienne des théories YM

La formulation Euclidienne développée au chapitre 2 pour une théorie de jauge abélienne peut être facilement étendue à une théorie non abélienne. Pour faciliter la discussion, nous considérons le groupe de jauge de $SU(2)$, correspondant aux interactions faibles. Dans ce cas, la transformation de jauge locale est

$$U = \exp\left(-\frac{i}{2}\vec{\omega}(x) \cdot \vec{\tau}\right) \quad (5.1.1)$$

où $\tau^a/2$ ($a = 1, 2, 3$) sont les générateurs du groupe. Par analogie avec la QED, la dérivée covariante s'écrit

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\frac{\vec{\tau} \cdot \vec{A}}{2} \quad (5.1.2)$$

où g , la constante de couplage, joue le rôle de "charge". Dû à l'aspect non abélien du problème, le tenseur du champs devient

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\varepsilon^{abc}A_\mu^b A_\nu^c \quad (5.1.3)$$

la nature non abélienne se manifestant par la présence du troisième terme à droite, inexistant dans une théorie abélienne et contenant les constantes de structure ε^{abc} de $SU(2)$. (voir chapitre 2). Une autre différence, c'est que chaque composante de A_μ ou de $F_{\mu\nu}$ porte un indice supplémentaire correspondant au générateur $\frac{1}{2}\tau^a$ de $SU(2)$ ($a = 1, 2, 3$). Un simple calcul montre que dans ce cas nous avons aussi

$$E_i^a = i(E_i^a)_{\text{Eucl}} \quad (5.1.4)$$

à condition que $g \rightarrow -g$.

La notation correspondante en QCD pour le tenseur du chapitre sera

$$F_{\mu\nu}^a \longrightarrow G_{\mu\nu}^a \quad \text{et} \quad \varepsilon^{abc} \longrightarrow f^{abc} \quad (5.1.5)$$

où l'indice a de G prendra les valeurs $a = 1, \dots, 8$ associées aux générateurs de $SU(3)$.

5.2 Topologie du vide de Yang-Mills

Afin de développer un peu d'intuition concernant les propriétés de l'état fondamental semi-classique de la QCD, commençons comme dans les exemples de mécanique classique développés dans le chapitre précédent, par chercher les minima de l'action Euclidienne de Yang-Mills. Si on se restreint pour le moment au secteur des gluons, on a

$$S[G] = \frac{1}{4} \int d^4x [G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a] \quad (5.2.1)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^4x [E_i^a E_i^a + B_i^a B_i^a] \geq 0 \quad (5.2.2)$$

où le tenseur de force du champ de gluon vaut

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu + ig[G_\mu, G_\nu] \equiv G_{\mu\nu}^a t^a, \quad t^a = \frac{\lambda^a}{2} \quad (5.2.3)$$

et les champs chromoélectriques et -magnétiques sont définis comme

$$E_i^a = G_{i4}^a, \quad B_i^a = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}G_{jk}^a \quad (5.2.4)$$

La théorie des champs correspondante (incluant les quarks) détermine la structure du vide en QCD, i.e. l'état unique de la plus basse énergie sur lequel l'espace de Fock est construit. Vu que la QCD est fortement couplée et donc non-perturbative aux basses énergies, nous devons nous attendre à ce que le vide soit peuplé par des champs forts. (C'est en contraste avec la QED standard, par exemple, où le vide contient principalement des fluctuations du point-zéro, i.e. des paires électrons-positrons interagissant faiblement et des photons qui peuvent être "gérés" de manière perturbative)

Une mesure de la force des champs du vide en QCD peut être obtenu à partir de l'anomalie de trace, qui met en rapport la densité d'énergie ε_{vac} du vide avec la valeur phénoménologiquement connue et attendue du carré du tenseur $G_{\mu\nu}$ du champ gluon, appelé "condensat de gluons" (renormalisé par rapport à 1 Gev) :

$$\varepsilon_{vac} \simeq -\frac{b_1}{128\pi^2}\langle 0|g^2G^2|0\rangle \simeq -\frac{1 \text{ GeV}}{2 \text{ fm}^3} \ll \varepsilon_{pert} \quad (5.2.5)$$

où b_1 dépend de la constante de couplage g . Cette relation montre que les champs du vide non perturbatifs sont en effet exceptionnellement forts : ils réduisent l'énergie du vide dans un tout petit cube de taille 10^{-15}m par à peu près la moitié de la masse d'un proton! Comme nous allons voir dans le reste de cette section, une partie de cette réduction est due à des processus d'effet tunnel grâce aux instantons.

Les champs forts peuvent contenir un très grand nombre de quanta, et ces quanta peuvent devenir cohérents et rendre l'action correspondante grande par rapport à \hbar . En d'autres termes, de tels champs se comportent de manière (semi-)classique vu que les fluctuations quantiques sont d' $\mathcal{O}(\hbar)$ et donc contribuent seulement relativement à

de petites corrections. Dans la suite, nous explorerons cette perspective en donnant une attention spéciale aux caractéristiques robustes et génériques qui sont supposées survivre même à de plus fortes fluctuations quantiques.

5.3 Le groupe d'homotopie

Dans cette section, nous introduisons le groupe d'homotopie, et nous l'appliquons à la théorie des champs de Yang-Mills $SU(2)$. Pour voir ce qu'on entend par un groupe d'homotopie, prenons le simple exemple du groupe $\Pi_1(X)$, qui définit la relation (correspondance biunivoque) entre les points d'un cercle S^1 et les points dans un espace "topologique" X . Le dernier, dans notre exemple, est pris comme étant un espace Euclidien à deux dimensions avec un trou coupé dans celui-ci pour le rendre non-trivial. Faisons correspondre chaque point de S^1 à X , avec la provision que le point P sur S^1 est mis en correspondance avec le point N dans X . Un tel mapping le plus simple $S^1 \rightarrow X$ est un où tout point sur S^1 , incluant naturellement P , mappé au même point N sur X . On pourrait aussi mapper chaque point sur la boucle S^1 à un point différent sur une boucle O dans X , comme sur la figure (5.1). Si la boucle O n'encercle pas le trou (comme c'est le cas sur la figure), alors ça peut s'étendre continuellement jusqu'au point N , et la topologie de ce mapping n'est pas différente de celui dans lequel tout point sur S^1 était mappé au même point N .

Tous ces mappings topologiquement équivalents forment l'élément unité du groupe d'homotopie $\Pi_1(X)$. L'indice 1 sur Π est pour S^1 , et X entre parenthèses est pour l'espace topologique auquel S^1 est mappé. Ensuite, on pourrait mapper chaque point de S^1 , en allant dans le sens des aiguilles d'une montre, à différents points sur la boucle O_1 dans X , où $P \rightarrow N$ à nouveau. La boucle O_1 est prise pour encercle le trou une fois qu'il est dans le sens des aiguilles d'une montre (voir Fig. 5.2). Notez qu'à cause du trou, la boucle O_1 ne peut pas s'effondrer au point N par une déformation

