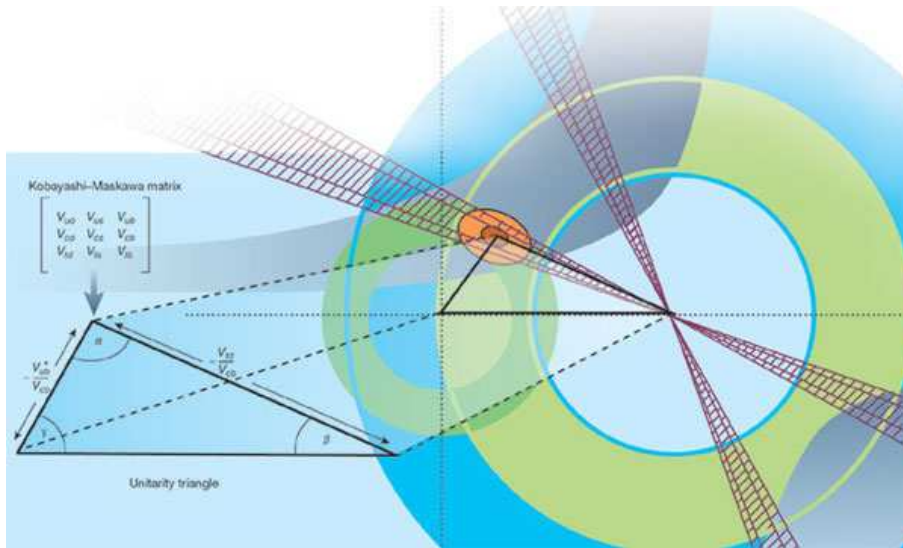


UNIVERSITÉ DE LIÈGE
FACULTÉ DES SCIENCES



ANNÉE ACADÉMIQUE 2006-2007

Mélange des saveurs selon le modèle standard



MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE
DE L'OBTENTION DU GRADE
DE LICENCIÉ EN SCIENCES PHYSIQUES

Fontaine Denis

Remerciements

Je voudrais, en particulier, remercier Jean-René Cudell pour sa patience, son intérêt ainsi que pour ses nombreux conseils pendant la durée de ce mémoire. Je voudrais également le remercier de m'avoir montré la beauté et l'attrait de cette partie de la physique. Je remercie aussi tous les professeurs, qui de part leurs enseignements, m'ont permis d'arriver jusqu'ici.

Je remercie Alice, Cédric, Jérémie et Sophie qui, avec beaucoup de peine, ont réussi à me supporter et m'ont apporté de nombreux conseils, de nombreux sourires et une dépendance au café, ou plutôt aux pauses café. Je n'échapperai pas aux traditionnels remerciements à la famille et aux amis, nul besoin de dire pourquoi. Je remercie également tout ceux que j'ai oubliés.

Chapitre 1

Introduction et position du problème

Pour modéliser une réalité physique on construit souvent le modèle le plus simple et le plus élégant possible, c'est-à-dire le plus symétrique. Certaines des symétries sont purement mathématiques et ne reflètent pas la réalité physique. Dans ce cas, il existe une infinité de modèles mathématiques correspondant à la réalité physique, il y a donc redondance dans la description du système. En général, ces modèles mathématiques sont reliés les uns avec les autres par ce que l'on appelle une transformation de jauge. Les moins familiers avec ce genre de formalisme se rappelleront que dans l'électromagnétisme les potentiels scalaires et vectoriels ne sont pas uniques. On peut effectivement, sans modifier la physique, choisir une jauge dans laquelle la formulation mathématique sera plus simple. Les théories qui modélisent les quatre forces de la nature sont toutes construites à partir de ce principe d'invariance de jauge et le lagrangien qui les caractérise est invariant sous de telles transformations. Le modèle qui décrit l'interaction faible et électromagnétique ne fait pas exception et, lors de son élaboration, il y eut de sérieux problèmes pour modéliser des particules massives. En effet, pour générer la masse des particules, il faut ajouter un terme de masse au lagrangien. Ce terme étant du type $m\bar{\psi}\psi$, il implique un couplage entre les particules lévogyres et dextrogyres alors que l'interaction faible ne considère pas ces deux états comme équivalents¹. L'ajout de ce terme de masse au lagrangien brise l'invariance de jauge électrofaible.

On chercha longtemps le moyen de générer la masse des particules sans briser l'invariance de jauge du lagrangien. Ce fut chose faite par l'intermédiaire de ce qu'on appelle une brisure spontanée de symétrie. Pour obtenir un tel mécanisme, il faut tout d'abord supposer l'existence d'un champ supplémentaire. De plus, le terme de couplage de ce champ doit être tel qu'une fois ajouté au lagrangien, il ne brise pas son invariance de jauge. Enfin, il faut que ce champ acquière une valeur moyenne dans le vide non nulle pour que l'état fondamental soit dégénéré. Cette dégénérescence impose un choix particulier pour l'état fondamental, ce qui mène à la brisure spontanée de symétrie. On peut donc, par ce mécanisme, générer la masse des particules en préservant l'invariance de jauge du lagrangien même si cette masse impose la perte explicite de l'invariance de jauge dans les solutions.

¹La structure des courants chargés de l'interaction faible est telle qu'elle agit uniquement sur les particules lévogyres.

Un monde sans masse est décrit à l'aide de seulement quelques paramètres et de manière simple et symétrique, les différentes générations de particules étant alors équivalentes. Une fois la masse des particules ajoutée au modèle par le mécanisme de brisure spontanée de symétrie, le nombre de paramètres augmente significativement. La symétrie de départ est alors brisée et les trois générations de quarks ne sont plus équivalentes. Les quarks d'une génération peuvent, par l'interaction faible, se transformer en quarks d'une autre génération, c'est le mélange des saveurs, conséquence de la génération de masse. Le mélange des saveurs des quarks est décrit par la matrice de Cabibbo, Kobayashi et Maskawa ou matrice CKM. Il exprime le fait que les états propres de l'interaction forte ne sont pas ceux de l'interaction faible. La matrice CKM décrit, quant à elle, quelle combinaison linéaire des états propres de l'interaction forte il faut prendre en compte pour obtenir ceux de l'interaction faible. Le mélange des saveurs des leptons est, quant à lui, décrit par la matrice de Maki, Nakagawa et Sakata où MNS [1].

Le modèle décrivant des particules non massives contient trois paramètres, les constantes de couplage e , $\sin \theta_W$ et g^2 , alors que le mécanisme de génération de masse apporte vingt-deux nouveaux paramètres supplémentaires. Il faut donc vingt-cinq paramètres pour obtenir une théorie décrivant des particules massives. Parmi ces paramètres se trouvent les six masses des quarks et les six masses des leptons qui ne sont donc pas données par la théorie. Il y a également la masse du boson W et du boson de Higgs qui est la particule résultant de la brisure spontanée de symétrie et qui, rappelons-le, n'a toujours pas été découverte. Les huit derniers paramètres sont ceux décrivant le mélange des saveurs et sont contenus dans la matrice CKM et la matrice MNS.

Alors qu'une théorie sans masse ne permet que les transitions d'un membre d'un doublet d'isospin à l'autre (comme dans la désintégration beta), il existe, dans la théorie massive, un mélange des saveurs qui s'effectue par l'intermédiaire de courants faibles chargés, c'est-à-dire par les bosons de jauge W^+ et W^- . Chaque quark a la possibilité de se transformer, par l'intermédiaire des bosons W^\pm , en trois quarks différents et la probabilité des processus est caractérisée par les éléments de la matrice CKM. Il n'existe pas de mélange des saveurs sans modification de charge, c'est-à-dire par l'intermédiaire des courants neutres du Z^0 . D'un point de vue historique, le premier à avoir introduit le mélange des saveurs était N. Cabibbo en 1963 [2]. Son but était d'établir l'universalité de l'interaction faible tout en expliquant les réactions dans lesquelles le nombre quantique d'étrangeté n'est pas conservé. En effet, le taux de désintégration dans ce type de réactions est beaucoup plus faible que dans les réactions où l'étrangeté est conservée. Cela laissait supposer que l'interaction faible agissait sur les particules de différentes manières et donc l'existence de plusieurs constantes de couplage. Le modèle de Cabibbo permet d'expliquer les changements de saveurs entre les quarks u , d , c et s^3 et de rétablir l'universalité de l'interaction faible. Le problème est que, dans cette théorie, le mélange des saveurs est introduit de manière empirique afin de correspondre avec l'expérience. De plus, comme dans toutes les théories à ce moment-là,

² g représente la constante de couplage de couleur de l'interaction forte.

³Les deux autres quarks n'étaient pas encore connus.

les particules sont dépourvues de masse.

En 1964, Brout, Englert et Higgs [3] permettent d'ajouter au modèle la masse des bosons de jauge W^\pm et Z par l'intermédiaire d'une brisure spontanée de symétrie. Le mécanisme porte désormais leurs noms. Il faudra attendre 1967 pour que Weinberg [4] et Salam [5] introduisent, par le même mécanisme⁴, une masse aux fermions. Cette génération de masse a pour conséquence le mélange des saveurs, qui n'est donc plus introduit de manière empirique mais est la conséquence de la génération de masse des fermions.

En 1973, Kobayashi et Maskawa prédirent une troisième génération en démontrant que l'apport de celle-ci permettait d'expliquer, à partir de considération sur la matrice de Cabibbo, la violation CP observée dans la désintégrations du kaon [6]. La théorie à quatre quarks fut alors étendue à six quarks lorsque, en 1979, le cinquième quark, appelé bottom, fut observé [7].

Pour bien comprendre le modèle et le valider, il est important de déterminer les différents paramètres qu'il contient avec la plus grande précision. De nombreuses expériences ont lieu dans ce but et ce mémoire sera consacré au mélange des saveurs et en particulier à la matrice de Cabibbo, Kobayashi et Maskawa et à ses quatre paramètres.

Pour cela, nous allons dans un premier temps montrer où en était la théorie avant que l'on obtienne la matrice CKM. Ce sera, avec l'exposé des problèmes rencontrés par cette théorie, la principale préoccupation du chapitre un. Dans le chapitre deux, nous introduirons le formalisme nécessaire ainsi que le mécanisme de Brout-Englert-Higgs. Nous obtiendrons ensuite la matrice CKM et discuterons de ses diverses conséquences. Nous montrerons également que la théorie obtenue résoud les nombreuses difficultés rencontrées par la théorie précédente. Le chapitre trois se consacrera aux propriétés fondamentales de la matrice CKM, différentes paramétrisations seront également introduites. Nous introduirons ensuite une représentation particulière de la matrice CKM, les triangles d'unitarité. La fin du mémoire sera tout particulièrement consacré à l'obtention des éléments de la matrice CKM. Dans le chapitre quatre, nous utiliserons le principe de la bidiagonalisation pour obtenir, à partir du programme symbolique REDUCE [8], les éléments de la matrice CKM. Le chapitre cinq se consacrera à l'étude de processus de désintégrations semileptoniques afin d'obtenir l'élément de matrice V_{cb} . Enfin, le dernier chapitre rapportera les dernières méthodes d'obtention des éléments de la matrice de Cabibbo, Kobayashi et Maskawa.

Avant d'introduire le mélange des saveurs, nous devons présenter la situation dans laquelle se trouvait la physique des particules dans le passé afin d'avoir une vue globale sur les problèmes rencontrés par la théorie de l'époque et ainsi permettre de voir comment le mélange des saveurs les résoud. Nous allons commencer par planter le décor dans lequel se trouvaient les physiciens des années soixante, et par montrer les problèmes qu'ils rencontraient pour reproduire les résultats expérimentaux et les solutions trouvées. Nous montrerons que les solutions ne sont pas suffisantes et qu'un défaut subsistera dans la théorie puisque celle-ci sera dans l'impossibilité d'expliquer la masse des différentes parti-

⁴Comme nous le verrons, le mécanisme est le même mais il faudra supposer une interaction supplémentaire entre le champ de Higgs et les fermions.

cules qui nous entourent.

1.1 La scène

Dans les années cinquante, les physiciens s'intéressèrent beaucoup à un nouveau type de particules, toujours produites par paires dans des processus d'interaction forte mais qui se désintègrent par l'interaction faible. Le comportement différent de ces particules poussa les physiciens à les nommer particules étranges. Nous avons par exemple le processus d'interaction forte suivant :



L'expérience montre que, bien que les particules K^+ et Σ^- soient produites par l'interaction forte, elles ne peuvent se désintégrer que par l'interaction faible. Les processus sont, par exemple, les suivants :



Ce comportement étrange sera expliqué par M. Gell-Mann, qui introduit le nombre quantique S , l'étrangeté [9]. Pour être en accord avec les observations, ce nouveau nombre quantique doit être conservé par l'interaction forte mais pas par l'interaction faible. Cela permet alors de comprendre, a posteriori, pourquoi ces particules sont produites par paires. En effet, les particules K et Σ se voyant octroyer, en valeur absolue, un nombre quantique d'étrangeté de 1, il faut que l'une d'elles soit $S = 1$ et l'autre $S = -1$ pour conserver l'étrangeté de l'équation (1.1). Nous avons :

$$\begin{array}{ccccccc} \pi^- & + & p & \rightarrow & K^+ & + & \Sigma^- \\ S = & 0 & 0 & & +1 & & -1 \end{array} \quad (1.3)$$

où le nombre quantique d'étrangeté est attribuée aux particules étranges de manière à correspondre avec les nombreuses désintégrations observées. Le kaon et le sigma ne peuvent se désintégrer par l'interaction forte en d'autres particules étranges pour des raisons de masse. Elles peuvent donc uniquement se désintégrer par des processus d'interaction faible qui ne conservent pas l'étrangeté comme par exemple ceux de l'équation (1.2).

Il reste cependant certains problèmes importants qui demeurent sans aucune explication, entre autres :

1. Les réactions de désintégration où l'étrangeté n'est pas conservée, $\Delta S = 1$, sont connues mais il n'existe aucun processus physique qui permette de les expliquer.
2. Les transitions où l'étrangeté n'est pas conservée ont un taux de l'ordre de vingt fois inférieur aux taux de désintégration où l'étrangeté est conservée. Cela laisse supposer l'existence de deux constantes de couplage différentes pour l'interaction faible qui ne serait donc pas universelle.

3. Les transitions $u \rightarrow d$ et $e \rightarrow \nu_e$ sont du même ordre de grandeur mais celles des quarks paraissent un peu plus faibles que celles des leptons.

Une solution est apportée par N. Cabibbo en 1963 [2], son modèle est équivalent⁵ à considérer que les quarks d et s impliqués dans les processus d'interaction faible ont subi une rotation⁶ d'un angle θ_c . Nous avons :

$$\begin{pmatrix} u \\ d_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ d \cos \theta_c + s \sin \theta_c \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

avec le paramètre θ_c appelé angle de Cabibbo, qui vaut approximativement 13° . Les transitions $u \rightarrow d$ et $e \rightarrow \nu_e$ sont bien du même ordre de grandeur puisque la première transition suit le même processus de désintégration que la seconde à un facteur $\cos^2 \theta_c$ près, qui est proche de 1 vu la valeur de l'angle de Cabibbo. Le troisième point est donc expliqué. La suppression des processus où $\Delta S = 1$ est également expliquée par la faible valeur de θ_c puisque ces processus sont proportionnels à $\sin^2 \theta_c$. Ceci résout le deuxième problème. En contrepartie à ces explications, le modèle apporte une difficulté supplémentaire car il permet des changements de saveurs entre quarks par les courants neutres. Or de tels changements de saveur sans modification de charge ne sont pas observés.

Ce problème fut résolu par S. Glashow, J. Iliopoulos et L. Maiani (GIM) [12] qui démontrèrent que si les quarks étaient rassemblés par familles en doublet d'isospin, alors il n'y aurait aucun courant neutre impliquant un changement de saveurs. Ils supposèrent alors l'existence d'un quatrième quark pour compléter le doublet d'isospin et la théorie fut généralisée pour considérer le mélange entre deux familles de quarks organisée en doublet. Nous avons :

$$\begin{pmatrix} c \\ s_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ s \cos \theta_c - d \sin \theta_c \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

qui peut être écrit avec le mélange de l'équation (1.4) sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} d_c \\ s_c \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

où V est la matrice de Cabibbo,

$$V = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

qui caractérise la rotation des états de quarks d et s . On découvrit un peu plus tard le quark charmé, c , qui pouvait effectivement se désintégrer en quark d ou s , ce fut le succès de la théorie de Cabibbo et de GIM. Les transitions possibles sont représentés sur la figure (1.1) avec leurs proportionnalité.

⁵Quand Cabibbo a écrit son article en 1963, l'existence des quarks n'était pas encore connue puisque celle-ci fut proposée par G. Zweig [10] et M. Gell-Mann [11] en 1964. Cabibbo ne modifia donc pas les états de quarks dans son article mais ses idées reviennent à celles que nous allons exposer ici.

⁶Cette rotation n'a pas lieu sur l'espace physique mais sur l'espace des états de quarks.

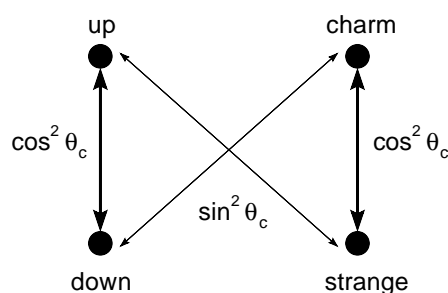


FIG. 1.1 – Transitions permises dans le modèle de Cabibbo à deux générations.

1.2 Les problèmes

Le modèle de Cabibbo permet d'obtenir un mélange des saveurs en modifiant les doublets d'isospin de l'interaction faible mais ce mélange est introduit de manière purement empirique dans la théorie. Même s'il semble que la théorie contienne bien ce type de mélange, elle est incapable d'en expliquer la cause et le mécanisme. Le premier point n'est donc pas tout-à-fait résolu. De plus, la théorie ne prédit pas de violation CP alors que celle-ci est observée dans la désintégration du kaon. Il faudra pour cela attendre les travaux de Kobayashi et Maskawa [6] qui montrèrent que la violation CP pouvait être obtenue dans le cadre d'une théorie contenant trois générations. Cette troisième génération sera découverte quelques années plus tard.

De plus, tous ceux qui tentèrent à l'époque de décrire la physique des particules se heurtèrent au même problème : on ne peut décrire des particules massives en gardant le principe de base de la théorie, l'invariance de jauge. Les modèles décrivent donc très bien les interactions entre particules tant que celles-ci restent sans masse.

C'est dans ce cadre théorique que les physiciens restèrent bloqués pendant plusieurs années et c'est à partir d'ici que notre discussion commencera afin de résoudre le premier point et le problème lié à la masse des particules.

Il faut noter que, dans ce qui suit, nous nous baserons directement sur une théorie à six quarks alors que les travaux de Weinberg et Salam, qui furent les premiers à introduire la masse des fermions par une brisure spontanée de symétrie, considéraient uniquement les quarks u , d , c et s .

Chapitre 2

La matrice CKM

Lorsque N. Cabibbo introduit un angle de mélange entre les états de quark d et s en 1963, il voulait expliquer les désintégrations par interaction faible où le nombre quantique d'étrangeté n'est pas conservé. La matrice CKM est une généralisation de ce mélange d'états propres de quarks, mais est obtenue par une toute autre logique. Nous allons montrer qu'elle provient de la génération de masse des quarks et qu'elle est donc une conséquence de ce qu'on appelle une brisure spontanée de symétrie.

Dans ce chapitre, nous exposerons le point de départ théorique nécessaire à l'introduction de la matrice CKM, ensuite nous expliquerons le mécanisme qui mène à une brisure spontanée de symétrie. Nous utiliserons alors ce mécanisme dans le but de donner une masse aux quarks, ce qui nous mènera à un mélange d'états propres de quarks caractérisé par une matrice que l'on appelle matrice CKM.

2.1 Le modèle non brisé

L'électromagnétisme fut la première interaction que l'on décrit comme théorie de jauge. Le lagrangien donnant l'interaction du champ électromagnétique, A_μ , avec un champ fermionique, ψ , est :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu)\psi. \quad (2.1)$$

Le tenseur de champ électromagnétique et la dérivée covariante respectivement

$$F_{\mu\nu} = D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu, \quad (2.2)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu Q, \quad (2.3)$$

où Q est l'opérateur charge électrique¹. La théorie est basée sur le principe d'invariance de jauge qui stipule que le lagrangien est invariant pour un changement de phase local du

¹ $Q\psi = -\psi$ pour des particules chargées négativement.

type :

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow U(x)\psi(x), \\ A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x),\end{aligned}\tag{2.4}$$

avec

$$U(x) = \exp(-ieQ\alpha(x)),\tag{2.5}$$

et α une fonction de x , réelle et arbitraire. On dit alors que le lagrangien est invariant sous les transformations de jauge locales de type $U(1)$. A cause de la symétrie continue, il existe une quantité physique conservée, c'est la charge électrique. Il en résulte ce que l'on appelle maintenant l'électrodynamique quantique ou QED, théorie qui décrit les phénomènes électromagnétiques par l'échange de photons. Ces particules sont des bosons de jauge non massifs.

Nous pouvons généraliser ce principe pour obtenir une théorie de jauge qui décrit l'interaction faible. Les champs \mathbf{W}_μ seront l'équivalent du champ A_μ , $\mathbf{W}_{\mu\nu}$ remplace $F_{\mu\nu}$ et l'opérateur d'isospin \mathbf{T} sera l'équivalent de l'opérateur charge électrique Q . Les caractères gras représentent les vecteurs à trois composantes de l'espace d'isospin. Le lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\mathbf{W}_{\mu\nu}\cdot\mathbf{W}^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu)\psi,\tag{2.6}$$

avec le tenseur de champ et la dérivée covariante qui sont respectivement,

$$\mathbf{W}_{\mu\nu} = D_\mu\mathbf{W}_\nu - D_\nu\mathbf{W}_\mu,\tag{2.7}$$

$$D_\mu = \partial_\mu + ig\mathbf{W}_\mu\cdot\mathbf{T},\tag{2.8}$$

Les opérateurs d'isospin vérifient

$$[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk}T_k,\tag{2.9}$$

ce qui permet d'écrire $\mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma}/2$ avec $\boldsymbol{\sigma}$ qui représente les matrices de Pauli. Le groupe est donc non abélien car ses opérateurs ne commutent pas entre eux. Le lagrangien de l'équation (2.6) est invariant sous les transformations de jauge locales suivantes :

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow U(x)\psi(x), \\ \mathbf{W}(x)\cdot\mathbf{T} &\rightarrow U(x)\mathbf{W}(x)\cdot\mathbf{T}U^{-1}(x) + \frac{i}{g}[\partial_\mu U(x)]U^{-1}(x),\end{aligned}\tag{2.10}$$

avec

$$U(x) = \exp(-ig\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{\alpha}(x)),\tag{2.11}$$

et $\boldsymbol{\alpha}(x)$ arbitraire. Le groupe de symétrie qui caractérise cette interaction est le groupe $SU(2)$, qui est comme nous l'avons dit non abélien vu (2.9). Cette fois, la quantité conservée par la symétrie est l'isospin faible T_3 .

En partant de ces deux théories, nous pouvons créer un modèle basé sur une symétrie de jauge locale, de type $SU(2)_L \times U(1)_Y$, qui permettra de décrire les interactions électromagnétique et faible. L'indice L indique que seuls les fermions lévogyres sont impliqués dans les courants chargés de l'interaction faible et Y est l'hypercharge faible, nombre quantique conservé par l'interaction électromagnétique et défini comme suit :

$$Q = T_3 + \frac{1}{2}Y. \quad (2.12)$$

Le lagrangien de ce modèle, dit non brisé, est le suivant :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\mathbf{W}^{\mu\nu} \cdot \mathbf{W}_{\mu\nu} - \frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} + \bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu\psi, \quad (2.13)$$

avec

$$B_{\mu\nu} = D_\mu B_\nu - D_\nu B_\mu, \quad (2.14)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + ig\mathbf{W}_\mu \cdot \mathbf{T} + ig'\frac{1}{2}B_\mu Y. \quad (2.15)$$

où B_μ est l'équivalent du champ de jauge A_μ , $B_{\mu\nu}$ remplace $F_{\mu\nu}$.

Nous allons maintenant, sans trop de détails, unifier les interactions électromagnétique et faible². Définissons les opérateurs d'échelle $T^\pm = (T_1 \pm iT_2)/\sqrt{2}$ ainsi que les champs A et Z de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} W_3 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & \sin\theta_W \\ -\sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ A \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

θ_W est l'angle de mélange électrofaible. Nous pouvons alors écrire le terme d'interaction $\bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu\psi$ du lagrangien (2.13) comme :

$$\mathcal{L}_{int} = eJ_{em}^\mu A_\mu + \frac{g}{\sqrt{2}}(J_L^{+\mu}W_\mu^+ + J_L^{-\mu}W_\mu^-) + g_Z J_Z^\mu Z_\mu, \quad (2.17)$$

où

$$J_L^{\pm\mu} = \sqrt{2}\bar{\psi}\gamma^\mu T_L^\pm\psi, \quad (2.18)$$

$$J_Z^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu[T_{3L} - \sin^2\theta_W Q]\psi, \quad (2.19)$$

$$J_{em}^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu Q\psi, \quad (2.20)$$

$$g = \frac{e}{\sin\theta_W}, \quad (2.21)$$

$$g_Z = \frac{e}{\sin\theta_W \cos\theta_W}, \quad (2.22)$$

²Il faut pour cela que le terme électromagnétique soit contenu dans le courant neutre et les définitions découlent de cette contrainte.

soit sous la forme de courants électromagnétique, chargé et neutre. La dérivée covariante de l'équation (2.15), peut s'écrire en fonction des champs A et Z :

$$D_\mu = \partial_\mu + ieQA_\mu + i\frac{1}{\sqrt{2}}g(\tau^+W_\mu^+ + \tau^-W_\mu^-) + ig_Z(\frac{1}{2}\tau_3 - \sin^2\theta_W Q)Z_\mu. \quad (2.23)$$

Le lagrangien (2.13) est invariant sous les transformations de jauge locales infinitésimales de $SU(2)_L$ et $U(1)_Y$. Les transformations sont équivalentes aux Eqs (2.4) et (2.10) :

$SU(2)_L$	$U(1)_Y$	(2.24)
$\psi_L \rightarrow [1 - ig\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{\alpha}(x)]\psi_L$	$\psi_L \rightarrow [1 - ig'\frac{1}{2}Y\beta(x)]\psi_L$	
$\psi_R \rightarrow \psi_R$	$\psi_R \rightarrow [1 - ig'\frac{1}{2}Y\beta(x)]\psi_R$	
$\mathbf{W}_\mu \rightarrow \mathbf{W}_\mu + \partial\boldsymbol{\alpha}(x) - ig\boldsymbol{\alpha}(x) \times \mathbf{W}_\mu$	$\mathbf{W}_\mu \rightarrow \mathbf{W}_\mu$	
$B_\mu \rightarrow B_\mu$	$B_\mu \rightarrow B_\mu + \partial_\mu\beta(x)$	

Finalement, nous obtenons une théorie invariante de jauge qui décrit l'interaction électrofaible par l'échange de quatre bosons de jauge W^+ , W^- , Z et A . Ces bosons de jauge sont comme nous l'avons dit sans masse, tout comme les champs fermioniques. Or l'expérience³ montre que les fermions et certains bosons de jauge ont une masse, le modèle n'est donc pas complet. Pour obtenir des masses à partir de ce modèle nous pouvons ajouter un terme de masse pour les champs fermioniques, sous la forme $m^2\bar{\psi}\psi$. Puisque les champs peuvent se décomposer en une partie lévogyre et une autre dextrogyre de la façon suivante :

$$\psi = (P_L + P_R)\psi = \psi_R + \psi_L, \quad (2.25)$$

le terme de masse peut s'écrire :

$$m\bar{\psi}\psi = m\bar{\psi}(P_R + P_L)\psi = m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L). \quad (2.26)$$

Les particules lévogyres sont donc couplées aux dextrogyres et cela brise l'invariance de jauge soit la symétrie $SU(2)_L \times U(1)_Y$. En effet, dans les Eqs. (2.24), la partie dextrogyre et la partie lévogyre ne se comportent pas de la même façon, il en résulte qu'un tel couplage brise la symétrie. Pour générer les masses, la solution serait d'ajouter un terme au lagrangien qui ne brise pas l'invariance de jauge mais qui apporte quand même une masse aux particules. Le résultat final ne serait donc pas invariant de jauge, à cause de la masse, mais le lagrangien garderait sa symétrie. On parle alors de brisure spontanée de symétrie. Même si le principe est là, la solution n'est pas simple et c'est R. Brout, F. Englert et P. W. Higgs qui trouvèrent en 1964 le mécanisme qui apporte une masse aux bosons de jauge intermédiaires [3, 13].

2.2 Mécanisme de Brout-Englert-Higgs

Nous allons ici expliquer quel est le principe de ce mécanisme pour pouvoir ensuite l'appliquer à la génération de masse des fermions et en particulier des quarks.

³Théoriquement, le fait que la portée de l'interaction faible soit finie présuppose que les particules médiatrices de la force aient une masse.

Soit un champ scalaire, doublet de $SU(2)$, de la forme :

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

avec ϕ^+ et ϕ^0 des champs complexes. Ajoutons le terme suivant au lagrangien (2.13) du modèle non brisé :

$$\mathcal{L}_\Phi = |D_\mu \Phi|^2 - V(|\Phi|^2), \quad (2.28)$$

où

$$V(|\Phi|^2) = (\mu^2 |\Phi|^2 + \lambda |\Phi|^4), \quad (2.29)$$

est bien invariant sous les transformations de jauge (2.24). Nous avons deux nouveaux paramètres, $\lambda > 0$ et μ quelconque.

D'un point de vue classique, pour $\mu^2 > 0$, l'état de plus basse énergie correspond à l'annulation des champs, il ne peut y avoir de brisure spontanée de symétrie. Par contre, pour $\mu^2 < 0$, l'état fondamental de $|\Phi|^2$ n'est pas unique et est obtenu par :

$$\frac{\delta \mathcal{L}_\Phi}{\delta(\Phi^\dagger \Phi)} = 0, \quad (2.30)$$

soit

$$\Phi_0 = \left(-\frac{\mu^2}{2\lambda}\right)^{1/2} e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad (2.31)$$

qui correspond à un cercle d'états fondamentaux dégénérés, représenté sur la figure (2.1).

Tous les états fondamentaux étant équivalents, nous pouvons prendre $\theta = 0$ et cela a pour effet de choisir une direction privilégiée pour l'état fondamental. Le lagrangien n'ayant pas de direction privilégiée, nous obtenons une brisure spontanée de symétrie.

Après quantification, on peut montrer que si la valeur moyenne dans le vide de Φ est non nulle soit [14] :

$$\langle 0 | \Phi(x) | 0 \rangle = \Phi_0, \quad (2.32)$$

nous avons une brisure spontanée de symétrie. C'est l'équivalent quantique de (2.31). La dégénérescence de l'état fondamental va nous amener à choisir une direction privilégiée pour celui-ci alors que le lagrangien n'en a aucune. Nous utiliserons par la suite la valeur moyenne dans le vide, v , définie comme suit :

$$\frac{v}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{\mu^2}{2\lambda}\right)^{1/2}. \quad (2.33)$$

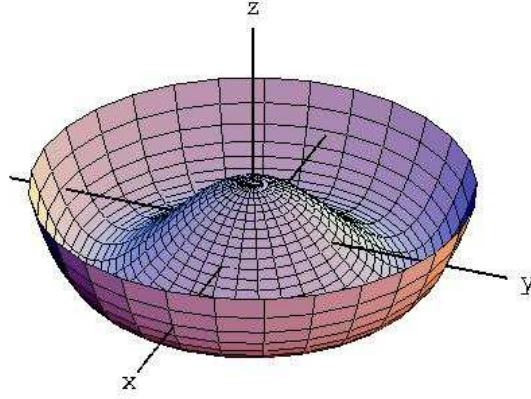


FIG. 2.1 – Potentiel de Higgs ou chapeau mexicain.

Choisissons des champs réels $\xi(x) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ et $H(x)$ ayant une valeur moyenne nulle dans le vide⁴ et qui vont nous permettre de mesurer la déviation de $\Phi(x)$ par rapport à l'état fondamental. Nous obtenons alors le doublet scalaire Φ suivant :

$$\Phi(x) = \exp\left(\frac{i\xi(x)\cdot\tau}{2v}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ (v + H(x))/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

ξ permet de se déplacer selon le cercle d'énergie potentiel minimum donc les états d'excitation quantique correspondant, des bosons, sont sans masse. Ce sont les bosons de Goldstone [15]. Ces trois champs nous apportent trois degrés de liberté qui vont être absorbés dans la composante longitudinale des W^\pm et du Z , ce qui aura pour effet de donner une masse aux bosons de jauge intermédiaire. Quant à $H(x)$, le degré de liberté radial, $\Phi(x)$ varie quadratiquement en fonction de celui-ci, le boson qui en résulte est donc massif⁵, c'est le boson de Higgs.

Nous pouvons éliminer la dépendance en ξ du lagrangien par une transformation de $SU(2)_L$ du type $\alpha(x) = \xi(x)/2v$ et nous obtenons alors :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

ainsi que

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}igW^+(v + H) \\ \delta H - \frac{1}{2}ig_ZZ(v + H) \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

⁴Ceci permet d'utiliser la théorie des perturbations.

⁵Cette masse dépend de la courbure du potentiel.

que l'on calcule à l'aide de (2.23).

L'équation (2.28) s'écrit alors [16] :

$$\mathcal{L}_\Phi = \frac{1}{2}(\delta H)^2 + \frac{1}{4}g^2 W^+ W^- (v + H)^2 + \frac{1}{8}g_Z^2 Z Z (v + H)^2 - V\left(\frac{1}{2}(v + H)^2\right). \quad (2.37)$$

Nous pouvons maintenant montrer comment la dégénérescence de l'état fondamental et la valeur moyenne non nulle du champ dans le vide nous mènent à la masse des bosons de jauge. En effet, nous pouvons voir apparaître dans (2.37) les termes en v^2 suivant :

$$\frac{1}{4}g^2 v^2 W^\mu W^{\mu-}, \quad \frac{1}{4}g_Z^2 v^2 Z_\mu Z^\mu. \quad (2.38)$$

Ces termes peuvent être interprétés comme des termes de masse pour les bosons W^\pm et Z , qui acquièrent les masses suivantes :

$$M_W = \frac{1}{2}gv \quad (2.39)$$

$$M_Z = \frac{1}{2}g_Z v. \quad (2.40)$$

Remarquons que le photon reste bien sans masse alors que les autres bosons de jauge acquièrent des masses dépendant de la valeur moyenne dans le vide, v , du champ scalaire.

2.3 Masses des quarks

Dans la section précédente, nous avons introduit dans le modèle un champ scalaire ϕ de $SU(2)$ et l'interaction de ce champ avec lui-même procure le mécanisme nécessaire à la brisure spontanée de symétrie, c'est-à-dire à l'apparition de masse pour les bosons de jauge intermédiaires. Ce même champ peut être utilisé pour obtenir la masse des quarks à condition de le coupler à ces derniers. Le type d'interaction utilisé devra préserver la symétrie de jauge $SU(2)_L \times U(1)_Y$ et être renormalisable. L'interaction suivante, dite de Yukawa, répond à ces critères :

$$\mathcal{L}_Y = -Y(\bar{\psi}_L \Phi \psi_R + \bar{\psi}_R \Phi^\dagger \psi_L) = -Y(\bar{\psi}_L \Phi \psi_R + c.h.), \quad (2.41)$$

où l'abréviation c.h. désigne le conjugué hermitien, Y la constante de couplage et

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \quad I_\Phi = 1/2, \quad Y_\Phi = 1. \quad (2.42)$$

Vérifions l'invariance de jauge de l'interaction de Yukawa. Pour $U \in SU(2)$ nous avons :

$$\begin{aligned} U \psi_R U^{-1} &= \psi_R, \\ U \psi_L U^{-1} &= e^{-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{T}} \psi_L, \\ U \phi U^{-1} &= e^{-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{T}} \phi, \end{aligned} \quad (2.43)$$

et donc,

$$U\bar{R}\phi^\dagger LU^{-1} = \bar{R}\phi^\dagger e^{+i\alpha\cdot\mathbf{T}} e^{-i\alpha\cdot\mathbf{T}} L = U\bar{R}\phi^\dagger LU^{-1}. \quad (2.44)$$

Pour la suite, nous aurons également besoin du multiplet conjugué qui est,

$$\tilde{\Phi} = i\tau_2\bar{\Phi} = \begin{pmatrix} \bar{\phi}^0 \\ -\phi^- \end{pmatrix}, \quad I_\Phi = 1/2, \quad Y_\Phi = -1. \quad (2.45)$$

Leurs valeurs moyennes dans le vide respectives après brisure spontanée de symétrie sont :

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

$$\tilde{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Si nous choisissons les champs fermioniques ψ comme étant des champs de quarks soit $\bar{\psi}_L = (\bar{u}, \bar{d})_L$, $\psi_R = d_R$ et $\psi_R = u_R$, alors nous pouvons écrire l'équation (2.41) comme :

$$\mathcal{L}_{Y,d} = -g_d(\bar{u}_L\phi^+ d_R + \bar{d}_L\phi^0 d_R + c.h.), \quad (2.48)$$

ainsi que

$$\mathcal{L}_{Y,u} = -g_u(\bar{u}_L\bar{\phi}^0 u_R - \bar{d}_L\phi^- u_R + c.h.), \quad (2.49)$$

où l'on voit apparaître deux constantes de couplage g_d et g_u qui sont différentes à cause du comportement de l'interaction de Yukawa. En effet, les quarks u et d ayant des saveurs différentes, leur interaction avec le champ scalaire ne sera pas caractérisée par la même constante de couplage.