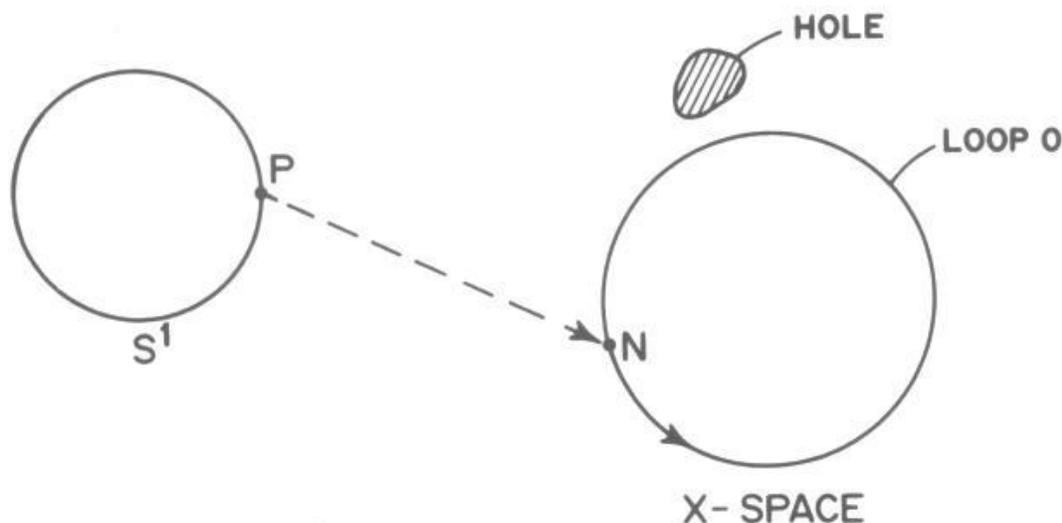


Figure 5.1: Le mapping de points du cercle S^1 sur une boucle O dans l'espace Euclidien X bidimensionnel avec un trou dedans. Le point P sur S^1 est mappé sur le point N de O .

continue. Ce mapping est donc topologiquement distinct de l'élément unité considéré plus tôt dans le groupe d'homotopie $\Pi_1(X)$. Tous les autres mappings comme O'_1 (montré par la ligne en pointillés) qui encerclent le trou seulement une fois sont topologiquement équivalents à O_1 , et ne sont pas distincts. Ces mappings (avec un encerclement autour du trou dans le sens des aiguilles d'une montre) de $S^1 \rightarrow X$ sont homotopiques, ou équivalents, et forment un autre élément du groupe homotopique $\Pi_1(X)$. Donc, chaque classe équivalente de mappings est un élément de $\Pi_1(X)$, et ces éléments forment le groupe homotopique $\Pi_1(X)$. Le nombre d'éléments dans $\Pi_1(X)$ est clairement infini, et un élément peut être identifié par un entier n . Les deux éléments que nous avons décrit dans fig. et fig. ont $n = 0$ et $n = 1$, correspondant au nombre de windings antihorlogiques de l'image de S^1 dans X . Le nombre de windings peut naturellement prendre des valeurs entières négatives correspondant à un mapping horlogique, et tous ces entiers n forment un groupe Z de l'addition, avec $n = 0$ comme élément neutre. Dans cet exemple, $\Pi_1(X) = Z$.

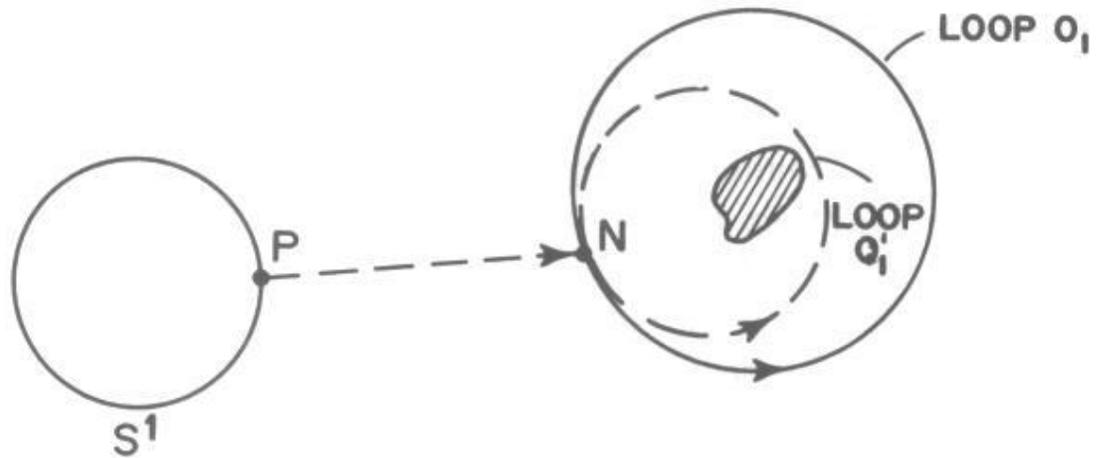


Figure 5.2: La notation est la même que dans la Fig. 5.1, seule la boucle O_1 (ou la boucle topologiquement équivalente O'_1) encercle maintenant le trou dans l'espace- X de manière anti-horlogique

Les mêmes concepts peuvent être utilisés pour définir le n -ième groupe d'homotopie $\Pi_n(X)$. Ici, le mapping forme une sphère S^n à n dimensions à l'espace topologique X . Considérons par exemple, le groupe $U(1)$. Tout élément du groupe, $e^{i\theta}$, se trouve sur un cercle unité. Le groupe manifold de $U(1)$ est donc S^1 . De manière similaire, pour $SU(2)$, un élément de groupe est donné par

$$\exp[i\tau^a \phi^a / f_\pi] = (\sigma + i\tau \cdot \pi) / f_\pi \quad (5.3.1)$$

avec la condition que $\sigma^2 + \pi^2 = f_\pi^2$. Les éléments de ce groupe se trouvent donc sur la surface tri-dimensionnelle d'une sphère à quatre dimensions dans l'espace (σ, π) , et est appelé S^3 .

Notez que dans le cas d'une transformation de jauge locale, les éléments du groupe

constituent un mapping. Par exemple, dans $SU(2)$,

$$h(x) = \exp[i\tau \cdot \theta(x)] \quad (5.3.2)$$

définit un mapping où tout point espace-temps x dans R^4 est associé avec un point du groupe manifold. Ce dernier, dans ce cas, est S^3 dans l'espace de l'isospin.

Il n'est pas difficile de visualiser que pour le mapping $S^1 \rightarrow S^1$, le groupe d'homotopie est $\Pi_1(S^1) = Z$, le groupe additif des entiers. C'est juste le fait de mapper les points d'un cercle sur un autre cercle, comme on peut le voir sur la Fig. 5.3, avec la condition que le point P sur le cercle 1 dans l'espace Y soit mappé au point N sur le cercle 2 dans l'espace X . Comme avant, l'élément identité, avec un nombre winding zéro, est le mapping où tous les points sur 1 sont mappés au point N . Ceci inclut tous les mappings topologiquement équivalents (couvrant la partie d'un arc sur le cercle 2 incluant le point N) qui peuvent être continûment déformés jusqu'au point N . Un mapping topologiquement distinct a winding numéro un. Pour visualiser cela, imaginez que le cercle 2 est un anneau en métal, et le mapping du cercle 1 sur le cercle 2 consiste à enrouler une corde autour de l'anneau. Si la corde est retournée un cycle complet autour de l'anneau, alors le nombre winding est un, et ce mapping ne peut être continûment déformé jusqu'au point N . Si la corde était retournée plus que une fois mais moins que deux tours complets, le mapping appartient toujours à l'élément $n = 1$. Procédant de cette manière, on voit que $\Pi_1(S^1) = Z$. Maintenant, considérons $\Pi_1(S^2)$, où S^2 peut être visualisé comme la surface à deux dimensions d'une sphère 3-D. Le mapping $S^1 \rightarrow S^2$ est comme mettre un lasso autour de la surface lisse de la sphère. Le noeud coulant peut être réduit continûment à un point en le glissant autour de la sphère, de sorte que $\Pi_1(S^2) = 0$. La topologie ici est triviale parce que S^2 est une surface simplement connecte. Pour la même raison, $\Pi_1(S^n) = 0$ pour tout entier $n > 1$. Nous résumons les résultats obtenus jusqu'à présent par les équations :

$$\Pi_1(U(1)) = \Pi_1(S^1) = Z \quad ; \quad (5.3.3)$$

$$\Pi_1(SU(2)) = \Pi_1(S^3) = 0 \quad ; \quad \Pi_1(S^n) = 0 \quad \text{pour } n > 1 \quad (5.3.4)$$