Si nous généralisons à trois famille en écrivant les doublets et singulets comme suit :

$$D_{jL} \equiv \begin{pmatrix} u_j \\ d_j \end{pmatrix}_L, \quad u_{jR}, \quad d_{jR}, \quad j = (1, 2, 3), \quad (2.50)$$

alors l'interaction de Yukawa la plus générale pour $SU(2)_L \times U(1)$ s'écrit, en permettant les couplages entre générations :

$$\mathcal{L}_Y = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left[Y_{ij}^u \bar{u}_{iR} (\tilde{\Phi}^\dagger D_{jL}) + Y_{ij}^d \bar{d}_{iR} (\Phi^\dagger D_{jL}) \right] + c.h.. \quad (2.51)$$

Les matrices complexes Y^d et Y^u sont indépendantes et contiennent les constantes de couplage, soit un total de 18 paramètres complexes. Nous rappelons que la différence entre ces deux matrices provient de l'interaction de Yukawa. Après la brisure spontanée de symétrie, les valeurs moyennes des champs scalaires étant données par (2.46), nous pouvons extraire du lagrangien (2.51) le terme suivant :

$$\mathcal{L}_{Masse} = d_{iR} M_{ij}^d d_{jL} + u_{iR} M_{ij}^u u_{jL} + c.h., \quad (2.52)$$

avec les matrices $M^u = (v/\sqrt{2})Y^u$ et $M^d = (v/\sqrt{2})Y^d$ qui dépendent chacune de 9 paramètres complexes. Ce sont les matrices de masse dans l'espace des générations.

Nous avons donc les termes de masse suivant :

$$\begin{aligned} \overline{(u_1, u_2, u_3)}_R M^u \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}_L + c.h., \\ \overline{(d_1, d_2, d_3)}_R M^d \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}_L + c.h.. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Ces matrices de masse n'étant en général pas hermitiennes, elles ne peuvent représenter la masse physique des particules telle que nous l'observons. Pour obtenir une masse physique, il faut effectuer une transformation sur les champs de quarks de telle sorte que les matrices de masse, M^d et M^u , soient diagonalisées. Une matrice complexe pouvant toujours être diagonalisée par une transformation biunitaire⁶, nous effectuons donc des transformations unitaires sur les champs du type :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}_{L,R} = U_{L,R} \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}_{L,R}, \quad (2.54)$$

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}_{L,R} = D_{L,R} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_{L,R}, \quad (2.55)$$

de manière à obtenir :

$$U_L^{-1} M^u U_R = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix}, \quad (2.56)$$

$$D_L^{-1} M^d D_R = \begin{pmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{pmatrix}. \quad (2.57)$$

A l'aide de ces transformations nous retrouvons bien, à partir de (2.53), des termes de masse habituels du type $m\bar{\psi}\psi$. Nous voyons dans les équations (2.54) que les états propres de l'interaction faible, u_1, u_2, u_3 sont des combinaisons linéaires des états propres de masse u, c, t de même que d_1, d_2, d_3 sont des combinaisons linéaires des états d, s, b , ces combinaisons étant différentes pour les particules lévogyres et dextrogyres.

Si nous écrivons les courants chargés (2.18) dans la nouvelle base nous obtenons :

$$J_L^{\pm\mu} = \overline{(u, c, t)}_L \gamma^\mu V \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_L, \quad (2.58)$$

⁶La démonstration se trouve en annexe.

avec

$$V \equiv U_L^\dagger D_L, \quad (2.59)$$

où V est la matrice de N. Cabibbo, M. Kobayashi et K. Maskawa [2, 6], communément appelée matrice CKM. Cette matrice est unitaire et permet de relier les quarks d'une saveur à ceux d'une autre saveur par l'intermédiaire de courants chargés c'est-à-dire par les bosons W^+ et W^- . Pour les termes de courant neutre de l'équation (2.19), nous obtenons :

$$J_Z^\mu = \overline{(u, c, t)}_L \gamma^\mu U_L^\dagger U_L \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}_L, \quad (2.60)$$

et comme $U_L^\dagger U_L = 1$, il n'y a pas de mélange comme dans les courants neutres concernant u_R, d_L, d_R . Le courant électromagnétique donné par l'équation (2.20) devient :

$$J_{em}^\mu = \frac{2}{3} \overline{(u, c, t)}_L \gamma^\mu U_L^\dagger U_L \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}_L - \frac{1}{3} \overline{(u, c, t)}_R \gamma^\mu U_R^\dagger U_R \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}_R, \quad (2.61)$$

et n'est donc pas modifié vu l'unitarité des matrices U_L et U_R .

Nous allons, par convention, complètement attribuer les effets de mélange de la matrice CKM aux quarks de type *down*, c'est-à-dire à la composante d'isospin faible $T_3 = -\frac{1}{2}$. Nous définissons donc :

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix}_L = V \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_L, \quad (2.62)$$

ce qui à pour effet de modifier les doublets d'isospin faible de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L. \quad (2.63)$$

Cette convention ne change en rien la physique car si le mélange était réparti sur les deux états d'isospin il suffirait d'effectuer un changement de phase pour amener ce mélange sur un seul état d'isospin.

Les éléments de la matrice CKM sont en général notés par rapport aux quarks qu'ils relient de la façon suivante :

$$V = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9734 & 0.2196 & 0.0036 \\ 0.224 & 0.996 & 0.041 \\ 0.04 & 0.10 & 0.9993 \end{pmatrix}, \quad (2.64)$$

où $V_{ij} = |V_{ij}|e^{-i\phi_{ij}}$. Nous avons ajouté la valeur des éléments obtenue par l'expérience afin d'avoir une vue plus globale dans les discussions futures mais ceux-ci seront discutés

plus en détail par la suite. Dans le modèle complet, on ajoute également une interaction de Yukawa qui couple le champ scalaire aux leptons. Ce couplage a pour effet d'apporter une masse à ces derniers. La théorie prévoit alors une matrice équivalente à la matrice CKM, mais pour les leptons, d'où découle la célèbre oscillation des neutrinos.

Le modèle qui décrit l'interaction électromagnétique et l'interaction faible avec des bosons de jauge intermédiaires et des fermions massifs, porte le nom de modèle standard électro-faible. Il fut formulé indépendamment par Steven Weinberg en 1967 et par Abdus Salam en 1968. Ils reçurent le prix Nobel avec Sheldon Glashow en 1979 [4, 5, 17].

2.4 Interprétations et conséquences de la matrice CKM

Dans la section précédente, nous avons montré comment le fait d'apporter une masse aux quarks nous mène à un mélange des saveurs au travers du courant faible chargé, ce mélange étant caractérisé par la matrice CKM. Nous allons maintenant montrer ce que cette matrice apporte à la théorie et ce qu'elle permet d'expliquer.

La matrice CKM exprime le fait que les états propres de masse de l'interaction forte ne sont pas états propres de l'interaction faible. L'interaction faible n'agit donc pas sur les états physiques des quarks mais sur une combinaison linéaire de ceux-ci, cette combinaison linéaire étant dictée par la matrice CKM. La matrice CKM connecte donc les états propres de l'interaction faible (d', s', b') aux états propres de masse correspondant d, s, b . Nous généralisons ainsi le travail de N. Cabibbo qui avait permis d'expliquer que pour les transitions où l'étrangeté n'est pas conservé ($\Delta S = \pm 1$), l'amplitude est plus faible que pour les transitions où elle l'est ($\Delta S = 0$) en introduisant un angle de mélange θ_c entre les quarks d et s ⁷. En effet, si nous écrivons explicitement la composante *down* du doublet d'isospin faible à partir de l'équation (2.62) nous avons :

$$d' = V_{ud}d + V_{us}s + V_{ub}b. \quad (2.65)$$

Nous pouvons alors expliquer la non conservation de l'étrangeté par l'interaction faible ainsi que tout autre changement de saveur. Le fait que les amplitudes de transition des désintégrations où $\Delta S = \pm 1$ soient plus faibles s'explique par la valeur des éléments de la matrice CKM. Vu l'unitarité de celle-ci, si l'une des transitions est prédominante, comme par exemple $u \rightarrow d$, les autres transitions $u \rightarrow s$ et $u \rightarrow b$ n'en seront que plus faibles.

Une autre conséquence de l'unitarité de la matrice CKM est que :

$$\sum_j |V_{ij}|^2 = 1, \quad (2.66)$$

et cela pour n'importe quelle génération i . Tous les doublets et tous les singulets, que cela soit des quarks ou de leptons, subissent l'interaction faible avec la même constante de couplage, c'est l'universalité de l'interaction faible. C'est une conséquence au fait que les doublets de $SU(2)$ sont tous couplés aux bosons W^\pm et Z de la même manière. Les

⁷Maintenant appelé angle de Cabibbo.

réactions où $u \rightarrow d$, $e \rightarrow \nu_e$, $\mu \rightarrow \nu_\mu$ etc. sont donc du même ordre de grandeur.

Une conséquence de l'unitarité que nous avons déjà mentionnée est qu'il n'y a aucun mélange des saveurs par l'intermédiaire de courants neutres. Nous pouvons le voir au travers de l'équation (2.19).

Il est aussi important de remarquer qu'avant la brisure spontanée de symétrie, la théorie ne dépend pas de la famille considérée, chaque famille interagissant donc de la même manière que les deux autres. Par contre après la brisure de symétrie, l'interaction entre des quarks de familles différentes est possible et proportionnelle aux valeurs des éléments de la matrice CKM, Il existe donc un échange entre ces familles qui ne sont plus considérées comme équivalentes.

La matrice CKM étant égale à $U_L^\dagger D_L$, il faut, pour qu'elle diffère de la matrice identité, que les quarks de type *up* et *down* ne soient pas considérés de la même manière. Cette différence est apportée, comme nous l'avions mentionné, par le comportement de l'interaction de Yukawa. V caractérise donc la différence de comportement vis à vis de l'interaction faible des quarks *up* et *down*. Il est tout à fait légitime de complètement attribuer l'effet de mélange sur l'état *up* ou *down* tant que la différence entre les états est bien, au total, caractérisé par la matrice CKM.

L'universalité de l'interaction faible et la notion de mélange des quarks au travers de l'angle de Cabibbo permirent de mieux décrire les phénomènes observés. Malheureusement, à l'époque⁸, seulement deux générations étaient connues et le modèle ne permettait pas d'expliquer certaines observations notamment la violation CP dans la désintégration du kaon neutre. Ce sont Kobayashi et Maskawa qui, en 1973, démontrèrent que la violation CP pouvait être obtenue avec au minimum trois générations [6], ce que nous ferons dans le chapitre suivant. La preuve de l'existence de la troisième génération fut obtenue par S. W. Herb et al. en 1977 avec la découverte du bottonium (Υ) [7].

⁸1963.

Chapitre 3

Propriétés fondamentales de la matrice CKM

Dans le chapitre précédent nous avons introduit la matrice CKM ainsi que certaines de ses conséquences mais nous ne connaissons encore rien sur la matrice elle-même, nous allons donc discuter de ses propriétés et en particulier du nombre de paramètres qu'elle contient. Nous en obtiendrons quatre dont une phase qui permettra la violation CP. Nous discuterons alors du problème qu'apporte cette phase parce qu'elle est totalement libre dans la matrice. Une section sera ensuite consacrée aux différentes paramétrisations de la matrice CKM. Nous terminerons le chapitre en introduisant une représentation très efficace de la matrice CKM, celle des triangles d'unitarité. Ceux-ci seront fortement liés à la violation CP et nous permettrons de trouver une solution au problème qu'apporte la phase.

3.1 Invariance par changement de phase

Nous allons montrer que l'on peut multiplier la matrice CKM par une matrice de phase sans changer les paramètres physiques observables. Rappelons tout d'abord que la matrice CKM est une matrice unitaire et complexe. Considérons ensuite que la théorie contient n_g générations, la matrice CKM est alors de dimension n_g et contient $2(n_g \times n_g)$ paramètres qui tombent à n_g^2 vu l'unitarité de la matrice. Nous avons toujours la liberté de redéfinir la phase des champs de quarks de la façon suivante¹ :

$$\begin{aligned} u'_i &= e^{i\alpha_i} u_i, \\ d'_j &= e^{i\beta_j} d_j, \end{aligned} \tag{3.1}$$

¹Ce sont des changements de phase unitaire qui préservent la relation d'anticommutation des états de quarks.

où les α_i et les β_j sont n_g phases arbitraires. Nous avons donc pour $n_g = 3$:

$$\begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1}u \\ e^{i\alpha_2}c \\ e^{i\alpha_3}t \end{pmatrix} = U_\alpha \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{i\beta_1}d' \\ e^{i\beta_2}s' \\ e^{i\beta_3}b' \end{pmatrix} = U_\beta \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

La matrice CKM de l'équation (2.58) se transforme alors comme :

$$V \rightarrow U_\alpha^\dagger V U_\beta, \quad (3.4)$$

soit

$$V'_{ij} = e^{i(\alpha_i - \beta_j)} V_{ij}. \quad (3.5)$$

Puisque la transformation (3.1) ne modifie pas la physique, le changement de phase de l'équation (3.4) qui est sa conséquence est également permis. Nous pouvons donc à notre guise modifier la matrice CKM par les transformations (3.4) mais il est important de remarquer que les $2 \times n_g$ phases ne sont pas indépendantes. Prenons pour exemple le cas $n_g = 2$, nous avons :

$$\begin{aligned} V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \rightarrow V' &= \begin{pmatrix} e^{-i\alpha_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\beta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\beta_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha_1 - \beta_1)}V_{11} & e^{-i(\alpha_1 - \beta_2)}V_{12} \\ e^{-i(\alpha_2 - \beta_1)}V_{21} & e^{-i(\alpha_2 - \beta_2)}V_{22} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

nous avons la relation suivante qui lie les phases :

$$(\alpha_2 - \beta_2) = (\alpha_2 - \beta_1) + (\alpha_1 - \beta_2) - (\alpha_1 - \beta_1). \quad (3.7)$$

Sur les quatre phases correspondant aux quatre saveurs des quarks seulement trois sont indépendantes et ces trois phases sont arbitraires puisqu'elles peuvent être modifiées à notre guise, en particulier elles peuvent être éliminées par un changement de phase adéquat. La généralisation, pour un nombre de familles n_g , nous donne un nombre de phases arbitraires égal à $2n_g - 1$ qui pourront également être éliminées.

La valeur des éléments de la matrice CKM n'est pas invariante. Il nous faut donc trouver les quantités observables qui caractérisent la matrice et qui devront, pour avoir une signification physique, être invariants sous les transformations de l'équation (3.1). L'objet le plus simple répondant à ce critère est le module des éléments de la matrice que nous définissons comme :

$$U_{\alpha i} \equiv |V_{\alpha i}|^2, \quad (3.8)$$

où, à partir de maintenant, les indices grecs sont réservés à la composante *up* des quarks alors que les indices latins sont utilisés pour la composante *down*. Les invariants les plus simples contenant une information sur la phase sont appelée *plaquettes* et sont définis comme suit [18] :

$$Q_{\alpha i \beta j} \equiv V_{\alpha i} V_{\beta j} V_{\alpha j}^* V_{\beta i}^*, \quad (3.9)$$

où nous supposons $\alpha \neq \beta$ et $i \neq j$ sous peine d'obtenir le produit de deux modules au carré. Nous avons :

$$Q_{\alpha i \beta j} = Q_{\beta j \alpha i} = Q_{\alpha j \beta i}^* = Q_{\beta i \alpha j}^*, \quad (3.10)$$

et nous définissons :

$$\omega_{\alpha i \beta j} \equiv \arg Q_{\alpha i \beta j}, \quad (3.11)$$

qui correspond à la phase contenue dans $Q_{\alpha i \beta j}$ et est donc invariant.

Les invariants faisant intervenir un plus grand nombre d'éléments de matrice peuvent s'écrire en fonction des deux invariants définis plus haut² [18].

3.2 Phase physique

Comme nous l'avons mentionné dans la section précédente, sur les n_g^2 paramètres de la matrice, $2n_g - 1$ phases non physique peuvent être absorbées par des transformations sur les champs de quarks. Le nombre de paramètres physiques dans V est donc de :

$$N_{param} = n_g^2 - (2n_g - 1) = (n_g - 1)^2. \quad (3.12)$$

Une matrice orthogonale de dimension n_g est paramétrisée par $n_g(n_g - 1)/2$ angles de rotation : ce sont les angles d'Euler³. Une matrice unitaire n'étant qu'une matrice orthogonale complexe, le nombre de paramètre dans V pouvant être assimilé à des angles est :

$$N_{angle} = \frac{1}{2} n_g (n_g - 1), \quad (3.13)$$

et le nombre de phases physiques dans V est donc de :

$$N_{phase} = N_{param} - N_{angle} = \frac{1}{2} (n_g - 1) (n_g - 2). \quad (3.14)$$

Nous obtenons la table (3.1) pour les différentes valeurs de n_g et nous pouvons y voir que pour $n_g = 2$ le nombre de phases physiques dans la matrice CKM est nul. Une autre

²Ce résultat n'est plus vrai si les éléments de la matrice CKM peuvent s'annuler.

³Ces angles correspondent à trois rotation successive par rapport à des axes différents.

Nombre de familles	Nb. d'angles	Nb. de phases	Nb. de phases irréductible
n_g	$\frac{1}{2}n_g(n_g - 1)$	$\frac{1}{2}n_g(n_g + 1)$	$\frac{1}{2}(n_g - 1)(n_g - 2)$
2	1	3	0
3	3	6	1
4	6	10	3

TAB. 3.1 – Tableau représentant le nombre de paramètres en fonction du nombre de générations.

approche est de considerer Q_{udcs} qui est la seule plaquette que l'on puisse construire pouvant avoir une partie complexe⁴. Or, la relation d'orthogonalité :

$$V_{ud}V_{cd}^* + V_{us}V_{cs}^* = 0, \quad (3.15)$$

implique que $Q_{udcs} = -U_{us}U_{cs}$, en multipliant par $V_{us}^*V_{cs}$, et donc le seul élément pouvant contenir une phase est en fait réel. Par contre dans la cas $n_g = 3$, nous avons une phase physique ne pouvant être éliminée. La relation d'orthogonalité entre les deux premières lignes de V est :

$$V_{ud}V_{cd}^* + V_{us}V_{cs}^* + V_{ub}V_{cb}^* = 0, \quad (3.16)$$

qui donne, une fois multipliée par $V_{us}^*V_{cs}$ et la partie imaginaire prise :

$$\begin{aligned} \text{Im } Q_{ubcd} &= -\text{Im } Q_{uscd}, \\ \Rightarrow \text{Im } Q_{udcb}^* &= -\text{Im } Q_{udcs}^*, \\ \Rightarrow -\text{Im } Q_{udcb} &= \text{Im } Q_{udcs}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Si nous effectuons cette démarche pour n'importe quelle paire de lignes ou de colonnes de V , nous obtenons l'équivalent de l'équation (3.17) pour toutes les paires de plaquettes possible et donc la partie imaginaire de n'importe quelle plaquette est égale à celle des autres plaquettes au signe près. Ceci découle du fait qu'il n'y a qu'une phase physique dans la matrice. Nous définissons, en conséquence à cette remarque :

$$J \equiv \text{Im } Q_{uscb} = \text{Im } (V_{us}V_{cb}V_{ub}^*V_{cs}^*), \quad (3.18)$$

dont le module est donc égal à la partie imaginaire de n'importe quelle plaquette⁵ et qui prendra toute son importance lorsque nous discuterons des triangles d'unitarité.

Comme l'ont montré Kobayashi et Maskawa [6], la phase physique dans la matrice introduit

⁴Cela provient du fait que nous ayons dans ce cas quatre quarks à notre disponibilité et des Eqs. (3.9) et (3.10).

⁵Rappelons que ceci est valable dans le cas $n_g = 3$.

un nombre complexe dans le lagrangien qui n'a d'autre effet que d'impliquer la violation CP. En effet, l'opérateur T étant anti-linéaire⁶, son application sur le lagrangien du modèle standard et donc sur la matrice CKM apporte un terme du type :

$$T V|\dots\rangle = V^* T|\dots\rangle, \quad (3.19)$$

où V représente la matrice CKM. Si V est complexe, $V \neq V^*$ et alors le hamiltonien ne commute plus avec T puisque l'application de ce dernier modifie la matrice CKM. Or les propriétés générales de la théorie des champs, comme l'invariance de Lorentz et la causalité, imposent que la symétrie CPT⁷ soit conservée, c'est le théorème CPT. Donc, puisque la théorie est invariante par la transformation CPT et que la symétrie T n'est pas conservée, cela implique la non-conservation de CP.

3.3 Paramétrisations

Nous avons la possibilité de changer la phase de n'importe quelle ligne ou colonne de la matrice sans modifier la physique. Nous pouvons donc contraindre cinq⁸ phases en leur imposant d'être nulles c'est-à-dire imposer à cinq éléments de matrice d'être réels. Suivant le choix de ces cinq éléments, la phase se déplacera sur différents éléments de la matrice modifiant ainsi leurs valeurs mais sans modifier la physique. Il existe une autre liberté dans la paramétrisation choisie, celle-ci consiste en la permutation des différentes générations. Le choix communément admis est d'ordonner les générations par ordre croissant de masse. La matrice CKM est une matrice de rotation et peut-être paramétrisée dans le plan complexe en terme d'un certain nombre d'angles et de phases. Pour un nombre de familles égal à trois nous avons trois paramètres d'angle et un de phase, le reste de la matrice sera alors déterminé par les différentes contraintes comme nous l'avons vu dans la section précédente. La première paramétrisation de la matrice CKM fut proposée par Kobayashi et Maskawa, elle est caractérisée par un produit de trois matrice de rotation R et d'une matrice de phase D et s'écrit :

$$\begin{aligned} V &= R_2(-\theta_2)R_1(\theta_1)D(\delta)R_2(\theta_3), \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & -s_2 \\ 0 & s_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & s_3 \\ 0 & -s_3 & c_3 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} c_1 & s_1 c_3 & s_1 s_3 \\ -s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 + s_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 c_2 s_3 - s_2 c_3 e^{i\delta} \\ -s_1 s_2 & c_1 s_2 c_3 - c_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 s_2 s_3 + c_2 c_3 e^{i\delta} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

$\cos \theta_i$ est noté c_i et $\sin \theta_i$ est noté s_i , avec θ_i les angles d'Euler tels que $0 \leq \theta_i \leq \pi/2$ et $0 \leq \delta < 2\pi$. Une des rotations est dans le plan xy alors que les deux autres sont dans le

⁶ $T(\lambda_1|\psi_1\rangle + \lambda_2|\psi_2\rangle) = \lambda_1^* T|\psi_1\rangle + \lambda_2^* T|\psi_2\rangle$.

⁷La transformation CPT effectue simultanément une réflexion dans l'espace, une inversion de l'évolution du temps et échange les particules en antiparticules et inversement.

⁸ $2n_g - 1$ phases non physiques.

plan yz . La phase peut être choisie arbitrairement sur l'une des générations, à condition qu'elle ne puisse être supprimée par un changement de phase sur les quarks. Pour cela il faut que la matrice D soit comprise entre deux matrices de rotation et que la phase soit sur l'une des générations impliquées par l'une des deux matrices de rotation. Dans l'équation (3.20) nous aurions donc très bien pu choisir de porter la phase sur l'élément D_{11} . Si nous prenons la limite où les angles θ_2 et θ_3 sont nuls (donc aucun mélange entre la première génération et la troisième ni entre la deuxième et la troisième) alors la matrice CKM se réduit à la rotation de Cabibbo :

$$V = R_1(\theta_1) = \begin{pmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

et l'on retrouve bien un mélange entre la première et deuxième famille uniquement, θ_1 est alors identifié à l'angle de Cabibbo, au signe près.

La deuxième paramétrisation que nous allons introduire est due à L. L. Chau et W. Y. Keung [19] et elle fut choisie comme étant la paramétrisation "standard" de la matrice CKM. Les quatre paramètres sont les angles θ_{12} , θ_{23} et θ_{13} ainsi que la phase δ_{13} , la matrice s'écrit alors :

$$\begin{aligned} V &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\delta_{13}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

A nouveau, si θ_{23} et θ_{13} sont nuls nous retrouvons l'angle de Cabibbo⁹ avec le bon signe. Cette paramétrisation a l'avantage que les éléments de la première ligne et de la troisième colonne, qui ont été mesurés directement dans des processus de désintégration, s'expriment de manière simple. L'expérience nous apporte également que $c_{13} \approx 1$ ¹⁰, ce qui permet de considérer, en excellente approximation, que :

$$\begin{aligned} |V_{us}| &\approx s_{12}, \\ |V_{ub}| &\approx s_{13}, \\ |V_{cb}| &\approx s_{23}, \\ |V_{tb}| &\approx c_{23}, \\ |V_{ud}| &\approx c_{12}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

et donc de relier les paramètres à des quantités invariantes par changement de phase.

⁹Cette fois, le signe est correct.

¹⁰Il ne dévie de l'unité qu'à partir de la sixième décimale [20].

La dernière paramétrisation que nous allons montrer fut introduite en 1983 par Wolfenstein [21], elle a l'avantage d'utiliser des données expérimentales et est devenue la paramétrisation la plus populaire. Wolfenstein remarqua certains détails concernant la valeur des éléments de la matrice CKM qui sont données par (2.64) :

- la matrice CKM est proche de la matrice identité,
- il existe une certaine hiérarchie des éléments : plus on s'éloigne des éléments diagonaux dont les valeurs sont proches de l'unité, plus les valeurs sont petites,
- V_{us} est plutôt bien déterminé et vaut 0.22,
- $|V_{cb}| \gg |V_{ub}|$,
- $|V_{cb}|$ est déterminé par la désintégration du méson B et vaut ≈ 0.6 , de plus $|V_{cb}| \approx |V_{us}|^2$.

Les deux premiers points mènent Wolfenstein à écrire les éléments de la matrice sous la forme d'une expansion en série de puissance. Il choisira pour cela $\lambda = V_{us}$ en raison du troisième point. La petitesse de V_{cb} laisse supposer que V_{cb} est de l'ordre de λ^2 , il choisit : $V_{cb} = A\lambda^2$ où A est un second paramètre. Pour obtenir une matrice unitaire jusqu'à l'ordre λ^3 , il introduit deux paramètres supplémentaires ρ et η et obtient de cette manière une nouvelle paramétrisation qui n'est qu'approximative dans le sens où l'unitarité n'est pas vérifiée exactement et qui s'écrit [21] :

$$V = \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2/2 & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \lambda^2/2 & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + O(\lambda^4), \quad (3.24)$$

où les nouveaux paramètres sont A , λ , ρ et η . Les paramètres A et λ peuvent être déterminés par l'étude de désintégration par courants chargés de l'interaction faible, ce que nous ferons au chapitre 5. On obtient $\lambda \approx 0.2205$ et $A \approx 0.784$.

Nous pouvons représenter les quantités $|V_{\alpha i}|$ en fonction du paramètre d'expansion pour avoir une idée de la valeur des éléments de la matrice, ce qui donne :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^3 \\ \lambda & 1 & \lambda^2 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Comme nous le verrons, les paramètres de Wolfenstein sont très utiles et on écrit souvent la paramétrisation standard à l'aide de ces paramètres dans le but d'avoir l'unitarité exacte, les paramètres sont alors défini comme suit [22, 24] :

$$s_{12} = \lambda, \quad s_{23} = A\lambda^2, \quad s_{13}e^{-i\delta} = A\lambda^3(\rho - i\eta), \quad (3.26)$$

et donc

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{s_{13}}{s_{12}s_{23}} \cos \delta, \\ \eta &= \frac{s_{13}}{s_{12}s_{23}} \sin \delta. \end{aligned} \quad (3.27)$$

La paramétrisation standard (3.22) devient en fonction des paramètres de Wolfenstein [22] :

$$V = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{8}\lambda^4 & \lambda + \mathcal{O}(\lambda^7) & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ 1 + \frac{1}{2}A^2\lambda^5[1 - 2(\rho + i\eta)] & 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{8}\lambda^4(1 + 4A^2) & A\lambda^2 + \mathcal{O}(\lambda^8) \\ A\lambda^3(1 - \bar{\rho} - i\bar{\eta}) & -A\lambda^2 + \frac{1}{2}A\lambda^4[1 - 2(\rho + i\eta)] & 1 - \frac{1}{2}A^2\lambda^4 \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

avec

$$\bar{\rho} = \rho(1 - \frac{\lambda^2}{2}), \quad \bar{\eta} = \eta(1 - \frac{\lambda^2}{2}). \quad (3.29)$$

La paramétrisation de Wolfenstein est souvent utilisée dans la littérature et sera celle que nous utiliserons par la suite.

3.4 Conditions d'unitarité sur les modules

Le modèle standard prédit que la matrice CKM est unitaire, il suffit donc de quatre paramètres pour la décrire. Mais comme nous l'avons montré dans la section précédente, les éléments de la matrice CKM dépendent du choix de la paramétrisation et de la position de la phase. Il est donc important de montrer comment l'unitarité relie les éléments de la matrice entre eux en fonction d'éléments invariants. Rappelons que ces derniers sont définis par :

$$U_{\alpha i} \equiv |V_{\alpha i}|^2, \quad (3.30)$$

$$Q_{\alpha i \beta j} = Q_{\beta j \alpha i} = Q_{\alpha j \beta i}^* = Q_{\beta i \alpha j}^*. \quad (3.31)$$

Partons de l'unitarité de la matrice, les lignes et colonnes de V sont normalisées :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^{n_g} U_{\alpha i} &= 1, \\ \sum_{i=1}^{n_g} U_{\alpha i} &= 1. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Nous avons donc $(n_g - 1)^2$ modules indépendants, ce nombre étant justement identique au nombre de paramètres que nous avons obtenu dans (3.12). Il est donc possible de paramétriser la matrice avec le module de ses éléments. Pour $n_g = 3$ il y a quatre modules indépendants, les autres étant obtenus par les conditions de l'équation (3.32). Nous choisissons U_{us} , U_{ub} , U_{cs} et U_{cb} comme étant indépendants et avons donc :

$$\begin{aligned} U_{ud} &= 1 - U_{us} - U_{ub}, \\ U_{cd} &= 1 - U_{cs} - U_{cb}, \\ U_{ts} &= 1 - U_{us} - U_{cs}, \\ U_{tb} &= 1 - U_{ub} - U_{cb}, \\ U_{td} &= U_{us} + U_{ub} + U_{cs} + U_{cb} - 1. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Les quatre modules indépendants choisis doivent être positifs et tels que les combinaisons linéaires des Eqs. (3.33) soient également positives. Prenons ensuite la relation d'orthogonalité entre les deux premières lignes de V :

$$V_{ud}V_{cd}^* + V_{us}V_{cs}^* + V_{ub}V_{cb}^* = 0, \quad (3.34)$$

et multiplions cette relation par $V_{ub}^*V_{cb}$, $V_{us}^*V_{cs}$ et $V_{ud}^*V_{cd}$. Vu la définition (3.9) des $Q_{\alpha i \beta j}$ cela donne respectivement :

$$Q_{udcb} + Q_{uscb} + U_{ub}U_{cb} = 0, \quad (3.35)$$

$$Q_{udcs} + U_{us}U_{cs} + Q_{ubcs} = 0, \quad (3.36)$$

$$U_{ud}U_{cd} + Q_{uscd} + Q_{ubcd} = 0. \quad (3.37)$$

Si nous additionnons maintenant les deux premières équations et soustrayons la dernière, nous avons en utilisant (3.10) :

$$Q_{udcb} + Q_{uscb} + Q_{udcs} + \underbrace{Q_{ubcs}}_{Q_{uscb}^*} - \underbrace{Q_{uscd}}_{Q_{udcs}^*} - \underbrace{Q_{ubcd}}_{Q_{udcb}^*} = U_{ud}U_{cd} - U_{ub}U_{cb} - U_{us}U_{cs}, \quad (3.38)$$

qui donne

$$2\text{Im}(Q_{udcs}) + 2\text{Im}(Q_{udcb}) + 2\text{Re}(Q_{uscb}) = U_{ud}U_{cd} - U_{ub}U_{cb} - U_{us}U_{cs}. \quad (3.39)$$

Nous pouvons simplifier les deux parties imaginaires de l'équation en utilisant l'équation (3.17) qui, rappelons-le, est obtenue en prenant la partie imaginaire de l'équation (3.37). Nous obtenons au final :

$$2\text{Re}(Q_{uscb}) = U_{ud}U_{cd} - U_{ub}U_{cb} - U_{us}U_{cs}, \quad (3.40)$$

qui peut être écrit en fonction des modules indépendants comme :

$$2\text{Re}(Q_{uscb}) = 1 - U_{us} - U_{ub} - U_{cs} - U_{cb} + U_{us}U_{cb} + U_{ub}U_{cs}. \quad (3.41)$$

Ecrivons cette équation en utilisant $|x|^2 \geq |\text{Re } x|^2$, nous avons :

$$4|Q_{uscb}|^2 = |V_{us}V_{cb}V_{cs}^*V_{ub}^*|^2 \geq |\text{Re } x|^2,$$

soit,

$$4U_{us}U_{cb}U_{cs}U_{ub} \geq (1 - U_{us} - U_{ub} - U_{cs} - U_{cb} + U_{us}U_{cb} + U_{ub}U_{cs})^2. \quad (3.42)$$

Nous obtenons une relation supplémentaire que doivent satisfaire les modules choisis. On peut démontrer que si les quatre modules indépendants choisis sont positifs et qu'ils vérifient l'inégalité (3.42) alors les modules dépendants sont automatiquement positifs [23]. Il existe un moyen efficace pour voir dans quelles conditions l'inégalité est satisfaite, écrivons pour cela $|x|^2 = (\text{Im } x)^2 + (\text{Re } x)^2$ avec $x = Q_{uscb}$, nous avons :

$$4(\text{Im } Q_{uscb})^2 = 4U_{us}U_{cb}U_{cs}U_{ub} - 4\text{Re}(Q_{uscb})^2. \quad (3.43)$$

Si on fixe trois modules, le quatrième doit être compris entre deux valeurs extrêmes pour que l'inégalité (3.42) soit satisfaite, les valeurs extrêmes étant obtenue grâce à l'équation (3.43). Si ce n'est pas le cas, l'inégalité (3.42) est violée et il n'y a pas de matrice unitaire correspondant aux valeurs des trois modules fixés. Comme la théorie prévoit une matrice CKM unitaire, nous pouvons tester la validité du modèle standard, dans les secteurs des saveurs, en vérifiant que les éléments de la matrice CKM satisfont bien aux conditions précédentes. Dans le cas contraire, il y aurait un écart à l'unitarité de la matrice CKM et cela mènerait à de nouvelles lois de la physique. Nous ferons ce genre de test du modèle standard mais uniquement à partir des triangles d'unitarité que nous allons introduire dans la section suivante.

3.5 Les triangles d'unitarité

Nous avons vu que la matrice CKM pouvait être paramétrisée de plusieurs manières différentes et nous avons cité les plus utilisées, mais toutes ces paramétrisations ont un point en commun : elles sont toutes arbitraires. Nous ne pouvons dire si un paramètre est mieux qu'un autre et de plus, il existe une phase complexe qu'on est libre de placer où l'on veut dans la matrice. Tout ces choix, et en particulier ceux concernant la position de la phase, apportent certains problèmes pour interpréter de la matrice CKM puisque celle-ci peut être exprimée de nombreuses manières différentes sans en changer la physique. Ce problème va être partiellement résolu par une interprétation très efficace qui introduit la notion de triangles d'unitarité. Ils permettront d'avoir une vision globale et une meilleure interprétation de la phase et de la violation CP mais également d'avoir plus de contraintes sur les éléments de V .