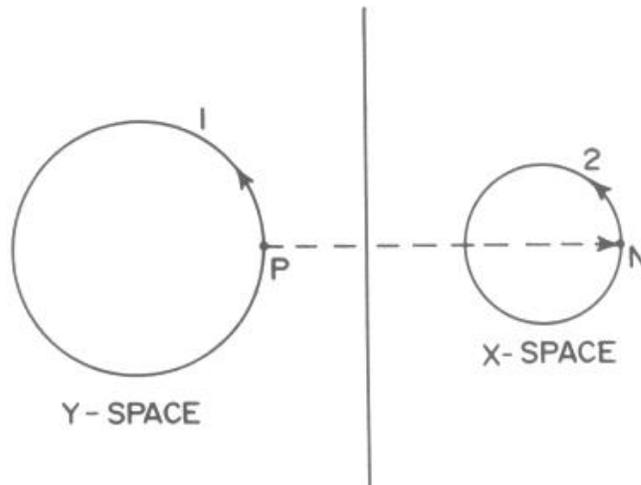


Figure 5.3: Un mapping $S^1 \longrightarrow S^1$. Le cercle 1 est dans l'espace- Y et le cercle 2 dans l'espace- X . Le point P est mappé au point N .

Quelques résultats plus généraux sont :

$$\Pi_n(S^n) = Z \quad ; \quad \Pi_n(S^m) = 0 \quad , \quad n < m \quad ; \quad (5.3.5)$$

$$\Pi_n(A \times B) = \Pi_n(A) \times \Pi_n(B) \quad (5.3.6)$$

$$\Pi_3(S^2) = \Pi_3(S^3) = Z \quad (5.3.7)$$

$$\Pi_1(SO(2)) = \Pi_1(S(1)) = Z \quad (5.3.8)$$

$$\Pi_2(S^n) = 0 \quad \text{pour } n \neq 2 \quad (5.3.9)$$

$$\Pi_3(S^n) = 0 \quad \text{pour } n \neq 2, 3 \quad (5.3.10)$$

$$\Pi_2(SU(3)) = Z \quad (5.3.11)$$

Jusqu'à présent, le rapport entre le formalisme du groupe d'homotopie et les solutions instantons de la théorie des champs n'est pas très clair, mais le problème est

éclairci dans la section suivante

5.4 La charge topologique, l'effet tunnel, et le vide-

θ

Dans cette section, nous définissons une charge topologique invariante de jauge, ou un nombre winding. Pour les configurations classiques de la théorie de Yang-Mills, cette charge topologique prend des valeurs entières. Cela peut être identifié avec le nombre winding n dans le mapping de S^3_∞ au groupe manifold S^3 . Nous discutons aussi la connection de ceci avec l'effet tunnel dans l'espace de Minkowski, et la construction des vides- θ . Des corrections quantiques dues à l'effet tunnel nous conduiront à un Lagrangien effectif qui contient un terme violant la symétrie CP . Bien que notre traitement soit pour le champ YM $SU(2)$, cela tient aussi pour $SU(N)$ avec $N > 2$ vu que $SU(2)$ est un sous-groupe de $SU(N)$. A moins qu'ils ne soient établis spécifiquement, les degrés de liberté des quarks sont ignorés dans cette présentation simplifiée.

Examinons tout d'abord l'expression du minimum de l'action Euclidienne, $(S_E)_{\text{Min}}$, qui est défini positif et correspond au mouvement classique. Pour le problème Abélien, on a (voir chapitre 2)

$$(S_E)_{\text{Min}} = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \quad (5.4.1)$$

avec $F_{\mu\nu}$ tel que $\mathbf{E} = \pm \mathbf{B}$. Mais on a

$$\frac{1}{2} F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \tilde{J}_\mu \quad (5.4.2)$$

avec

$$\tilde{J}_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu \partial_\rho A_\sigma \quad (5.4.3)$$

$$\therefore (S_E)_{\text{Min}} = \frac{1}{2} \int d^4x \partial_\mu \tilde{J}_\mu = \frac{1}{2} \int_{S^3_\infty} \tilde{J}_\mu d\sigma_\mu \quad (5.4.4)$$

où $d\sigma_\mu$ est l'élément de surface tri-dimensionnel, et l'intégrale est sur la sphère 3-D à l'infini, S_∞^3 . Pour un champ Abélien, pourtant, $F_{\mu\nu} \rightarrow 0$ à l'infini implique que $A_\mu = -\partial_\mu\chi(x)$, alors \tilde{J}_μ donné par (5.4.3) est identiquement nul sur S_∞^3 . Il s'ensuit donc que $(S_E)_{\text{Min}} = 0$ pour le problème Abélien. La théorie non-Abélienne est plus intéressante. Dans ce cas, définissons une charge topologique, invariante de jauge, q (aussi appelé l'index de Pontryagin) par l'équation

$$q = \frac{g^2}{16\pi^2} \int d^4x \text{Tr}(F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}) \quad (5.4.5)$$

De l'expression de $(S_E)_{\text{Min}}$, il vient directement que

$$(S_E)_{\text{Min}} = \frac{8\pi^2}{g^2} q \quad (5.4.6)$$

Pour le problème Abélien, vu que $(S_E)_{\text{Min}} = 0, q = 0$. Pour le cas non-Abélien, vu que le courant \tilde{J}_μ ne peut pas être nul sur S_∞^3 , q peut être non-nul. En fait, la définition (5.4.5) est telle que cela prend seulement des valeurs d'intégrales réelles, le même que le nombre winding n qui caractérisait la solution classique d'instanton. Ce n'est pas surprenant, vu que q est directement en rapport avec l'action de la trajectoire classique.

On a

$$q = \frac{g^2}{16\pi^2} \int d^4x \partial_\mu \tilde{J}_\mu = \frac{g^2}{16\pi^2} \int_{S_\infty^3} \tilde{J}_\mu d\sigma_\mu \quad (5.4.7)$$

similaire au cas Abélien. Vu que $V_\mu = -i/g(\partial_\mu h)h^{-1}$ sur S_∞^3 , on peut évaluer q en substituant ceci dans l'expression de \tilde{J}_μ . On a

$$q = \frac{1}{8\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int \text{Tr}[-(\partial_\nu h)h^{-1}\partial_\rho(\partial_\sigma h)h^{-1} + \frac{2}{3}(\partial_\nu h)h^{-1}(\partial_\rho h)h^{-1}(\partial_\sigma h)h^{-1}]d\sigma_\mu \quad (5.4.8)$$