Pour introduire les triangles d'unitarité, utilisons l'unitarité de V qui impose la condition suivante :

$$\begin{pmatrix} V_{ud}^* & V_{cd}^* & V_{td}^* \\ V_{us}^* & V_{cs}^* & V_{ts}^* \\ V_{ub}^* & V_{cb}^* & V_{tb}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

qui correspond aux relations d'orthogonalité :

$$\begin{aligned} V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* &= 0, \\ V_{ud}V_{us}^* + V_{cd}V_{cs}^* + V_{td}V_{ts}^* &= 0, \\ V_{us}V_{ub}^* + V_{cs}V_{cb}^* + V_{ts}V_{tb}^* &= 0, \\ V_{cd}V_{ud}^* + V_{cs}V_{us}^* + V_{cb}V_{ub}^* &= 0, \\ V_{td}V_{ud}^* + V_{ts}V_{us}^* + V_{tb}V_{ub}^* &= 0, \\ V_{td}V_{cd}^* + V_{ts}V_{cs}^* + V_{tb}V_{cb}^* &= 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Ces six équations sont la somme de trois nombres complexes et peuvent être représentées dans le plan complexe par six triangles, un pour chaque équation : ce sont les triangles

d'unitarité. Les angles et côtés de ces triangles sont en fait des invariants comme nous allons le montrer. Pour cela, rappelons que lors d'une transformation de phase sur les champs de quarks comme dans l'équation (3.1), les éléments de la matrice CKM deviennent :

$$V'_{\alpha k} = e^{i(\psi_k - \psi_\alpha)} V_{\alpha k}, \quad (3.46)$$

et donc la relation d'orthogonalité (3.45) donne :

$$V_{ud}V_{ub}^* e^{i(\psi_d - \psi_u)} e^{-i(\psi_b - \psi_u)} + V_{cd}V_{cb}^* e^{i(\psi_d - \psi_c)} e^{-i(\psi_b - \psi_c)} + V_{td}V_{tb}^* e^{i(\psi_d - \psi_t)} e^{-i(\psi_b - \psi_t)} = 0.$$

Après simplification nous avons :

$$V_{ud}V_{ub}^* e^{i(\psi_d - \psi_b)} + V_{cd}V_{cb}^* e^{i(\psi_d - \psi_b)} + V_{td}V_{tb}^* e^{i(\psi_d - \psi_b)} = 0,$$

qui est identique à

$$V'_{ud}V_{ub}^{\prime*} + V'_{cd}V_{cb}^{\prime*} + V'_{td}V_{tb}^{\prime*} = 0.$$

La relation d'orthogonalité pour V' n'est que celle de V multipliée par une phase constante. Le seul effet de cette phase est de faire tourner les triangles comme des solides, ils ne subissent donc aucune déformation sous un changement de phase du type (3.1). Les angles et la longueur des côtés ne dépendent pas de la phase choisie. Puisque la rotation ne modifie pas les propriétés des triangles, ce sont des observables physiques. Puisque la matrice CKM et les relations Eqs. (3.45) sont contenue dans le lagrangien, la représentation par les triangles d'unitarité est intrinsèque au lagrangien lui-même et n'est donc pas arbitraire comme les autres représentations dont nous avons parlés. Les paramètres qui caractérisent les triangles sont donc aussi importants que les autres paramètres du lagrangien, tels que la masse des quarks ou les constantes de couplage.

Le triangle correspondant à l'équation (3.45) est représenté sur la figure (3.1).

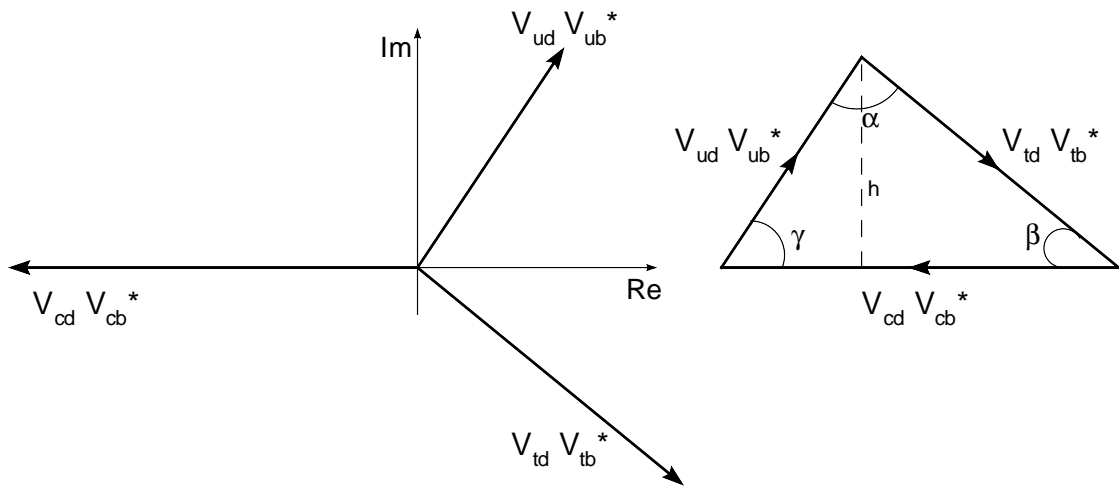


FIG. 3.1 – Le triangle d'unitarité correspondant à la relation (3.45).

Ce triangle est un peu particulier car les éléments de matrice qui le caractérise, V_{ub} , V_{td} et V_{cb} , sont très étudiés et du même ordre de grandeur. En général, lorsque l'on parle du triangle d'unitarité dans la littérature, c'est à celui-ci dont on fait référence. Ses angles internes sont définis par :

$$\alpha \equiv \arg\left(-\frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{ud}V_{ub}^*}\right), \quad (3.47)$$

$$\beta \equiv \arg\left(-\frac{V_{cd}V_{cb}^*}{V_{td}V_{tb}^*}\right), \quad (3.48)$$

$$\gamma \equiv \arg\left(-\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*}\right), \quad (3.49)$$

qui satisfont à $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ suite à l'unitarité de V . Pour l'angle α nous avons :

$$\begin{aligned} \alpha &= \arg\left(-\frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{ud}V_{ub}^*}\right) = \arg\left(-\frac{V_{td}V_{tb}^*V_{ud}^*V_{ub}}{|V_{ud}V_{ub}|^2}\right) \\ &= \arg(-Q_{ubtd}), \end{aligned} \quad (3.50)$$

qui est bien une quantité invariante. Les angles β et γ peuvent être liés à un invariant de la même manière que α mais, en plus, ils sont directement reliés à la phase des éléments V_{td} et V_{ub} de la façon suivante :

$$V_{td} = |V_{td}|e^{-i\beta}, \quad V_{ub} = |V_{ub}|e^{-i\gamma}. \quad (3.51)$$

Puisqu'un changement de phase tel que (3.1) ne modifie pas le triangle d'unitarité, il existe des conventions qui permettent d'en obtenir une forme particulièrement utile. Il faut effectuer les changements suivants :

- on choisit une phase telle que $V_{cd}V_{cb}^*$ soit réel. Ce qui revient à aligner un des côté du triangle avec l'axe réel,
- on divise chaque côté par $|V_{cd}V_{cb}^*|$ de sorte que la longueur du côté sur l'axe réel vaille 1.

On obtient alors un triangle dont deux des sommets sont fixés, l'un en $(0, 0)$ et l'autre en $(0, 1)$, le dernier sommet se trouve alors en $(\bar{\rho}, \bar{\eta})$ ¹¹ et les longueurs des côtés sont :

$$R_b = \left| \frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} \right| = \sqrt{(1 - \bar{\rho})^2 + \bar{\eta}^2} = \frac{1 - \frac{\lambda^2}{2} |V_{ub}|}{\lambda |V_{cb}|}, \quad (3.52)$$

$$R_t = \left| \frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} \right| = \sqrt{\bar{\rho}^2 + \bar{\eta}^2} = \frac{1 |V_{td}|}{\lambda |V_{cb}|}, \quad (3.53)$$

où l'on utilise la paramétrisation de Wolfenstein. Les longueurs sont bien invariantes

¹¹Ce sont bien ici les paramètres de Wolfenstein, nous expliquerons dans la suite comment ceux-ci apparaissent, pour l'instant ce n'est qu'une notation.

puisque :

$$\begin{aligned} \left| \frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} \right| &= \left| \frac{V_{td}V_{tb}^*V_{cd}^*V_{cb}}{|V_{cd}V_{cb}|^2} \right| \\ &= \left| \frac{Q_{tdcb}}{|V_{cd}V_{cb}|^2} \right|. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Avec ces définitions, nous pouvons écrire l'équation (3.45) comme :

$$R_b e^{i\gamma} + R_t e^{-i\beta} = 1. \quad (3.55)$$

Le triangle rephasé est représenté sur la figure (3.2).

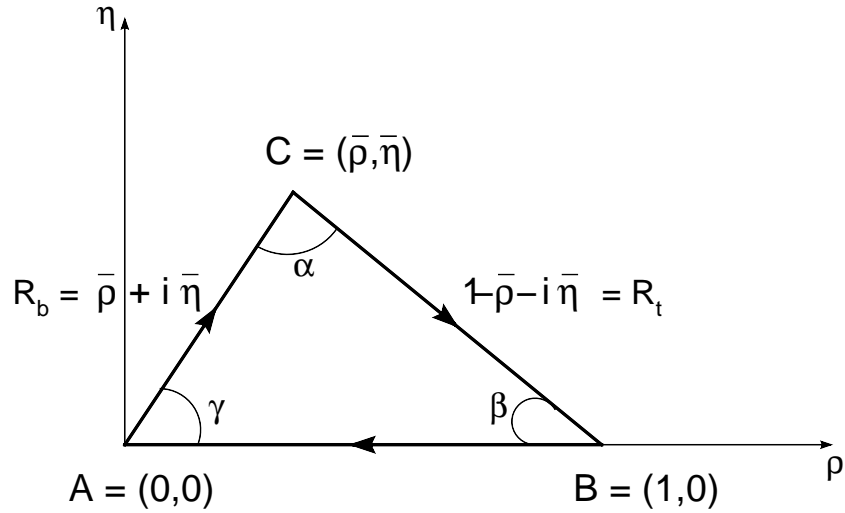


FIG. 3.2 – Triangle d'unitarité rephasé.

Les angles s'obtiennent à partir du théorème de Pythagore généralisé, tel que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{R_t^2 + R_b^2 - 1}{2R_t R_b}, \\ \cos \beta &= \frac{1 + R_t^2 - R_b^2}{2R_t}, \\ \cos \gamma &= \frac{1 - R_t^2 + R_b^2}{2R_b}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

et donc avec $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ nous obtenons les sinus suivants :

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{(R_t^4 + R_b^4 + 1 - 2R_t^2 R_t^2 - 2R_t^2 - 2R_b^2)^{1/2}}{2R_t R_b}, \\ \sin \beta &= \frac{(R_t^4 + R_b^4 + 1 - 2R_t^2 R_t^2 - 2R_t^2 - 2R_b^2)^{1/2}}{2R_t}, \\ \sin \gamma &= \frac{(R_t^4 + R_b^4 + 1 - 2R_t^2 R_t^2 - 2R_t^2 - 2R_b^2)^{1/2}}{2R_b}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

La quantité sous la racine doit être positive, c'est l'équivalent de l'équation (3.42).

Nous avons obtenu à partir des relations d'orthogonalité de la matrice CKM six triangles dont les angles et les longueurs sont reliés à des quantités invariantes, nous pouvons donc affirmer que l'aire des triangles est elle aussi invariante lors d'un changement de phase. L'aire A du triangle correspondant à la figure (3.1) est donnée par :

$$A = \frac{|V_{cd}V_{cb}|h}{2}, \quad (3.58)$$

où h correspond à la hauteur du triangle et vaut :

$$h = |V_{ud}V_{ub} \sin \gamma|. \quad (3.59)$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} |V_{cd}V_{cb}V_{ud}V_{ub} \sin \gamma|, \\ &= \frac{1}{2} |Q_{udcb} \sin \gamma|, \\ &= \frac{1}{2} |\text{Im } Q_{udcb}|, \\ &= \frac{1}{2} |J|, \end{aligned} \quad (3.60)$$

où J est la quantité définie par (3.18). L'intérêt n'est pas réellement de voir que l'aire est invariante puisque c'est une conséquence triviale de tout ce que nous avons dit mais plutôt de voir à quel invariant l'aire est liée, c'est-à-dire au J . Rappelons que, puisque la partie imaginaire de toutes les plaquettes est identique au signe près, la quantité J est invariante et, vu l'équation (3.60), l'aire des triangles est identique quel que soit le triangle considéré. N'importe quelle quantité imaginaire d'un produit d'éléments de V est proportionnelle aux plaquettes et donc proportionnelle à $|J|$. L'aire des triangles peut donc être interprétée comme la mesure de la quantité de violation CP dans la théorie. L'équation (3.60) nous donne :

$$|J| = |V_{ud}V_{ub}V_{cd}V_{cb} \sin \gamma|, \quad (3.61)$$

dont la valeur peut être estimée à l'aide de (3.25) et donne [25] :

$$|J| \approx \lambda^6 |\sin \gamma| \approx 10^{-4}. \quad (3.62)$$

La quantité de violation CP est donc faible en raison de la petitesse des éléments non diagonaux de la matrice CKM et non à cause d'une phase très petite. On peut montrer que [26] :

$$|J| = s_1^2 s_2 s_3 c_1 c_2 c_3 \sin \delta, \quad (3.63)$$

et que tout effet de violation CP dans le modèle standard est toujours proportionnel à cette quantité. Il n'y a donc aucune violation CP dans le modèle lorsque :

$$\theta_i = 0 \quad \theta_i = \pi/2, \quad \delta = 0, \quad \text{ou} \quad \delta = \pi.$$

Les triangles d'unitarité permettent également de contraindre les éléments de la matrice CKM par des relations supplémentaires et indépendantes, on obtient alors une meilleure précision sur les éléments, ce qui permet notamment de tester la validité du modèle standard. Prenons pour exemple les éléments V_{us} , V_{cb} et V_{ub} , dont la détermination est obtenue par l'étude des processus semi-leptoniques. Les valeurs des éléments sont [27] :

$$|V_{us}| = \lambda = 0,2240 \pm 0,0036, \quad |V_{cb}| = (41,5 \pm 0,8) \times 10^{-3}, \quad |V_{ub}| = (35,7 \pm 3,1) \times 10^{-4},$$

et permettent d'obtenir à partir de $|V_{cb}| = A\lambda^2$ et de (3.53) :

$$A = 0,83 \pm 0,02, \quad R_b = 0,37 \pm 0,04.$$

La valeur de R_b impose que le sommet $(\bar{\rho}, \bar{\eta})$ du triangle d'unitarité considéré soit contenu dans un cercle. Rappelons l'équation (3.52) :

$$\frac{|V_{ub}|}{|V_{cb}|} = \frac{\lambda}{1 - \frac{\lambda^2}{2}} \sqrt{\bar{\rho}^2 + \bar{\eta}^2}. \quad (3.64)$$

La contrainte obtenue est représentée sur la figure (3.3).

Le modèle standard peut être testé dans le sens où si des mesures nous apportent que le sommet du triangle est hors de la zone de la figure (3.3), alors le modèle n'est pas parfait. Dans ce cas les bases principales du modèle, qui sont ici le mélange des saveurs par l'intermédiaire d'une matrice unitaire et l'existence de trois générations, seraient à reconsidérer¹².

Nous avons montré dans la section précédente que l'unitarité de la matrice CKM imposait certaine relation sur les éléments, c'est l'inégalité (3.42). Ici, nous venons de montrer une contrainte qu'apportent les triangles d'unitarité mais il en existe de nombreuses autres. Toutes ces contraintes permettent de tester la validité du modèle standard, nous en reparlerons au chapitre 6.

¹²C'est exactement ce que firent Kobayashi et Maskawa en étudiant la matrice de Cabibbo.

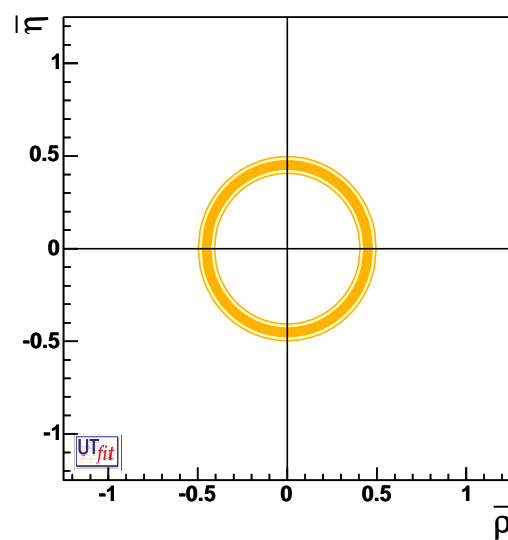


FIG. 3.3 – Contrainte imposée par la détermination de R_b sur la position du sommet du triangle d'unitarité. La bande la plus large correspond à une densité de probabilité de 95% et la plus petite à 68%. Figure extraite du site de la collaboration UTfit (www.utfit.com).

Chapitre 4

Bidiagonalisation

Dans le chapitre 2, nous avons montré que les matrices de masse des quarks n'étaient ni diagonales et ni général hermitiennes. Pour que ces matrices représentent la masse physique des quarks nous avons dû les diagonaliser par une méthode un peu particulière que nous allons décrire ici, la bidiagonalisation ou diagonalisation biunitaire. Nous expliquerons son principe qui est peu commun et en donnerons la preuve. Une fois la méthode expliquée, nous l'appliquerons dans le but d'obtenir les éléments de la matrice CKM à partir des éléments de U_L et D_L . Ces matrices ne correspondent pas directement à des observables mais leurs produits sont bien des observables physiques puisque ce sont les éléments de la matrice CKM¹.

4.1 Théorème et preuve

Nous nous inspirons ici d'un document écrit par S. Antusch, J. Kersten, M. Lindner, M. Ratz et M. Schmidt [28] qui décrit la méthode de bidiagonalisation. Avant de pouvoir démontrer le théorème de la bidiagonalisation, il nous faut introduire le lemme suivant, que nous ne démontrerons pas.

Lemme 1 *Une matrice M , complexe et symétrique, peut être diagonalisée par une matrice unitaire U ,*

$$U^T M U = \text{diag}(M_1, \dots, M_n) \equiv D, \quad (4.1)$$

où

$$U^\dagger M^\dagger M U = D^2. \quad (4.2)$$

Les nombres réels M_i sont donc positifs puisque ce sont les racines carrées des valeurs propres de $M^\dagger M$.

Ce lemme garanti donc que les valeurs propres d'une matrice symétrique sont positives.

¹Pour rappel : $V = U_L^\dagger D_L$.

Théorème 1 *Une matrice quelconque M peut être diagonalisée par une transformation biunitaire,*

$$U_L^\dagger M U_R = \text{diag}(M_1, \dots, M_n), \quad (4.3)$$

si aucunes des valeurs propres de $M^\dagger M$ ne sont égales à zéro. U_L et U_R sont unitaires et les valeurs propres M_i sont réelles et positives. Les matrices U_L et U_R peuvent être respectivement trouvées par la détermination des transformations unitaires qui diagonalisent MM^\dagger et $M^\dagger M$, c'est-à-dire :

$$U_L^\dagger M M^\dagger U_L = \text{diag}(M_1^2, \dots, M_n^2), \quad (4.4)$$

$$U_R^\dagger M^\dagger M U_R = \text{diag}(M_1^2, \dots, M_n^2). \quad (4.5)$$

Démonstration :

Définissons :

$$H^2 \equiv M M^\dagger, \quad (4.6)$$

qui est hermitien² et peut donc être diagonalisé par une transformation unitaire de sorte que :

$$U_L^\dagger M M^\dagger U_L = U_L^\dagger H^2 U_L = \text{diag}(M_1^2, \dots, M_n^2) \equiv D^2, \quad (4.7)$$

où les M_i sont réels. Vu le lemme précédent, nous pouvons également affirmer que les valeurs propres de H^2 sont positives puisque cette matrice est symétrique.

Nous définissons ensuite D comme étant la matrice diagonale contenant les racines carrées positives des éléments de D^2 . Dans ce cas, nous avons :

$$H \equiv U_L D U_L^\dagger, \quad (4.8)$$

qui satisfait à l'équation (4.6). Définissons la matrice unitaire V comme :

$$V \equiv H^{-1} M, \quad (4.9)$$

où l'unitarité provient de :

$$V^\dagger V = M^\dagger H^{-1} H^{-1} M = M^\dagger (H^2)^{-1} M = M^\dagger (M M^\dagger)^{-1} M = \mathbb{I}. \quad (4.10)$$

Nous pouvons écrire :

$$M = H V = U_L D U_L^\dagger U_R \quad (4.11)$$

où $U_R \equiv V^\dagger U_L$ est unitaire. Ceci prouve l'équation (4.4). De plus, U_R diagonalise MM^\dagger puisque nous avons :

$$U_R^\dagger M^\dagger M U_R = U_R^\dagger U_R D U_L^\dagger U_L D U_R^\dagger U_R = D^2, \quad (4.12)$$

ce qui prouve l'équation (4.5).

² $H = H^\dagger$.

4.2 Principe de la bidiagonalisation et intérêts

Rappelons brièvement la formulation du chapitre 2. Les matrices de masse M^u et M^d sont définies par $M^u = (v/\sqrt{2})Y^u$ et $M^d = (v/\sqrt{2})Y^d$ avec Y^u et Y^d les matrices qui contiennent les constantes de couplage de l'interaction de Yukawa et v la valeur moyenne du champ de Higgs dans le vide. Elles apparaissent dans le terme suivant, que l'on peut extraire du lagrangien de Yukawa (2.51) :

$$\mathcal{L}_{\text{Masse}} = d_{iR}M_{ij}^d d_{jL} + u_{iR}M_{ij}^u u_{jL} + c.h. . \quad (4.13)$$

Nous avons alors effectué les transformations (2.54) sur les quarks à l'aide des matrices unitaires U et D de manière à obtenir des matrices de masse diagonalisées et des termes de masse du type $m\bar{\psi}\psi$. Pour rappel, nous avons :

$$U_L^{-1}M^u U_R = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

$$D_L^{-1}M^d D_R = \begin{pmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Il nous faut maintenant montrer comment obtenir les matrices U et D . Nous nous limiterons au cas de la matrice D , la méthode pour obtenir U étant équivalente.

Comme la matrice M^d n'est pas hermitienne, nous construisons les matrices H et H' suivantes :

$$H = M^d M^{d\dagger}, \quad (4.16)$$

$$H' = M^{d\dagger} M^d, \quad (4.17)$$

qui sont hermitiennes et peuvent être diagonalisées par des matrices unitaires. On obtient :

$$\text{diag} (H_1^2, H_2^2, H_3^2) = D_L^\dagger H D_L, \quad (4.18)$$

$$\text{diag} (H_1'^2, H_2'^2, H_3'^2) = D_R^\dagger H' D_R, \quad (4.19)$$

avec H_i^2 et $H_i'^2$ les valeurs propres. Il nous faut alors faire intervenir le théorème de la bidiagonalisation qui stipule que les matrices D_L et D_R peuvent diagonaliser la matrice M^d de telle sorte que :

$$\text{diag} (M_1, M_2, M_3) = D^\dagger M^d D'. \quad (4.20)$$

Les valeurs propres M_i correspondent à la masse des quarks d , s et b avec $M_1^2 = H_1^2$. Le même principe pour M^u permet d'obtenir les matrices U_L et U_R , avec :

$$\text{diag} (M'_1, M'_2, M'_3) = U_L^\dagger M^u U_R, \quad (4.21)$$

où les valeurs propres M_i' correspondent aux masses des quarks u , c et t avec $M_1'^2 = H_1'^2$. Nous pouvons alors construire la matrice CKM : $V = U_L^\dagger D_L$.

Les matrices U_L et D_L , que l'on appelle texture, ont un impact sur le mélange des saveurs des quarks et sur leurs masses, mais la théorie ne nous permet pas de déterminer ces matrices. Par contre, une théorie plus fondamentale que le modèle standard pourrait nous permettre cette détermination [29] ainsi que de calculer la valeur des masses des quarks et des paramètres de la matrice CKM. Les théories allant dans ce sens, comme la théorie des cordes, n'ont pas encore permis d'obtenir de tels résultats. Une autre approche, phénoménologique, consiste à chercher des textures qui permettrait de retrouver les paramètres de la théorie, comme les masses des quarks et les paramètres de la matrice CKM. Les éventuelles symétries dans les textures obtenues pourraient alors apporter des indices sur la dynamique responsable de la génération de masse ainsi que sur la violation CP.

4.3 Programme sous REDUCE

Nous savons maintenant comment obtenir les matrices U_L et D_L à partir des matrices de masse M^d et M^u , mais nous ne connaissons pas ces deux dernières. Par contre nous savons que si ces deux matrices correspondent à celles de la théorie, nous obtiendrons la matrice CKM et des valeurs correctes pour la masse des quarks. Le programme créé a pour principe de choisir arbitrairement la valeur des éléments des matrices M^u et M^d , de les bidiagonaliser et de construire la matrice CKM correspondante. Il est évident qu'une telle démarche a très peu de chance d'aboutir à la bonne valeur des éléments de la matrice CKM et aux bonnes valeurs des masses de quarks mais cela sera discuté par la suite.

Pour l'instant, concentrons-nous sur des matrices obtenues dans la littérature qui, en plus d'être un bon exemple de bidiagonalisation, nous permettrons de vérifier le bon fonctionnement du programme. Une forme des textures données par [30] est la suivante :

$$M^u = \begin{pmatrix} \lambda^8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & \lambda^0 \end{pmatrix} m_t, \quad (4.22)$$

$$M^d = \begin{pmatrix} \lambda^4 & \lambda^3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^0 & \lambda^0 \end{pmatrix} m_b, \quad (4.23)$$

où m_t et m_b sont respectivement la masse courante du quark top et celle du bottom, λ est le paramètre de Cabibbo et vaut ici 0,22. Nous exprimons de la sorte les éléments de matrice en fonction de puissances de lambda. Le programme fournit alors les résultats suivants³ :

³A cause des erreurs numériques, les éléments non diagonaux sont parfois non nuls mais au plus de l'ordre de 10^{-10} . Pour plus de lisibilité, nous mettrons des zéros sur ces éléments.

$$U_L^{-1}M^uU_R = \begin{pmatrix} 0.000976 & 0 & 0 \\ 0 & 0.416003 & 0 \\ 0 & 0 & 178.416 \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

$$D_L^{-1}M^dD_R = \begin{pmatrix} 0.004574 & 0 & 0 \\ 0 & 0.070074 & 0 \\ 0 & 0 & 2.8292 \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

avec :

$$U_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.9988 & -0.04823 \\ 0 & 0.04823 & -0.9988 \end{pmatrix}, \quad (4.26)$$

$$U_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.99883 & -0.04823 \\ 0 & -0.04823 & -0.9988 \end{pmatrix}, \quad (4.27)$$

$$D_L = \begin{pmatrix} 0.976388 & -0.2159564 & 0.0053194 \\ 0.2157705 & 0.976144 & 0.02420604 \\ -0.01041996 & -0.02248673 & 0.9996928 \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

$$D_R = \begin{pmatrix} 0.9998957 & 0.01443869 & 0.0000088 \\ -0.0102216 & 0.7074268 & 0.7067126 \\ 0.01019777 & -0.7066390 & 0.7075007 \end{pmatrix}. \quad (4.29)$$

La matrice CKM correspondante est :

$$V_{CKM} = U_L^\dagger D_L = \begin{pmatrix} 0.97638 & 0.21544 & 0.01572 \\ 0.21577 & 0.9761 & 0.0229 \\ 0.0104 & 0.025 & 0.99961 \end{pmatrix}, \quad (4.30)$$

qui correspond bien⁴ aux valeurs des éléments de la matrice CKM et des masses des quarks que nous rappelons ici :

$$V = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9734 & 0.2196 & 0.0036 \\ 0.224 & 0.996 & 0.041 \\ 0.04 & 0.10 & 0.9993 \end{pmatrix}, \quad (4.31)$$

⁴Nous voulons ici montrer le principe de base sans entrer dans les détails. Il est possible d'obtenir des éléments plus proches des éléments réels de la matrice CKM avec des exposants non entiers sur les λ .

et les masses en GeV sont

$$\begin{aligned} m_u &= 0.000975 - 0.00260, & m_d &= 0.00260 - 0.00520, \\ m_c &= 0.598 - 0.702, & m_s &= 0.0520 - 0.0845, \\ m_t &= 170 - 180, & m_b &= 2.83 - 3.04. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Les autres matrices de [30], ainsi que celles données par [31], ont également été vérifiées et les valeurs obtenues pour les paramètres de la matrice CKM et les masses sont en accord avec les valeurs actuelles. Ceci confirme le bon fonctionnement du programme. Nous pouvons déjà remarquer que la matrice D_L est fort proche de la matrice CKM et donc, U_L doit être proche de la matrice identité.

En général, prendre des éléments au hasard pour les matrices M^u et M^d est très peu efficace pour obtenir la matrice CKM observée. Il faut en effet que les valeurs propre de M^u correspondent aux masses des quarks u , c , t , que les valeurs propres de M^d correspondent aux masses des quarks d , s , b et enfin que la matrice CKM créée à partir des matrices unitaires soit correcte. Nous nous limiterons, pour simplifier le problème, à modifier la matrice M^u et garderons la matrice M^d comme définie dans l'équation (4.23).

Nous avons également voulu étudier la répartition des masses obtenues lors d'une bidiagonalisation afin de voir s'il existe une corrélation entre elles. Nous nous intéressons pour cela uniquement aux masses issues de la matrice M^u c'est-à-dire aux masses m_u , m_c et m_t . Nous effectuons la transformation biunitaire de la matrice suivante :

$$M^u = \begin{pmatrix} \lambda^a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^b \\ 0 & \lambda^c & \lambda^d \end{pmatrix} m_t, \quad (4.33)$$

où les paramètres a , b , c et d sont des nombres entiers pris de manière aléatoire entre zéro et douze⁵. Nous savons qu'il existe un ensemble particulier pour les valeurs de a , b , c et d qui fournit des valeurs correctes pour les paramètres de la théorie, c'est l'équation (4.22). La répartition des masses se trouvent sur la figure (4.1), où nous avons représenté les masses obtenues pour le quarks u en fonction des masses du quark c .

On obtient de la sorte un quadrillage de l'espace qui semble particulier et donc qui pourrait mener à une relation entre les masses. Cette relation serait donc imposée par la méthode de la bidiagonalisation. Cependant, si nous décalons les valeurs de manière à réorganiser les tableaux de données, comme par exemple de la manière simplifiée suivante :

$$\begin{array}{cc} m_{u_1} & m_{t_1} \\ m_{u_2} & m_{t_2} \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} m_{u_1} & m_{t_2} \\ m_{u_2} & m_{t_1} \end{array}, \quad (4.34)$$

nous gardons la même répartition dans l'espace. Nous avons donc un ensemble de valeurs aléatoires et la bidiagonalisation n'apporte aucune contrainte sur les masses⁶. Nous trouvons tout de même, par cette méthode, deux nouvelles matrices auxquelles correspond les

⁵Ce nombre est arbitraire mais au delà de cette valeur l'élément de matrice serait quasi nul et son influence négligeable.

⁶Dans la limite des valeurs possibles c'est-à-dire entre $\lambda^0 \times m_t$ et $\lambda^{12} \times m_t$.

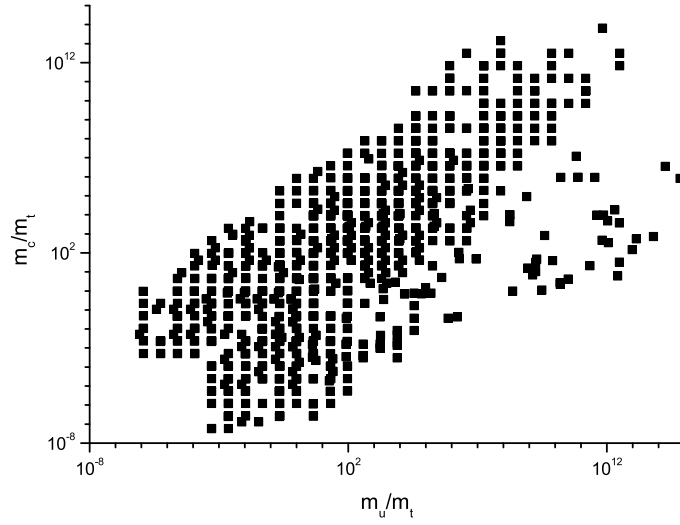


FIG. 4.1 – Répartitions des masses obtenues par la bidiagonalisation des textures

masses observées des quarks.

$$\begin{pmatrix} \lambda^8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^0 \\ 0 & \lambda^4 & \lambda^6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda^8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^4 \\ 0 & \lambda^0 & \lambda^5 \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

Les matrices CKM obtenues après la bidiagonalisation de ces deux textures sont respectivement :

$$\begin{pmatrix} 0.976388499115 & 0.00529492783799 & 0.215957084988 \\ 0.215770533422 & 0.0243167246449 & \mathbf{0.976141267332} \\ 0.0104199665387 & \mathbf{0.999690282358} & 0.0226000808754 \end{pmatrix}, \quad (4.36)$$

et

$$\begin{pmatrix} 0.976388499115 & 0.215956476836 & 0.00531960512266 \\ 0.215770533422 & 0.976144047324 & 0.0242051812614 \\ 0.0104199665387 & 0.0224855283934 & 0.999692858332 \end{pmatrix}, \quad (4.37)$$

où seule la matrice de l'équation (4.37) correspond à la matrice CKM. La matrice (4.36) contient, à première vue, les bonnes valeurs mais ne mélange pas les saveurs de la bonne manière. En effet, la matrice U_L est donné dans ce cas par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.000113380525457 & -0.999999993572 \\ 0 & 0.999999993572 & -0.000113380525457 \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

et a donc pour effet d'invertir les colonnes de la matrice D_L qui est proche de la matrice CKM. Les éléments proches de l'unité ne se situent alors pas sur la diagonale, ce qui est représenté en gras. Mis à part cette inversion de colonnes, les éléments de la matrice obtenue sont en accord avec la matrice CKM réelle. Nous avons donc essayé de voir quelle influence avait la matrice U_L sur la matrice CKM. Pour cela, nous avons effectué de nombreuses itérations sans nous soucier des conséquences sur la valeur des masses, et nous avons regardé les différentes formes prises par la matrice U_L . En général, U_L est proche de la matrice identité et la matrice CKM correspondante est donc proche de la matrice CKM réelle malgré que les masses soient très éloignées des valeurs observées. La contrainte la plus difficile à satisfaire n'est donc pas d'obtenir les éléments de CKM mais bien les bonnes masses des quarks.

Nous avons également cherché des matrices d'une autre forme que celle de l'équation (4.22). Nous avons pour cela construit la matrice suivante :

$$M^u = \begin{pmatrix} \lambda^a & \lambda^b & \lambda^c \\ \lambda^d & \lambda^e & \lambda^f \\ \lambda^g & \lambda^h & \lambda^i \end{pmatrix}, \quad (4.39)$$

où les exposants sont des nombres aléatoires, et nous y avons ajouté des éléments nuls de manière aléatoire. Notre but était de trouver une nouvelle forme de matrice dont les valeurs propres correspondent aux masses des quarks. Malheureusement, pour l'instant les matrices trouvées sont toujours équivalentes à celle de l'équation (4.22), les éléments nuls étant remplacés par des valeurs très faibles, c'est-à-dire ayant des exposants élevés. Il existe pourtant d'autres matrices M^u qui diffèrent de celle de l'équation (4.22) comme par exemple celles données dans [31].

Chapitre 5

Détermination des éléments de la matrice CKM

A de nombreuses reprises dans ce mémoire, nous avons utilisé la valeur des éléments de la matrice CKM, et cela sans donner le principe par lequel ces valeurs étaient obtenues. En particulier, dans la section consacrée aux triangles d'unitarité, nous avons parlé d'éléments obtenus par l'étude de processus semi-leptoniques et c'est à ce type de réaction que nous allons nous intéresser dans ce chapitre afin de calculer la valeur de l'élément de matrice V_{cb} .

5.1 Désintégration du quark bottom

Dans cette partie du mémoire, nous allons contraindre l'un des éléments de la matrice CKM. Pour cela, nous étudierons la désintégration du quark b dans un processus semi-leptonique. Ce type de processus permet d'éviter que le produit final ne comporte plusieurs quarks et supprime l'interaction forte qui en résulterait. De plus, ce type de processus de désintégration ne va impliquer qu'un seul courant chargé modifiant la saveur des quarks et ne sera donc proportionnel qu'à un seul élément de la matrice CKM. Il nous faudra obtenir la formule du taux de désintégration de ce processus afin d'estimer l'élément de matrice V_{qb} , avec q le quark c ou le quark u . Nous utiliserons pour cela les derniers résultats expérimentaux sur le méson B .

Nous devons cependant nous poser la question de savoir quelle masse il faudra utiliser pour rendre compte de la désintégration. En effet, contrairement aux leptons, les quarks sont confinés et nous ne pouvons les observer en tant que particules physiques isolées. Nous ne pouvons donc mesurer la masse des quarks directement comme on le ferait pour d'autres particules. Nous devons effectuer une mesure indirecte de la masse en utilisant l'influence que celle-ci a sur les propriétés hadroniques. Il en ressort deux types de masse, la masse d'un quark dit nu ¹, c'est-à-dire celle qui apparaît dans la matrice de masse, ou celle du

¹On parlera alors de masse du courant.

quark dit *habillé*², c'est-à-dire en interaction avec son nuage gluonique et la mer de quarks tel qu'il est observé dans les hadrons. Si nous prenons l'exemple d'un quark léger, le up, sa masse constituante est de l'ordre du tiers de la masse du proton soit 300 MeV alors que sa masse courante est de l'ordre de 3 MeV. Par contre, nous savons que pour les quarks lourds la différence entre ces deux masses est beaucoup plus faible que pour les quarks légers, le bottom a une masse nue de l'ordre de 4,2 GeV alors que sa masse constituante est de l'ordre de 4,7 GeV. La précision du calcul pour $b \rightarrow u$ serait donc plus faible que pour la désintégration du quark b en c même si le principe de calcul est identique. Pour avoir une meilleure précision, il est donc préférable d'utiliser des quarks lourds. De plus, le processus de désintégration du quark b en u est noyé dans les désintégrations du b en c vu que l'élément V_{ub} est beaucoup plus petit que V_{cb} . Nous nous limiterons donc ici à la discussion de la désintégration du quark b en c . Nous avons le processus suivant,

$$b \rightarrow ce\bar{\nu}_e, \quad (5.1)$$

où le quark lourd, appartenant à un hadron quelconque, sera considéré comme libre. Cette approximation est d'autant plus vraie que le quark qui se désintègre est lourd, ce qui apporte une deuxième raison pour utiliser ce type de quark. En effet, plus le quark est lourd plus son temps de vie est court et donc moins il interagit avec l'autre quark du hadron. L'approximation d'un quark libre impose que sa masse soit considérée comme infinie pour que son temps de vie soit quasi nul et revient à dire que les autres quarks du hadron sont spectateurs. Nous obtenons le type de réaction présenté dans la figure (5.1).