Notez que $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}Tr(\partial_\nu h)h^{-1}(\partial_\rho\partial_\sigma h)h^{-1}$ s'annule identiquement. Plus loin,

$$-(\partial_\nu h)h^{-1}(\partial_\sigma h)(\partial_\rho h^{-1}) = -(\partial_\nu h)h^{-1}(\partial_\sigma h)h^{-1}h(\partial_\rho h^{-1}) \quad (5.4.9)$$

$$= (\partial_\nu h)h^{-1}(\partial_\sigma h)h^{-1}(\partial_\rho h)h^{-1} \quad (5.4.10)$$

vu que $hh^{-1} = 1$, et $h\partial_\rho h^{-1} = -(\partial_\rho h)h^{-1}$. On a donc

$$q = \frac{1}{8\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int Tr[(\partial_\nu h)h^{-1}(\partial_\sigma h)h^{-1}(\partial_\rho h)h^{-1} + \frac{2}{3}(\partial_\nu h)h^{-1}(\partial_\rho h)h^{-1}(\partial_\sigma h)h^{-1}]d\sigma_\mu \quad (5.4.11)$$

Interchangeant les indices σ et μ dans le premier terme,

$$q = -\frac{1}{24\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int_{S_\infty^3} Tr[(\partial_\nu h)h^{-1}(\partial_\rho h)h^{-1}(\partial_\sigma h)h^{-1}]d\sigma_\mu \quad (5.4.12)$$

Cette charge topologique q ne dépend que de l'élément de groupe $h(x)$, et non du comportement de $F_{\mu\nu}(x)$ pour un $r = (\sum_{i=1}^4 x_i^2)^{1/2}$ fini ou de la forme du Lagrangien. Dans ce sens, c'est très différent de la plus familière charge de Noether de la forme $\int j_0(\mathbf{x}, t)d^3x$ qui est déterminé par le Lagrangien. Par pure définition, q est indépendant du temps. Notons aussi de l'équation (5.4.6) que la charge topologique détermine $(S_E)_{\text{Min}}$. Cela requiert un peu plus de travail de montrer que q est le même que le nombre topologique de winding n , le nombre de fois que le groupe-manifold est recouvert quand S_∞^3 est mappé sur celui-ci. Nous clarifions pour l'instant la connexion entre la charge topologique q des instantons dans l'espace Euclidien et de l'effet tunnel dans la métrique de Minkowski.

Rappelons qu'un courant topologique \tilde{J}_μ est défini par

$$\tilde{J}_\mu = 2\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}Tr[V_\nu\partial_\rho V_\sigma - \frac{2}{3}igV_\nu V_\rho V_\sigma] \quad (5.4.13)$$

Dans l'espace de Minkowski, définissons une charge topologique $Q_T(t)$ à un temps fixé t par

$$Q_T(t) = \frac{g^2}{16\pi^2} \int \tilde{J}_0(\mathbf{x}, t) d^3x \quad (5.4.14)$$

Cette charge est seulement conservée quand $\partial_\mu \tilde{J}^\mu = 0$, i.e., quand $q = 0$ dans l'espace Euclidien, et aucune solution instanton n'existe. Pour la situation plus intéressante avec $q \neq 0$, $Q_T(t)$ n'est pas une constante. Pour une configuration générale du champ V_μ , $Q_T(t)$ doit être entier. Pour un vide, cependant, $F_{\mu\nu} = 0$ et $V_\mu = -i/g(\partial_\mu h)h^{-1}$ est un pur champ de jauge. Dans ce cas, il n'est pas difficile de montrer que $Q_T = n$, un entier, et dénote l'index de la classe d'homotopie de la transformation $h(x)$. Nous savons que $V_\mu = 0$ se transforme en une pure jauge par une transformation de jauge locale. Cela signifie qu'un vide $|0\rangle$, caractérisé par $Q_T = 0$, se transformerait en un autre vide $|n\rangle$, avec $Q_T = n$, pour les deux dont $F_{\mu\nu} = 0$. Le véritable vide est trouvé par superposition linéaire de tous les $|n\rangle$, et est invariant de jauge. C'est appelé le vide- θ .

Une relation importante entre la charge topologique conservée (ou le nombre winding) q et $Q_T(t)$ de l'éq. (5.4.14) est donnée par

$$q = Q_T(t = \infty) - Q_T(t = -\infty) \quad (5.4.15)$$

Pour voir comment ceci est possible, rappelons que q est invariant de jauge. Évaluons cela, en se servant de l'équation (5.4.7), dans la jauge $V_4 = 0$. De l'expression (5.4.13) pour \tilde{J}_μ , on voit que dans cette jauge $\tilde{\mathbf{J}} = -2(\mathbf{V} \times \partial_4 \mathbf{V})$. Pour le problème statique (x_4 fixé) ceci s'annule, et seul \tilde{J}_4 est non-nul. Plus généralement, si $\tilde{\mathbf{J}}$ s'annule

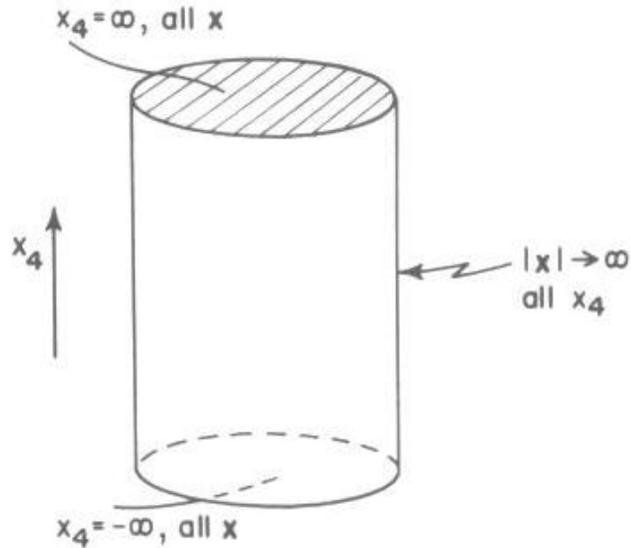


Figure 5.4: Un hypercylindre dont les surfaces représentent la frontière de l'espace-temps Euclidien à quatre dimensions. La surface courbe du cylindre est pour $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, tout temps x_4 . Les surfaces planes au sommet et à la base sont valables pour tout \mathbf{x} , en $x_4 = \infty$ et $x_4 = -\infty$ respectivement.

plus vite que $|\mathbf{r}|^{-2}$, $\int_{\sigma} \mathbf{J} \cdot d\sigma = 0$ sur une surface à l'infini. On obtient donc, de l'éq. (5.4.7)

$$q = \frac{g^2}{16\pi^2} \int_{\sigma_4} \tilde{J}_4 d\sigma_4 \quad , \quad V_4 = 0 \quad (5.4.16)$$

Ici, $\tilde{J}_4 = 2\varepsilon_{4ijk} Tr[V_i \partial_j V_k - \frac{2}{3} ig V_i V_j V_k]$, donc i, j et k peuvent seulement prendre les valeurs 1, 2 et 3. L'hypersurface σ_4 à l'infini est dirigée le long de l'axe x_4 dans l'éq. (5.4.16). Nous représentons, dans la Fig. 5.4, la frontière de l'espace Euclidien à 4-D par un hypercylindre. Seule la surface plate ombragée au sommet du cylindre est dirigée selon x_4 , tandis que la surface plate du dessous est dirigée selon $-x_4$. Seules celles-ci contribuent à l'intégrale (5.4.16) avec des signes opposés. Vu que \tilde{J}_4 est le même que \tilde{J}_0 de l'espace de Minkowski sur ces surfaces (seulement les indices spatiaux venant dans \tilde{J}_4), l'éq. (5.4.15) suit immédiatement. Cette équation est

générale, et a une signification spéciale quand les champs V_μ dans l'éq. (5.4.13) sont de jauge pure correspondant aux vides dégénérés caractérisés par l'intégrale Q_T . Soit $Q(T)(\infty) = n_2$, et $Q_T(-\infty) = n_1$, avec $n_2 \neq n_1$. Alors la solution instanton avec $q = n_2 - n_1$ correspond à un effet tunnel entre deux tels vides équivalents dans l'espace de Minkowski.