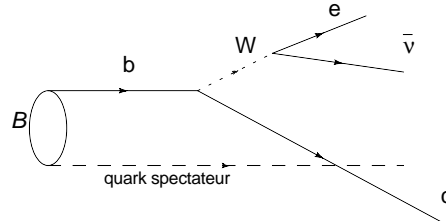


FIG. 5.1 – Désintégration du quark b dans le méson B .

Pour effectuer ce calcul, nous partirons de la formule du taux de désintégration différentiel dans le repère du centre de masse, donnée par [32] :

$$d\Gamma = \frac{1}{2M} |\mathcal{M}|^2 \prod_{f=1}^3 \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - \sum p_f), \quad (5.2)$$

où $\frac{1}{2M}$ est un facteur de normalisation avec M la masse de la particule qui se désintègre, $\prod_{f=1}^3 \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f}$ représente l'espace de phase à trois particules de l'état final, $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - \sum p_f)$ impose la conservation de la quadri-impulsion. Enfin, \mathcal{M} est l'élément de matrice invariant, ou amplitude invariante, qui est déterminé par le lagrangien et que nous pourrons

²On parlera alors de masse constituante.

obtenir grâce aux règles de Feynman. Si nous gardons cet élément tel quel, nous obtiendrons le taux de désintégration pour une valeur donnée du spin, il nous faut donc faire la moyenne sur tous les états de spin possibles. Finalement nous intégrerons (5.2) pour obtenir le taux de désintégration recherché.

5.2 Matrice invariante

Commençons par la détermination de l'élément de matrice invariant, \mathcal{M} . Pour cela, prenons le diagramme de Feynman de la figure 5.2 correspondant à la désintégration du quark b par l'intermédiaire d'un boson W^- .

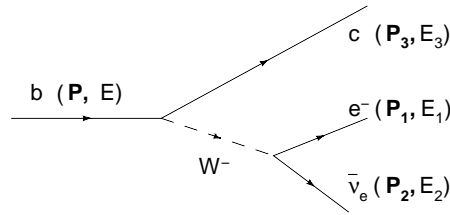


FIG. 5.2 – Désintégration du quark b en quark c par un processus semi-leptonique.

La partie du Lagrangien qui nous intéresse, c'est-à-dire celle qui couple les bosons intermédiaires chargés aux fermions, est donnée par l'équation (2.17) :

$$\mathcal{L}_{W^\pm} = -g_2 \bar{\psi} \gamma_\mu (W_\mu^+ T^+ + W_\mu^- T^-) \psi. \quad (5.3)$$

Il faut utiliser le courant de l'équation (2.58) pour faire apparaître la matrice CKM, nous avons alors :

$$\mathcal{L}_{W^\pm} = -g_2 \bar{\psi} \gamma_\mu (W_\mu^+ T^+ + W_\mu^- T^-) V \psi. \quad (5.4)$$

Nous utiliserons les notations suivantes : le quark b a une quadri-impulsion p et une masse M , le neutrino une quadri-impulsion p_2 et une masse m_2 , l'électron sera indicé 1 et le quark c sera quant à lui indicé 3. L'élément de matrice invariant obtenu par les règles de Feynman est donné par :

$$\mathcal{M} = \left(\frac{V_{cb} g_2}{\sqrt{2}} \bar{u}(c) \gamma^\nu \frac{(1 - \gamma^5)}{2} u(b) \right) \frac{i g_{\mu\nu}}{M_W^2 - q^2} \left(\frac{g_2}{\sqrt{2}} \bar{u}(e) \gamma_\mu \frac{(1 - \gamma^5)}{2} u(\nu) \right), \quad (5.5)$$

où le $\frac{i g_{\mu\nu}}{M_W^2 - q^2}$ représente le propagateur de l'interaction et q l'impulsion du W . Nous allons supposer qu'il est possible d'obtenir expérimentalement un quark b au repos³ et comme la masse du W est de l'ordre de 80 GeV, nous pouvons considérer que $q^2 \ll M_W^2$. Nous

³En ayant par exemple une collision $e^+ e^-$ juste à la limite du seuil de création d'une paire de hadrons $B^+ B^-$.

pouvons, grâce à notre approximation, écrire l'équation (5.5) afin d'y faire apparaître la constante de couplage de Fermi. Celle-ci vaut :

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g_2^2}{8M_W^2}. \quad (5.6)$$

Ecrivons (5.5) comme suit :

$$\mathcal{M} = \frac{4 V_{cb} G_F}{\sqrt{2}} \left(\bar{u}(c) \gamma^\nu \frac{(1 - \gamma^5)}{2} u(b) \right) \left(\bar{u}(e) \gamma_\mu \frac{(1 - \gamma^5)}{2} u(\nu) \right) = \frac{4 V_{cb} G_F}{\sqrt{2}} J_b J_e^\dagger. \quad (5.7)$$

Nous pouvons alors voir \mathcal{M} comme la contribution de deux courants, J_b et J_e . La conservation de la charge impose que ce produit soit celui d'un courant chargé positif et d'un courant chargé négatif.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, nous regardons tout les produits finaux de la désintégration sans en distinguer le spin. Il faut donc sommer sur les différentes orientations du spin et en prendre la moyenne :

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^2 \sum_{s'=1}^2 |\mathcal{M}|^2 = \frac{G_F^2}{4} L_b^{\mu\nu} L_{\mu\nu}^e, \quad (5.8)$$

avec

$$L_{\mu\nu}^e = \frac{1}{2} \sum_{spins} [\bar{u}(e) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(\nu)] [\bar{u}(e) \gamma^\nu (1 - \gamma^5) u(\nu)]^*, \quad (5.9)$$

et

$$L_b^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{spins} [V_{cb} \bar{u}(c) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(b)] [V_{cb} \bar{u}(c) \gamma^\nu (1 - \gamma^5) u(b)]^*. \quad (5.10)$$

En écrivant le conjugué complexe d'un produit de bi-spinors comme suit :

$$[\bar{u}(c) \gamma^\nu (1 - \gamma^5) u(b)]^* = [\bar{u}(b) \gamma^\nu (1 - \gamma^5) u(c)], \quad (5.11)$$

nous avons :

$$L_b^{\mu\nu} = \frac{|V_{cb}|^2}{2} \sum_{spin} [\bar{u}(c) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(b)] [\bar{u}(b) \gamma^\nu (1 - \gamma^5) u(c)]. \quad (5.12)$$

Ecrivons maintenant explicitement le produit matriciel ainsi que la somme sur les spins et faisons passer le dernier élément, $u(c)$, en première position. Nous obtenons :

$$L_b^{\mu\nu} = \frac{|V_{cb}|^2}{2} \underbrace{\sum_{s'=1}^2 u_\tau^{s'}(c) \bar{u}_\alpha^{s'}(c) \gamma_{\alpha\beta}^\mu (1 - \gamma^5)}_{(\gamma \cdot p_3 + m_3)_{\tau\alpha}} \underbrace{\sum_{s=1}^2 u_\gamma^s(b) \bar{u}_\delta^s(b) \gamma_{\delta\pi}^\nu (1 - \gamma^5)}_{(\gamma \cdot p + M)_{\gamma\delta}} \pi_\tau, \quad (5.13)$$

en utilisant les relations de complétude pour les fermions données par :

$$\sum_{s=1}^2 u^s(a)\bar{u}^s(a) = (\gamma \cdot k + m), \quad \sum_{s=1}^2 v^s(a)\bar{v}^s(a) = (\gamma \cdot k - m), \quad (5.14)$$

nous pouvons écrire $L_b^{\mu\nu}$ et faire de même pour obtenir $L_{\mu\nu}^e$:

$$L_b^{\mu\nu} = \frac{|V_{cb}|^2}{2} Tr [(\gamma \cdot p_3 + m_3)\gamma^\mu (1 - \gamma^5) (\gamma \cdot p + M)\gamma^\nu (1 - \gamma^5)], \quad (5.15)$$

$$L_{\mu\nu}^e = \frac{1}{2} Tr [(\gamma \cdot p_1 + m_1)\gamma_\mu (1 - \gamma^5) (\gamma \cdot p_2 + m_2)\gamma_\nu (1 - \gamma^5)]. \quad (5.16)$$

Simplifions ces expressions en utilisant les propriétés des traces et de la matrice γ^5 , qui sont :

$$\begin{aligned} (\gamma^5)^2 &= \mathbb{I}, \\ \{\gamma^\mu, \gamma^5\} &= 0, \\ Tr(\gamma^5 \gamma \cdot a \gamma \cdot b) &= 0, \\ Tr(\gamma^\rho \gamma^\beta \gamma^\lambda \gamma^\alpha) &= 4 \{g^{\rho\beta} g^{\lambda\alpha} + g^{\rho\alpha} g^{\beta\lambda} - g^{\rho\lambda} g^{\beta\alpha}\}, \\ Tr(\gamma^\rho \gamma^\beta \gamma^\lambda \gamma^\alpha \gamma^5) &= -4i\epsilon^{\rho\beta\lambda\alpha}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

où \mathbb{I} est la matrice identité.

Si nous développons le produit de l'équation (5.16) en utilisant (5.17) nous avons :

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}^e &= \frac{1}{2} Tr [(\gamma \cdot p_1 + m_1)\gamma_\mu (\gamma \cdot p_2 + m_2)\gamma_\nu] \\ &+ \frac{1}{2} Tr [(\gamma \cdot p_1 + m_1)\gamma_\mu (-\gamma^5) (\gamma \cdot p_2 + m_2)\gamma_\nu (-\gamma^5)] \\ &+ \frac{1}{2} Tr [(\gamma \cdot p_1 + m_1)\gamma_\mu (-\gamma^5) (\gamma \cdot p_2 + m_2)\gamma_\nu] \\ &+ \frac{1}{2} Tr [(\gamma \cdot p_1 + m_1)\gamma_\mu (\gamma \cdot p_2 + m_2)\gamma_\nu (-\gamma^5)], \quad (5.18) \\ &= \frac{1}{2} Tr [(\gamma \cdot p_1 + m_1)\gamma_\mu (\gamma \cdot p_2 + m_2)\gamma_\nu] \\ &+ \frac{1}{2} Tr [(\gamma \cdot p_1 + m_1)\gamma_\mu \gamma^5 \gamma^5 (\gamma \cdot p_2 + m_2)\gamma_\nu] \\ &- \frac{1}{2} Tr [(\gamma \cdot p_1 + m_1)\gamma_\mu \gamma^5 (\gamma \cdot p_2 + m_2)\gamma_\nu] \\ &- \frac{1}{2} Tr [(\gamma \cdot p_1 + m_1)\gamma_\mu \gamma^5 (\gamma \cdot p_2 - m_2)\gamma_\nu]. \quad (5.19) \end{aligned}$$

Le premier terme est ce que l'on obtiendrait en QED, c'est-à-dire sans aucune matrice γ^5 . Le deuxième terme est équivalent mis à part que $m_2 \rightarrow -m_2$. Le même principe

est d'application pour le troisième et quatrième termes sauf que cette fois la matrice γ^5 subsiste. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}
L_{\mu\nu}^e &= \frac{1}{2} Tr \left[2(\gamma \cdot p_1 + m_1) \gamma_\mu \gamma \cdot p_2 \gamma_\nu - 2(\gamma \cdot p_1 + m_1) \gamma_\mu \gamma \cdot p_2 \gamma_\nu \gamma^5 \right] \\
&= Tr \left[(\gamma \cdot p_1 + m_1) \gamma_\mu \gamma \cdot k \gamma_\nu (1 - \gamma^5) \right] \\
&= Tr \left[(\gamma \cdot p_1 + m_1) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \gamma \cdot p_2 \gamma_\nu \right] \\
&= Tr \left[(\gamma \cdot p_1) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) (\gamma \cdot p_2) \gamma_\nu \right], \tag{5.20}
\end{aligned}$$

où à la dernière étape nous avons utilisé (5.17). En faisant de même pour $L_b^{\mu\nu}$ nous obtenons :

$$L_b^{\mu\nu} = Tr \left[(\gamma \cdot p_3) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \gamma \cdot p \gamma^\nu \right]. \tag{5.21}$$

Nous pouvons écrire l'équation (5.8) comme suit :

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{|V_{cb}|^2}{2} G_F^2 Tr \left[(\gamma \cdot p_3) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) (\gamma \cdot p) \gamma^\nu \right] Tr \left[(\gamma \cdot p_1) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) (\gamma \cdot p_2) \gamma_\nu \right] \tag{5.22}$$

Développons le produit sur les matrices gamma de cette équation, nous pouvons alors utiliser les relations de (5.17) pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{|V_{cb}|^2}{2} G_F^2 Tr \left[(\gamma^\sigma p_{3\sigma}) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) (\gamma^\epsilon p_\epsilon) \gamma^\nu \right] Tr \left[(\gamma_\tau p_1^\tau) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) (\gamma_\xi p_2^\xi) \gamma_\nu \right] \\
&= 32 |V_{cb}|^2 G_F^2 (p_3^\mu p^\nu + p_3^\nu p^\mu - g^{\mu\nu} p_3 \cdot p + p_{3\sigma} p_\epsilon i \epsilon^{\sigma\mu\epsilon\nu}) (p_{1\mu} p_{2\nu} + p_{1\nu} p_{2\mu} - g_{\mu\nu} p_1 \cdot p_2 + p_1^\tau p_2^\xi i \epsilon_{\tau\mu\xi\nu}), \tag{5.23}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= 32 |V_{cb}|^2 G_F^2 [(p_{1\mu} p_{2\nu} p_3^\mu p^\nu + p_{1\mu} p_{2\nu} p_3^\nu p^\mu - p_{1\mu} p_{2\nu} g_{\mu\nu} p_3 \cdot p + p_3^\mu p^\nu p_1^\tau p_2^\xi i \epsilon_{\tau\mu\xi\nu}) \\
&+ (p_1 \cdot p p_3 \cdot p_2 + p_1 \cdot p_3 p \cdot p_2 - p_{1\nu} p_{2\mu} g^{\mu\nu} p_3 \cdot p + p_3^\nu p^\mu p_1^\tau p_2^\xi i \epsilon_{\tau\mu\xi\nu}) \\
&- (g^{\mu\nu} p_3 \cdot p p_{1\mu} p_{2\nu} + g^{\mu\nu} p_3 \cdot p p_{1\nu} p_{2\mu} - 4 p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p + i g^{\mu\nu} p_3 \cdot p p_1^\tau p_2^\xi \epsilon_{\tau\mu\xi\nu}) \\
&+ (i \epsilon^{\sigma\mu\epsilon\nu} p_{3\sigma} p_\epsilon (p_{1\mu} p_{2\nu} + p_{1\nu} p_{2\mu}) - i \epsilon^{\sigma\mu\epsilon\nu} p_{3\sigma} p_\epsilon g_{\mu\nu} p_1 \cdot p_2 \\
&- \epsilon_{\tau\mu\xi\nu} \epsilon^{\sigma\mu\epsilon\nu} p_{3\sigma} p_\epsilon p_1^\tau p_2^\xi)]. \tag{5.24}
\end{aligned}$$

Remarquons que les termes imaginaires s'annulent grâce à l'antisymétrie de ϵ^{abcd} , de plus nous avons :

$$\epsilon_{\tau\mu\xi\nu} \epsilon^{\sigma\mu\epsilon\nu} p_{3\sigma} p_\epsilon p_1^\tau p_2^\xi = 2 p_1 \cdot p p_3 \cdot p_2. \tag{5.25}$$

Nous pouvons écrire après de nombreuses simplifications :

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 64 |V_{cb}|^2 G_F^2 (p_3 \cdot p_1) (p_2 \cdot p), \tag{5.26}$$

qui est l'amplitude correspondant à la désintégration du quark b en quark c .

5.3 Espace de phase

Occupons-nous maintenant de l'espace de phase à trois corps. Puisque la quantité

$$\int d\Pi_3 = \left(\prod_{f=1}^3 \int \frac{d^3\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - \sum p_f), \quad (5.27)$$

est un invariant relativiste, nous pouvons simplifier cette expression en nous plaçant dans le référentiel où le quark b est au repos. Nous pouvons alors effectuer l'intégrale sur $d^3\mathbf{p}_3$ où le $\delta^{(4)}(p - \sum p_f)$ impose la conservation de l'impulsion, c'est-à-dire $\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$. L'équation (5.27) devient :

$$\int d\Pi_3 = \left(\prod_{f=1}^2 \int \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3 2E_f} \frac{1}{(2\pi)^3 2E_3} \right) (2\pi)^4 \delta(E_i - \sum E_f), \quad (5.28)$$

où E_i est l'énergie de l'état initial, c'est-à-dire la masse du quark b , et E_f correspond à l'énergie des particules finales avec $E_f^2 = m_f^2 + \mathbf{p}_f^2$. Passons aux coordonnées sphériques dans le système du centre de masse :

$$\begin{aligned} d^3\mathbf{p}_1 &= p_1^2 dp_1 d\Omega_1, \\ d^3\mathbf{p}_2 &= p_2^2 dp_2 d\Omega_{12}, \\ d\Omega_{12} &= d\phi_{12} d\cos\theta_{12}, \end{aligned} \quad (5.29)$$

avec Ω_1 l'angle solide de \mathbf{p}_1 et Ω_{12} l'angle solide de \mathbf{p}_2 relatif à \mathbf{p}_1 qui dépend donc de θ_{12} . Les angles sont représentés sur la figure 5.3.

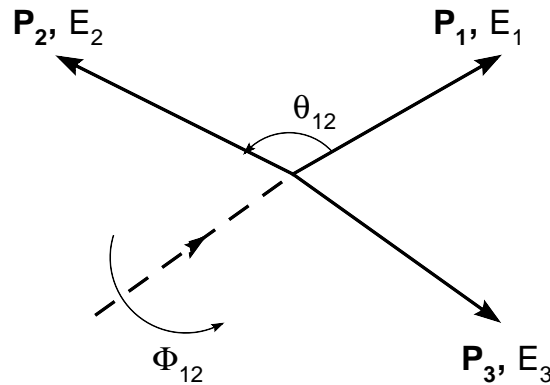


FIG. 5.3 – Représentation de l'état final dans le centre de masse.