Dans la métrique de Minkowski, les vides dégénérés sont caractérisés par le nombre winding n , et dénotés par $|n\rangle$. Ces vides sont orthogonaux, $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$. L'opérateur topologique de charge Q_T est tel que $Q_T|n\rangle = n|n\rangle$. Une transformation de jauge h_1 , comme nous l'avons notée, peut être définie comme changeant $|n\rangle$ en $|n+1\rangle$, i.e. $h_1|n\rangle = |n+1\rangle$. Donc, bien que chaque $|n\rangle$ est un état propre de l'Hamiltonien H , ce n'est pas un état propre de h_1 . Mais l'Hamiltonien est un invariant de jauge, i.e., $[H, h_1] = 0$. En conséquence, le véritable état fondamental devrait être simultanément un état propre de H et de h_1 . Ce "vide- θ " peut être écrit comme

$$|\theta\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\theta} |n\rangle \quad (5.4.17)$$

où θ est un paramètre réel variant entre 0 et 2π . Il s'ensuit donc que $h_1|\theta\rangle = \sum_n e^{in\theta} |n+1\rangle = e^{-i\theta}|\theta\rangle$. Chaque valeur de θ définit un vide différent, et il est facile de voir que $\langle\theta'|\theta\rangle = 2\pi\delta(\theta' - \theta)$.

Nous avons noté auparavant que q défini précédemment est une quantité invariante de jauge. Nous notons que q reste le même que ce soit dans l'espace Euclidien ou de Minkowski :

$$q = \frac{g^2}{16\pi^2} \int d^4x \text{Tr}(F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu})_E = \frac{g^2}{16\pi^2} \int d^3x dx^0 \text{Tr}(F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}) \quad (5.4.18)$$

En théorie quantique, on pourrait regarder \hat{q} comme un opérateur de charge topologique invariant de jauge. On peut montrer que $\langle\theta'|\hat{q}|\theta\rangle = 0$ pour $\theta' \neq \theta$. Un

vide- θ a donc une charge topologique de lui-même, et est isolé des autres vides.

Le Lagrangien YM pur est pris comme

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{2}Tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \quad (5.4.19)$$

En théorie quantique, il y a un effet tunnel entre les vides dégénérés, et un vide individuel n'est pas invariant de jauge. Le vide invariant de jauge, construit par superposition, est le vide- θ . L'espace quantique de Hilbert est divisé en secteurs caractérisés par différentes valeurs de θ , chacune avec son propre vide. Le Lagrangien effectif est

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{1}{2}Tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + \theta \frac{g^2}{16\pi^2}Tr(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}) \quad (5.4.20)$$

où θ peut être vu comme le multiplicateur de Lagrange qui assure que

$$\frac{g^2}{16\pi^2}\langle\theta|Tr(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu})|\theta\rangle = q \quad (5.4.21)$$

Le dernier terme dans (5.4.20), bien que divergence à 4-D, contribue à l'action dans une théorie de jauge non-Abélienne, assurant son invariance de jauge en dépit de l'effet tunnel. Il y a un problème avec le Lagrangien (5.4.20) - il viole l'invariance de P et CP . Vu que dans notre monde, nous savons que les interactions fortes sont invariantes sous CP , le paramètre θ devrait être proche de zéro. Par exemple, l'interaction $NN\pi$ avec un terme- θ violant CP est de la forme

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\bar{\psi}_N(i g_{NN\pi}\gamma_5 + g_{NN\pi}^\theta)\tau \cdot \pi \quad (5.4.22)$$

à la place du premier terme habituel. Ici, $g_{NN\pi}^\theta \propto \theta$, et la constante de proportionnalité s'annule pour $m_u = 0$. Le terme impliquant $g_{NN\pi}^\theta$ viole visiblement la conservation de la parité, et fournit un moment dipolaire électrique $d_n \approx 5 \times 10^{-16}\theta \text{ e cm}$.

La valeur expérimentale est $\lesssim 0.6 \times 10^{-24} \text{ e cm}$, impliquant que $|\theta| < 10^{-9}$. Le problème peut alors être commencé comme : pourquoi est-ce que θ est si proche de zéro? Jusqu'à présent nous avons ignoré les quarks. En effet les différents θ deviennent équivalents l'un l'autre s'il y a au moins une saveur de quark avec une masse exactement nulle. Alors θ peut devenir zéro par une rotation chirale. En plus, l'introduction des quarks conduit à une interaction quark-quark induite par l'instanton. Cette interaction s'obtient de ce qu'on appelle le déterminant de 't Hooft. Nous ne traitons pas ce sujet en détails à cause de sa complexité.

Part IV

Conséquences de l'instanton dans la spectroscopie des hadrons

Chapter 6

Les interactions dépendantes du spin induites par les instantons

A partir du déterminant fermionique de 't Hooft mentionné dans les sections précédentes, on peut dériver une interaction effective entre les quarks qui est due à la présence des instantons. Il y a plusieurs façons d'obtenir cette interaction. La plus simple est de considérer l'action donnée par un seul instanton¹ et faire une moyenne sur sa position et l'orientation dans l'espace des couleurs. Le calcul est élaboré et nous nous limiterons à une forme très simple de cette interaction effective obtenue dans la limite non-relativiste.

L'interaction effective induite par l'instanton entre les quarks légers produit des effets fort dépendants du spin. Dans cette section, nous souhaitons comparer ces effets avec d'autres interactions dépendant du spin en QCD et étudier l'effet des instantons sur les forces dépendantes du spin. En QCD, la plus simple source d'effets dépendants du spin est l'interaction hyperfine générée par le potentiel d'échange d'un

¹D.I.Diakonov, V.Y.Petrov, Nucl.Phys **B245** 259 (1984)

gluon échangé entre deux quarks séparés par la distance r

$$V_{ij}^{\text{OGE}} = -\frac{\alpha_S}{m_i m_j} \frac{\pi}{6} (\lambda_i^a \lambda_j^a) (\vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_j) \delta^3(\vec{r}) \quad (6.0.1)$$

où λ_i^a sont les matrices de Gell-Mann de SU(3) couleur, $\vec{\sigma}_i$ les matrices de Pauli et α_S la constante de couplage fort. Cette interaction a au moins deux caractéristiques importantes : (a) Le terme $(\vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_j) (\lambda_i^a \lambda_j^a)$ est deux fois plus grand dans les mésons que dans les baryons, et (b) le rapport des forces dépendantes du spin dans un système étrange et non étrange est contrôlé par l'inverse de la masse (constituante) du quark.

Pour la comparaison, la limite non-relativiste de l'interaction effective de 't Hooft est

$$V_{ij}^{\text{inst}} = -\frac{\pi^2 \rho^2}{6} \frac{(m^*)^2}{m_i^* m_j^*} \left[1 + \frac{3}{32} (1 + 3 \vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_j) \lambda_i^a \lambda_j^a \right] \times \left(\frac{1 - \tau_i^a \tau_j^a}{2} \right) \delta^3(\vec{r}) \quad (6.0.2)$$

où m^* sont des masses effectives et ρ une densité spécifique à l'instanton. La partie dépendante du spin de V^{inst} partage clairement les caractéristiques attirantes mentionnées ci-dessus. Cependant, il y a d'importantes différences dans la dépendance de la saveur de l'échange d'un gluon et les interactions de l'instanton. En particulier, il n'y a pas d'interaction de 't Hooft entre les quarks de même saveur (uu , dd , ou ss) (voir chapitre suivant). Cependant, le potentiel fournit une valeur de la différence de masse entre N et Δ aussi bonne que l'échange d'un gluon. Ce problème sera présenté au chapitre suivant. Le potentiel induit par l'instanton a deux avantages additionnels sur le potentiel d'échange d'un gluon. Premièrement, nous ne devons pas utiliser une grande valeur inconfortable de la constante de couplage fort α_S , et le potentiel de l'instanton n'a pas de grande partie spin-orbite (non voulu phénoménologiquement). En outre, l'interaction induite par l'instanton donne une excellente description des spectres des mésons et de leurs propriétés de désintégration².

²Voir, par exemple, M.Koll, R.Ricken, D.Merten, B.Metsch, H.Petry, Eur.Phys. Journal **A9** 73 (2000)

En plus, les instantons fournissent des forces à trois corps reliées à sa nature. Ces forces agissent seulement dans les états de singulet uds , comme le singulet Λ ou l'hypothétique Λ , la particule H^3 .

Une autre question intéressante concerne les forces induites par l'instanton entre les quarks lourds. Pour les quarks lourds, la partie dominante dans l'interaction est dûe aux modes non-nuls que nous n'avons pas discuté.

Nous concluons que les instantons peuvent induire des forces dépendantes du spin requises dans la spectroscopie du quark léger sans avoir besoin des grandes valeurs de la constante de couplage de l'interaction hyperfine. Les interactions induites par les instantons ne sont pas très importants dans les systèmes de quarks lourds, mais peuvent jouer un rôle dans les systèmes lourds-légers.

Dans le chapitre suivant, nous verrons une application de l'interaction induite par l'instanton aux spectres des baryons légers.

³S.Takeuchi, M.Oka, Phys.Rev.Lett **66** 1271 (1991)

Chapter 7

Applications à la spectroscopie des hadrons

7.1 Introduction

Comme règle traditionnelle, depuis les années 70¹, pour décrire les états fondamentaux des hadrons dans les modèles de quarks, on suppose que les quarks dans les hadrons sont liés par un potentiel de confinement, et la séparation des multiplets est expliquée par l'échange d'un gluon. Cela implique une valeur plutôt grande pour la constante de couplage hyperfine α_S , et ce fait rend l'exploration des méthode de la théorie des perturbations douteuse. En outre, le dessin général des états excités des hadrons observés ne correspond pas aux prédictions théoriques des modèles de quarks en détails. Par exemple, l'ordre des niveaux bas de parité positive et négative n'est pas correctement reproduit.

Il y a quelques années, on a montré que les interactions des quarks à l'aide d'une interaction induite par l'instanton sont en effet plus essentielles pour la spectroscopie des hadrons. Ici, nous étudions l'influence de l'interaction générée par l'échange

¹A.De Rújula, H.Georgi, S.L.Glashow, Phys.Rev **D12** 147 (1975)

de fluctuation du vide sur le spectre de masse du baryon excité. Pour analyser ce problème, nous utilisons un modèle de potentiel de quarks constituants et calculons le Hamiltonien moyen dans la base des fonctions d'onde de l'oscillateur harmonique. Cette approche est très fructueuse pour décrire des systèmes de baryons à l'état fondamental et les états excités d'énergie basse avec un potentiel scalaire de confinement et permet d'utiliser la classification SU(6) non-relativiste d'une manière naturelle. Nous considérons le modèle le plus simple utilisé par Dorokhov et Martyanov². Suivant cette voie nous introduisons trois paramètres du modèle standard de potentiel pour des masses non-perturbées de multiplets non-étranges de l'état fondamental et des états excités d'énergie basse. Plus loin, nous considérons la séparation des niveaux dans le spectre. Comme interaction hyperfine, nous utilisons une expression non-relativiste pour le Lagrangien effectif de l'échange d'un instanton donné au chapitre 6 et négligeons toute correction relativiste. Nous calculons aussi les masses de l'octet fondamental des baryons. De cette manière, nous déterminons la constante caractéristique P des contributions de l'échange d'un instanton et de l'énergie constante E_0 du niveau fondamental N non-perturbé.

7.2 Modèle de quark non-relativiste

Comme Hamiltonien effectif pour les baryons, nous utilisons :

$$H^{eff} = \sum_i (m_i + \vec{p}_i^2) + \frac{K}{2} \sum_{i < j} r_{ij}^2 + U^1 + H^{inst} \quad (7.2.1)$$

où r_{ij} est la séparation entre quarks, U^1 est la partie anharmonique du potentiel de confinement et H^{inst} est défini plus bas. Ici, nous négligeons la différence de masse intrinsèque entre les quarks u et d , donc, nous sommes limités au cas

$$m_1 = m_2 = m \quad m_3 = m' \quad (7.2.2)$$

²A.E Dorokhov et V.N.Martyanov, preprint Dubna, E2-90-278

Si nous définissons

$$\vec{R} = m(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) + m'\vec{r}_2/M, \quad M = 2m + m' ; \quad (7.2.3)$$

$$\vec{\rho} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)/\sqrt{2}, \quad m_\rho = m ; \quad (7.2.4)$$

$$\vec{\lambda} = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3)/\sqrt{6}, \quad m_\lambda = 3mm'/(2m + m') \quad (7.2.5)$$

alors nous obtenons (7.2.1) sous la forme suivante

$$H_{HO} = m_1 + m_2 + m_3 + \frac{2}{3}K(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2) + \vec{P}_R^2/2M + \vec{P}_\rho^2/2m_\rho + \vec{P}_\lambda^2/2m_\lambda \quad (7.2.6)$$

La séparation du mouvement du centre de masse décrit par la variable \vec{R} mène aux équations de deux oscillateurs découplés dans les variables ρ et λ . Si les masses des quarks sont égales $m_1 = m_2 = m_3 = m_d$ le H^{HO} de (7.2.6) se transforme en

$$H_0^{HO} = -(\Delta_\rho + \Delta_\lambda)/2m_d + \frac{2}{3}K(\rho^2 + \lambda^2) + \text{constante} \quad (7.2.7)$$

La classification des états baryoniques dans le modèle des quarks avec l'Hamiltonien H_0^{HO} est bien connu. A cause de la partie couleur antisymétrique, nous cherchons des solutions qui sont totalement symétriques, sous permutation des indices, de la partie dépendant des coordonnées spatiales et de $SU(6)$ (partie spin-saveur). Pour les états fondamentaux, la partie $O(3)$ est totalement symétrique :

$$\Psi^{HO} = \frac{\alpha^3}{\pi^{3/2}} \exp(\alpha^2(\rho^2 + \lambda^2)/2) ; \quad \alpha^2 = \omega m = \sqrt{Km} \quad (7.2.8)$$

Notons H^{HO} dans (7.2.6) pour un système avec un, deux, ou trois quarks étranges par H_1^{HO} , H_2^{HO} , H_3^{HO} respectivement, de telle sorte que

$$H_s^{HO} = H_0^{HO} + H_s^{corr} \quad (7.2.9)$$

où H_s^{corr} viole la symétrie $SU(3)_{saveur}$. En conséquence, nous devons corriger les masses non-perturbées pour Λ , Σ , Ξ et Ω dans les états fondamentaux :

$$E_1^0 = E^0 + \langle \Psi^{00} | H_s^{corr} | \Psi^{00} \rangle \quad (7.2.10)$$

Un rapide calcul mène à

$$E_1^0 = E^0 + \delta_s, \quad \text{pour } \Lambda, \Sigma; \quad (7.2.11)$$

$$E_2^0 = E^0 + 2\delta_s, \quad \text{pour } \Xi; \quad (7.2.12)$$

$$E_3^0 = E^0 + 3\delta_s, \quad \text{pour } \Omega \quad (7.2.13)$$

où $\delta_s = \delta m + \omega(1-x)/2$ avec $\delta m = m_s - m_d$, $x = m_u/m_s$

7.3 Partie anharmonique du potentiel de confinement

Avant de nous tourner vers l'interaction hyperfine, nous tenons compte que les forces de confinement sont vraiment anharmoniques. Nous rappelons deux règles :

- Dans la théorie des perturbations au premier ordre, tout potentiel $U^1(r_{ij})$ sépare les énergie de l'oscillateur harmonique $N = 2$ exactement de la même manière : le multiplet dégénéré $56^+(L = 0; 2)$, $70^+(L = 0; 2)$, $20^+(L = 1)$ sont toujours

ordonnés comme³ :

$$E^2(56, 0^+) = E' - \Delta' , \quad (7.3.1)$$

$$E^2(70, 0^+) = E' - \Delta'/2 , \quad (7.3.2)$$

$$E^2(56, 2^+) = E' - 3\Delta'/5 , \quad (7.3.3)$$

$$E^2(70, 2^+) = E' - 2\Delta'/5 , \quad (7.3.4)$$

$$E^2(0, 1^+) = E' \quad (7.3.5)$$

- Et pour $E^2(20, 1^+)$, $E^2(70, 1^-)$, $E^2(56, 0^+)$, on a

$$E^2(20, 1^+) - E^1(70, 1^-) = E^1(70, 1^-) - E^0(56, 0^+) \quad (7.3.6)$$

7.4 Interaction hyperfine

Il a été montré⁴ que les caractéristiques principales du spectre des états fondamentaux des hadrons et les splittings $\pi - \rho$, $N - \Delta$ et $\eta - \eta'$ sont expliqués par l'interaction non-perturbative du quark via l'instanton. Dans la limite non-relativiste, l'interaction de 't Hooft est donné par (6.0.2). Si on considère le cas des baryons où $\langle \lambda_i^a \lambda_j^a \rangle = -\frac{8}{3}$, car chaque paire de quarks se trouve dans un état antisymétrique⁵ de couleur, l'interaction (6.0.2) devient :

$$H^{inst} = -(\eta/m_i m_j) \delta^3(\vec{\rho}_i - \vec{\rho}_j) ((1 - \vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_j)/4) ((4/3 - \tau_i^a \tau_j^a)/4) \quad (7.4.1)$$

où σ^a et τ^a sont les opérateurs de spin et de saveur, normalisés comme $Tr(\sigma^a \sigma^b) = Tr(\tau^a \tau^b) = 2\delta^{ab}$; η ne dépend pas des propriétés individuelles du quark et sa forme explicite peut se déduire de (6.0.2). Il faut noter que (7.4.1) contient deux projecteurs sur les états de spin et de saveur qui sont antisymétriques sous permutations des i-ème

³Voir par exemple N.Isgur et G.Karl, Phys.Rev. **D19** 2653 (1979)

⁴A.E.Dorokhov et N.I.Kochelev, Z.Phys **C37** 377 (1988)

⁵Voir Fl.Stancu, Group Theory in Subnuclear Physics, Oxford Press University, 1996

et j-ième indices du quark. En effet, on a

$$\frac{1}{4}(1 - \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j) = \begin{cases} 0 & \text{pour } S = 1 \\ 1 & \text{pour } S = 0 \end{cases} \quad (7.4.2)$$

où S est le spin de la paire ij et

$$\frac{4}{3} - \tau_i^a \tau_j^a = \begin{cases} 0 & \text{pour } [2]_F \\ 4 & \text{pour } [11]_F \end{cases} \quad (7.4.3)$$

ce qui indique qu'il n'y a pas d'interaction de 't Hooft entre des paires de même saveur (voir chapitre précédent).

Deux sortes de symétrie correspondent à la partie totalement symétrique de $SU(6)$ des fonctions d'onde des états fondamentaux du baryon. Ce sont 410 et 28 . Les éqs.(7.4.2) et (7.4.3) montrent que dans le premier cas où les parties spin et saveur sont symétriques, les masses des états 410 sont non-perturbés par H^{inst} . Dans le second cas, les masses sont abaissées par les contributions des instantons. Les formules (7.2.11)-(7.2.13) donnent une bonne approximation pour le spectre des masses du multiplet 410 . Dans notre modèle, la différence de masse entre $\Lambda_{\frac{1}{2}}^{1+}$ et $\Sigma_{\frac{1}{2}}^{1+}$ est expliquée de manière naturelle par la contribution de H^{inst} à $\Lambda_{\frac{1}{2}}^{1+}$ est plus grande dans $\Sigma_{\frac{1}{2}}^{1+}$ et a un signe négatif.

$$m\left(\frac{1}{2}^{1+}\right) - m\left(\Lambda_{\frac{1}{2}}^{1+}\right) = P(1 - x)/3 > 0 \quad (7.4.4)$$

P représente les contributions de l'instanton :

$$P = 3\eta \frac{\alpha^2}{m_d^2 \pi^{3/2}} \quad (7.4.5)$$

Pour avoir une bonne concordance avec les résultats expérimentaux, nous prenons

$$E^0 = 1230\text{MeV}, \quad P = 580\text{MeV}, \quad \delta = 150\text{MeV}, \quad x = 0.7 \quad (7.4.6)$$

pour calculer les masses de l'octet fondamental des baryons.

7.5 Etats excités N et Δ

Les baryons de parité négative sont associés dans ce modèle avec un 70-plet de SU(6) du premier état excité du Hamiltonien (7.2.7). Ses membres non-étranges sont :

$${}^2N(70, 1^-)J^P = \frac{1^-}{2}, \frac{3^-}{2} \quad (7.5.1)$$

$${}^4N(70, 1^-)J^P = \frac{1^-}{2}, \frac{3^-}{2}, \frac{5^-}{2} \quad (7.5.2)$$

$${}^2\Delta(70, 1^-)J^P = \frac{1^-}{2}, \frac{3^-}{2} \quad (7.5.3)$$

Pour les deux derniers cas les contributions des instantons sont annulées et ces triplet et doublet sont dégénérés. Pour (7.5.1), nous obtenons

$$\langle {}^2NJ^- | H^{inst} | {}^2NJ^- \rangle = -P/4 = -145\text{MeV} \quad (7.5.4)$$

donc, nous sommes capables d'expliquer la caractéristique principale de la situation expérimentale : la séparation entre le doublet de $N_{\frac{1}{2}}^-(1535)$, $N_{\frac{3}{2}}^-(1520)$ et la moyenne de N et Δ est égale à 1086MeV. Donc nous avons,

$$E^1(70, 1^-) = 1665\text{MeV} \quad (7.5.5)$$

Comme mentionné plus haut, le second niveau excité du modèle d'oscillateur $N = 2$ contient cinq multiplets de SU(6) non-perturbés par H^{inst} et leur masse dépend de deux paramètres $E^2(20, 1^+)$ et Δ' . De (7.3.6), (7.4.4), (7.5.5), on conclut que $E^2(20, 1^+) \simeq 2000\text{MeV}$. Voir table (7.1).

Quand $\Delta' = 200\text{MeV}$, les masses calculées sont arrangées proches des valeurs expérimentales.

State	Calculation	Exp.mass ^a	Status ^a
$N5/2^-$	1665	1660-1690	****
$N3/2^-$	1665	1670-1730	***
	1520	1510-1530	****
$\Delta3/2^-$	1665	1630-1740	***
$N1/2^-$	1665	1620-1680	****
	1520	1520-1560	****
$\Delta1/2^-$	1665	1660-1650	****
$N7/2^+$	1960 ^b	1950-2050	**
$\Delta7/2^+$	1920 ^b	1910-1960	****
$N5/2^+$	1960 ^b	1880-2175	**
	1945 ^b	
	1715 ^b	1670-1690	****
$\Delta5/2^+$	1960 ^b	2000-2200	**
	1920 ^b	1890-1920	****
$N3/2^+$	2000 ^a		
	1960 ^b		
	1945 ^b		
	1900		
	1715 ^b	1690-1800	****
$\Delta3/2^+$	1960 ^b	1860-2160	****
	1920 ^b	
	1800	1600-1700	**
$N1/2^+$	2000 ^a		
	1960 ^b		
	1750	1690-1740	***
	1410	1400-1480	****
$\Delta1/2^+$	1920 ^a	1650-1950	****
	1900	

Table 7.1:

7.6 Conclusion

Dans les dernières sections nous obtenons des résultats satisfaisants pour les masses de l'octet fondamental du baryon et pour les masses des N et Δ avec une parité négative et pour le schéma général des masses des baryons de parité positive. En outre, dans dans le second niveau excité quelques masses calculées sont très proches des baryons des masses des états observés, par exemple, à $N_{\frac{1}{2}}^{1+}$ (1440), $N_{\frac{5}{3}}^{5+}$ (1680), $N_{\frac{1}{2}}^{1+}$ (1710), $N_{\frac{3}{2}}^{3+}$ (1710) qui sont bien établis.

Dans la table (7.1), nous distinguons les états de 20-plet, et les états avec un haut moment orbital : les premiers sont des produits de la collision baryon-méson et les masses des derniers peuvent être abaissées par des corrections relativistes à l'opérateur d'énergie cinétique. A côté des paramètres standards du modèle de potentiel nous utilisons uniquement la constante pour des contributions à l'instanton. Dans notre esprit, les résultats obtenus confirment les hypothèses à propos du rôle dominant de l'interaction de l'instanton dans les effets de séparation des masses des multiplets des hadrons. Des modèles plus sophistiqués de l'interaction induite par l'instanton ont été considérés par le groupe de Bonn⁶ et par le groupe de UMH à Mons⁷ et de Grenoble. Ces derniers aboutissent à décrire convenablement les mésons et les baryons à l'aide du même modèle.

⁶Voir par exemple B.Ch.Metsch "Quark Model for Mesons and Baryons, Proceeding of the International Conference of the Structure of Baryons. Bonn, Germany, 22-26 sept 1998, World Scientific, Singapore, 1999

⁷C.Semay, F.Brau, B.Silvestre-Brac "A Unified Meson-Baryon Potential" Few-Body Systems Suppl. **14** 45 (2003)

Part V
Résumé

Il est clair que pour pouvoir décrire la phénoménologie des hadrons, la méthode des perturbations en QCD n'est pas suffisante. Avec la découverte fascinante de l'instanton, on peut avoir une meilleure compréhension du vide de la QCD et de certaines propriétés des hadrons et de leurs interactions. Les instantons sont des fluctuations larges, non perturbatives du champs gluonique dans le vide de la QCD.

Ce travail avait pour but de comprendre ce qu'est l'instanton et de faire, dans la mesure du possible, une synthèse de travaux sur l'instanton et ses applications en spectroscopie hadronique. La solution instanton apparaît dans la formulation Euclidienne (temps imaginaire) d'un Lagrangien et elle revêt un aspect extrêmement complexe. Pour faciliter notre compréhension et celle du lecteur, nous avons décidé de présenter l'instanton dans le contexte de la mécanique quantique, dans un premier temps. Il apparaît en rapport avec l'effet tunnel et l'approximation semi-classique. Formuler l'approximation semi-classique par la méthode de l'intégrale de chemin nous a semblé la manière la plus adéquate d'obtenir la solution instanton. Quoique cette partie de notre travail a plutôt un aspect pédagogique, elle nous a aidé à comprendre l'apparition de la solution instanton et de ses propriétés. Nous avons décrit les solutions instanton et anti-instanton, dans un potentiel à double puits, et nous avons discuté le gaz dilué d'instantons.

Les instantons sont maintenant clairement vus lors des simulations numériques de la QCD sur réseaux. On peut estimer la taille de l'instanton, de l'ordre de $\rho \simeq 0.36\text{fm}$, et la séparation moyenne entre deux instantons, $R \simeq 0.89\text{fm}$ ⁸. Ces résultats sont en accord avec ceux obtenus auparavant de manière analytique⁹ à partir du principe variationnel de Feynman. En effet, Diakonov et ses collaborateurs ont montré que les instantons dans le vide de la QCD forment un ensemble grand canonique de particules en interaction et leur fonction de partition s'approche de celle d'un liquide.

⁸M.C.Chu, J.M.Grandy, S.Huang, J.W.Negele, Phys.Rev **D49** 6039 (1994)

⁹D.Diakonov, V.Petrov, Nucl.Phys. **B245** 259 (1984)

D.Diakonov, M.Polyakov, C.Weiss, Nucl.Phys. **B461** 539 (1996)

Cette propriété est extrêmement intéressante mais nous avons considéré que son étude dépasse le but de ce mémoire.

Enfin, tout en étant conscient de son succès remarquable, nous n'avons pas présenté non plus l'étude des mésons basée sur l'interaction hyperfine induite par l'instanton.

Bibliography

- [1] *Mécanique quantique*
C.Cohen-Tannoudji, B.Diu, F.Laloë
Hermann, Paris 1973
pour le chapitre 1

- [2] *Quantum Field Theory*
C.Itzykson, J.-B.Zuber
McGraw-Hill, New-York, 1980
pour le chapitre 2

- [3] *Quantum mechanics*
L.I.Schiff
International Student Edition (1968)
pour le chapitre 3

- [4] *ABC of instantons*
A.I.Vainshtein, V.I.Zakhavov, V.A.Novikov et M.A.Schifman,
Sov.Phys.Usp. **25** 195 (1982)
pour les chapitres 4 et 5

- [5] *Models of the Nucleon*
R.K.Bhaduri,
Addison Wesley, New-York, 1988
pour le chapitre 5

- [6] *A Primer on Instantons in QCD*
H.Forkel,
lecture notes given at the "12th Workshop on Hadronic Interactions" at the
IF/UERJ, Rio de Janeiro (31.5-2.6.2003)
hep-ph/0009136
pour les chapitres 4 et 5
- [7] T.Schäfer, E.V.Shuriak,
Rev.Mod.Phys. **70** 323 (1998)
pour le chapitre 6
- [8] *A potential quark model with instanton interaction*
A.E.Dorokhov, V.N.Martyanov
(1990)
pour le chapitre 7
- [9] *Group Theory in Subnuclear Physics*
Fl.Stancu
Oxford University Press, Oxford 1996
pour les chapitres 6 et 7