Puisqu'il reste une distribution de Dirac, nous pouvons contraindre une dernière variable. Nous choisissons $\cos\theta_{12}$ de manière à supprimer un angle. Les 5 variables indépendantes sont alors \mathbf{p}_1 , p_2 , ϕ_{12} . La dépendance en θ_{12} apparaît via E_3 :

$$E_3 = \sqrt{m_3^2 + \mathbf{p}_3^2} = \sqrt{m_3^2 + \mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2 + 2p_1p_2 \cos\theta_{12}}, \quad (5.30)$$

où nous avons utilisé la conservation de l'impulsion dans le système du centre de masse. Pour effectuer l'intégrale sur $\cos \theta_{12}$, nous allons utiliser la propriété des distributions de Dirac suivante :

$$\delta(f(x)) = \frac{\delta(x - x_0)}{\left| \frac{df(x)}{dx} \right|} \quad (5.31)$$

avec x_0 la solution de $f(x) = 0$. Nous avons alors :

$$\int \delta(W - E_1 - E_2 - E_3) d \cos \theta_{12} = \int \frac{\delta(\cos \theta_{12} - x_0)}{\frac{p_1 p_2}{E_3}} d \cos \theta_{12} = \frac{E_3}{p_1 p_2}.$$

et nous obtenons l'espace des phases à trois corps :

$$\int d \prod_3 = \int \frac{dE_1 dE_2 d\Omega_1 d\phi_{12}}{256\pi^5}, \quad (5.32)$$

où l'on a remplacé $\frac{p_i}{E_i} dp_i$ par dE_i .

5.4 Taux de désintégration

Nous pouvons, en rassemblant (5.26), (5.29) et (5.32), réécrire le taux de désintégration différentiel (5.2), comme suit :

$$d\Gamma = \frac{G_F^2 |V_{qb}|^2}{8\pi^5 M} (p \cdot p_2)(p_1 \cdot p_3) dE_1 dE_2 d\Omega_1 d\phi_{12}, \quad (5.33)$$

Comme nous avons supprimé toute l'information liée au spin, il ne devrait pas y avoir de direction privilégiée lors de la désintégration dans le système du centre de masse. L'intégrale sur les angles s'effectue donc facilement et on a :

$$\int d\Omega_1 d\phi_{12} = 8\pi^2. \quad (5.34)$$

Nous allons maintenant introduire les masses effectives des paires de particules dans l'état final. Ces quantités sont notées m_{ij}^2 et valent $(p_i + p_j)^2$ par convention. Il suffit alors de deux paramètres pour décrire correctement le système. Nous prendrons ici m_{12}^2 et m_{23}^2 . Cette technique s'appelle la méthode de Dalitz. La troisième masse effective, m_{13}^2 , est fonction des deux autres :

$$m_{12}^2 + m_{23}^2 + m_{13}^2 = M^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = \text{constante} \quad (5.35)$$

Cette méthode permet de décrire n'importe quel système à trois corps dans l'état final à l'aide de deux variables. Ceci permet de représenter graphiquement tout l'espace de phase

à l'aide de ces deux variables comme nous le verrons par la suite. Regardons ce que donnent ces variables dans notre cas :

$$\begin{aligned} m_{12}^2 &= (p_1 + p_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 - (E_3^2 - m_3^2) \\ &= (E_1 + E_2)^2 - ((M - E_1 - E_2)^2 - m_3^2) \\ &= m_3^2 - M^2 + 2M(E_1 + E_2), \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} m_{23}^2 &= (p_2 + p_3)^2 = (E_2 + E_3)^2 - (\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)^2 = (M - E_1)^2 - (\mathbf{p}_1)^2 \\ &= M^2 + m_1^2 - 2ME_1, \end{aligned} \quad (5.37)$$

où nous avons utilisé la conservation de l'impulsion ainsi que la conservation de l'énergie $M - E_1 - E_2 - E_3 = 0$. Pour terminer, il nous faut calculer le jacobien du changement de variable qui n'est rien d'autre que :

$$\begin{bmatrix} \frac{\delta m_{12}^2}{\delta E_1} & \frac{\delta m_{12}^2}{\delta E_2} \\ \frac{\delta m_{23}^2}{\delta E_1} & \frac{\delta m_{23}^2}{\delta E_2} \end{bmatrix} = 4M^2, \quad (5.38)$$

donc

$$dm_{12}^2 dm_{23}^2 = 4M^2 dE_1 dE_2. \quad (5.39)$$

Réécrivons (5.26) en fonction des nouvelles variables en rappelant que nous nous sommes placés dans le système du centre de masse du quark bottom et donc $p = (M, 0, 0, 0)$.

$$p \cdot p_2 = ME_2 = M \frac{m_{12}^2 - m_3^2 + M^2 - 2ME_1}{2M} = \frac{m_{12}^2 - m_3^2 + m_{23}^2 - m_1^2}{2} \quad (5.40)$$

$$p_1 \cdot p_3 = \frac{(p_1 + p_3)^2 - p_1^2 - p_3^2}{2} = \frac{m_{13}^2 - m_1^2 - m_3^2}{2} = \frac{M^2 + m_2^2 - m_{12}^2 - m_{23}^2}{2} \quad (5.41)$$

Finalement, nous pouvons écrire (5.33) comme suit :

$$d\Gamma = \frac{G_F^2 |V_{cb}|^2}{16\pi^3 M^3} (m_{12}^2 - m_3^2 + m_{23}^2 - m_1^2) (M^2 + m_2^2 - m_{12}^2 - m_{23}^2) dm_{12}^2 dm_{23}^2. \quad (5.42)$$

Il nous faut maintenant obtenir les bornes d'intégration. Nous pouvons déjà écrire les valeurs minimum et maximum de m_{12}^2 qui sont respectivement $(m_1 + m_2)^2$ et $(M - m_3)^2$, la valeur minimum étant obtenue lorsque le système m_{12} a une énergie cinétique nulle, c'est-à-dire une énergie correspondant uniquement à la création des deux masses. Pour la borne supérieure, il faut considérer l'énergie cinétique de la particule comme étant maximale. Pour m_{23}^2 , c'est un peu plus compliqué mais comme les quantités m_{12}^2 et m_{23}^2 sont des invariants de Lorentz, nous pouvons nous placer dans n'importe quel système de référence. Nous choisissons le système où m_{12} est au repos. Ensuite, pour une valeur donnée de m_{12}^2 , comprise entre les deux bornes, l'intervalle de m_{23}^2 est déterminé par ses valeurs lorsque \mathbf{p}_2 est soit parallèle soit antiparallèle à \mathbf{p}_3 [20]. Le premier cas nous donne le minimum et le

second le maximum, soit :

$$\begin{aligned}
(m_{23})_{max} &= (E_2^* + E_3^*)^2 - (\mathbf{p}_2^* - \mathbf{p}_3^*)^2, \\
(m_{23})_{min} &= (E_2^* + E_3^*)^2 - (\mathbf{p}_2^* + \mathbf{p}_3^*)^2, \\
(m_{12})_{max} &= (M - m_3)^2, \\
(m_{12})_{min} &= (m_1 + m_2)^2.
\end{aligned} \tag{5.43}$$

La difficulté pour m_{23}^2 est qu'il faut écrire l'énergie et l'impulsion des particules 2 et 3 dans le système choisi, c'est-à-dire dans celui où m_{12} est au repos. D'où l'utilisation de quantités étoilées signifiant qu'elles sont prises dans le système p_2 . Il nous faudra uniquement obtenir E_2^* et E_3^* puisque $p_i^{2*} = \sqrt{E_i^{2*} - m_i^2}$. Celles-ci sont [20] :

$$E_2^* = \frac{(m_{12}^2 - m_1^2 + m_2^2)}{2m_{12}} \tag{5.44}$$

$$E_3^* = \frac{(M^2 - m_1^2 - m_3^2)}{2m_{12}} \tag{5.45}$$

Avant de réécrire les bornes d'intégration, nous allons effectuer une approximation. Etant donné que la masse de l'électron est de 0.511 MeV et que celle du quark b est de l'ordre de 4.5 GeV, nous pouvons, sans faire trop d'erreurs⁴, considérer la masse de l'électron et celle du neutrino comme nulles, $m_1 \approx 0$ et $m_2 \approx 0$. Dans le cadre de cette approximation, la contrainte sur nos paramètres devient :

$$\begin{aligned}
(m_{23})_{max} &= \frac{1}{2} \{ M^2 + m_3^2 - m_{12}^2 + \sqrt{(M^2 - m_{12}^2 - m_3^2)^2 - 4m_{12}^2 m_3^2} \} \\
(m_{23})_{min} &= \frac{1}{2} \{ M^2 + m_3^2 - m_{12}^2 - \sqrt{(M^2 - m_{12}^2 - m_3^2)^2 - 4m_{12}^2 m_3^2} \} \\
(m_{12})_{max} &= (M - m_3)^2 \\
(m_{12})_{min} &= 0
\end{aligned} \tag{5.46}$$

Nous pouvons maintenant calculer le taux de désintégration du quark b en quark c à partir de l'équation (5.42). Nous avons :

$$\Gamma = \frac{G_F^2 |V_{qb}|^2}{16\pi^3 M^3} \int_{(m_{12}^2)_{min}}^{(m_{12}^2)_{max}} \int_{(m_{23}^2)_{min}}^{(m_{23}^2)_{max}} (m_{12}^2 - m_3^2 + m_{23}^2 - m_1^2) (M^2 + m_2^2 - m_{12}^2 - m_{23}^2) dm_{12}^2 dm_{23}^2. \tag{5.47}$$

L'intégrale sur dm_{23}^2 peut être décomposée en trois termes, l'un constante, l'un en m_{23}^2 et enfin un terme en m_{23}^4 :

⁴L'erreur sera de l'ordre du pourcent puisque l'on néglige un terme en $(\frac{m_e}{M_b})^2$.

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{G_F^2 |V_{qb}|^2}{16\pi^3 M^3} \int_{(m_{12}^2)_{min}}^{(m_{12}^2)_{max}} \{(m_{12}^2 M^2 - m_{12}^4 - m_3^2 M^2 + m_{12}^2 m_3^2)\tau \\
&+ \frac{1}{2}(M^2 + m_3^2 - 2m_{12}^2)(M^2 + m_3^2 - m_{12}^2)\tau \\
&- \frac{1}{12}[3(M^2 + m_3^2 - 2m_{12}^2)^2\tau + \tau^3]\} dm_{12}^2, \tag{5.48}
\end{aligned}$$

avec $\tau = \sqrt{(M^2 - m_{12}^2 - m_3^2)^2 - 4m_{12}^2 m_3^2}$.

Intéressons-nous au premier terme, c'est-à-dire à $(m_{12}^2 M^2 - m_{12}^4 - m_3^2 M^2 + m_{12}^2 m_3^2)\tau$. L'intégration sur m_{12}^2 se fait facilement hormis certaines parties qui nous apportent un logarithme, nous allons montrer comment celui-ci apparaît. Ecrivons la partie du terme en $m_{12}^2\tau$, nous pouvons en simplifier l'écriture :

$$\begin{aligned}
(m_3^2 + M^2)m_{12}^2\tau &= -\frac{1}{2}am_{12}^2\sqrt{m_{12}^4 + am_{12}^2 + b} \\
\Rightarrow \int_0^{(M-m_3)^2} &-\frac{1}{2}am_{12}^2\sqrt{m_{12}^4 + am_{12}^2 + b} dm_{12}^2, \tag{5.49}
\end{aligned}$$

avec

$$a = -2M^2 - 2m_3^2, \quad b = M^4 + m_3^4 - 2M^2 m_3^2.$$

On pose alors $m_{12}^2 = Z - a/2$ suivi de $Z^2 = \tau$ pour pouvoir réécrire l'équation (5.49) comme :

$$\int \sqrt{\tau - \frac{a^2}{4} + b} \frac{d\tau}{2} - \frac{a}{2} \int \sqrt{Z^2 - \frac{a^2}{4} + b} dZ. \tag{5.50}$$

La première partie du terme donnera évidemment $\frac{1}{3}(\tau - \frac{a^2}{4} + b)^{3/2}$. Par contre, pour le second terme, il faudra utiliser le résultat suivant [33] :

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2x\sqrt{x^2 \pm a^2}} \pm a^2 \ln(|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|), \tag{5.51}$$

ce qui aura pour effet de faire apparaître un terme en logarithme comme annoncé. D'autres termes du même type vont également apparaître [33] sous la forme :

$$\int x^2 \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{4}x(x^2 \pm a^2)^{3/2} \mp \frac{a^2}{8}x(x^2 \pm a^2)^{1/2} + \frac{3}{8}a^4 \ln |(x^2 \pm a^2)^{1/2}|. \tag{5.52}$$

Maintenant que nous avons montré d'où viennent les termes en logarithme, nous pouvons obtenir, grâce au programme REDUCE, le résultat final qui est :

$$\Gamma = \frac{G_F^2 |V_{cb}|^2}{16\pi^3 M^3} \left\{ \frac{1}{12} (M^8 - 8M^6 m_3^2 + 8M^2 m_3^6 - m_3^8) + M^4 m_3^4 \ln\left(\frac{M^2}{m_3^2}\right) \right\}. \quad (5.53)$$

Comme nous pouvons le voir dans cette équation, le taux de désintégration du quark b en c est, dans le cadre de nos approximations, une fonction de la masse de ceux-ci, de la constante de Fermi et de V_{cb} . L'équation (5.53) est en accord avec celle obtenue par [34]. Nous allons voir dans la section suivante comment déterminer cet élément de matrice à partir de l'équation (5.53) et de l'expérience.

5.5 Détermination de V_{cb}

Nous allons déterminer les éléments de la matrice CKM de manière simplifiée et nous discuterons des méthodes de correction utilisées plus en détail par la suite. Pour que les calculs aient un sens, nous supposons qu'il est possible d'obtenir un quark b au repos, c'est-à-dire de se placer dans les conditions d'approximation mentionnées précédemment, nous pouvons alors négliger la fonction d'onde du hadron et ainsi considérer des quarks légers spectateurs. Pour déterminer l'élément V_{cb} , il nous faut utiliser les données les plus récentes sur les particules [35] :

$$m_c = (1,25 \pm 0,09) \text{ GeV}; \quad m_b = (4,20 \pm 0,07) \text{ GeV}; \quad m_W = (80,403 \pm 0,029) \text{ GeV},$$

ainsi que la valeur de la constante de Fermi : $G_F = 1,166 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$.

L'équation (5.53) donne alors :

$$\Gamma(b \rightarrow ce\bar{\nu}_e) = 0,156 \times 10^{-10} |V_{cb}|^2 \text{ GeV}. \quad (5.54)$$

Il nous faut maintenant connaître les taux de désintégration du quark b en c , c'est le membre de gauche de (5.53). Pour cela, il faut le temps de vie du méson B et le pourcentage de chaque processus de désintégration qui implique une transition $b \rightarrow c$, que l'on obtient par l'expérience. Les données de la désintégration semi-leptonique du méson B^+ sont [35]

$$\begin{aligned} m_{B^\pm} &= 5279,0 \pm 0,5 \text{ MeV} \\ \tau_{B^\pm} &= 1,638 \pm 0,011 \cdot 10^{-12} \text{ s} \\ BR(B^+ \rightarrow l^+ \nu_l X_c) &= (10,9 \pm 0,4)\% \\ BR(B^+ \rightarrow \bar{D}^0 l^+ \nu_l) &= (2,15 \pm 0,22)\% \\ BR(B^+ \rightarrow \bar{D}^{*0} l^+ \nu_l) &= (6,5 \pm 0,5)\% \\ BR(B^+ \rightarrow \bar{D}_1^0 l^+ \nu_l) &= (0,56 \pm 0,16)\% \\ BR(B^+ \rightarrow \bar{D}_2^{*0} l^+ \nu_l) &< 8 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

où X_c représente n'importe quelles particules pouvant être obtenues dans ce genre de processus semi-leptonique. Nous obtenons le taux de désintégration total suivant :

$$\Gamma_{total} = \frac{\hbar}{\tau} = 4,017 \times 10^{-13} \text{ GeV}. \quad (5.55)$$

Ce taux correspond à la désintégration du méson B par n'importe quel processus mais seul les processus avec la transition $b \rightarrow c$ nous intéresse. Il faut donc multiplier (5.55) par le rapport de branchement en mésons charmés :

$$\begin{aligned} \Gamma(\bar{b} \rightarrow \bar{c}e^+\nu_e) &\approx \Gamma_{total} \times \{BR(B^+ \rightarrow \bar{D}^0l^+\nu_l) + BR(B^+ \rightarrow \bar{D}^{*0}l^+\nu_l) \\ &+ BR(B^+ \rightarrow \bar{D}_1^0l^+\nu_l) + BR(B^+ \rightarrow \bar{D}_2^{*0}l^+\nu_l)\} \\ &= (3,937 \pm 0,57) \times 10^{-14} \text{ GeV} \end{aligned} \quad (5.56)$$

Une fois la substitution effectuée dans (5.53), nous obtenons :

$$|V_{cb}| = (50,1 \pm 2,9) \times 10^{-3}. \quad (5.57)$$

Cette valeur est à comparer avec la valeur récemment obtenue pour l'élément V_{cb} de la matrice CKM qui est [35] :

$$|V_{cb}| = (41,6 \pm 0,6) \times 10^{-3}. \quad (5.58)$$

La différence provient des nombreuses corrections qui sont effectuées lors du calcul de cet élément. Nous en parlerons dans le chapitre 6.

En plus d'obtenir un élément de la matrice CKM nous pouvons également estimer le paramètre de Wolfenstein A , puisque nous avons :

$$|V_{cb}| = A\lambda^2, \quad (5.59)$$

ce qui permet d'obtenir, sachant que $\lambda = 0,2258$:

$$A = 1,035, \quad (5.60)$$

la valeur actuellement admise étant de $A = 0,83 \pm 0,02$. La valeur que nous avons obtenue dans l'équation (5.57) n'est pas aussi précise que celle qui est obtenue actuellement, il existe donc d'autres méthodes apportant une meilleure précision. Celles-ci seront discutées dans le chapitre suivant.

Chapitre 6

Eléments de la matrice CKM

Nous avons, dans le chapitre précédent, déterminé l'élément V_{cb} de la matrice CKM en utilisant certaines approximations et nous avons obtenu une valeur assez proche de sa valeur actuelle. Nous allons dans ce chapitre expliquer comment il est possible d'effectuer les différentes corrections pour l'élément V_{cb} . Ensuite, nous allons contraindre les éléments de la matrice CKM à l'aide des triangle d'unitarité comme nous l'avons fait précédemment. Nous obtiendrons au final, après avoir rassemblé toutes les contraintes, les éléments de la matrice CKM tels qu'ils sont connus à l'heure actuelle, ainsi que les paramètres du triangle d'unitarité correspondant à la relation (3.45). Les corrections des processus semi-leptoniques étant dues à des phénomènes non perturbatifs de QCD, elles dépassent largement le niveau de ce mémoire. Nous ne rentrerons donc pas dans les détails.

Pour terminer, nous expliquerons comment les contraintes permettent de tester le modèle standard et comment elles peuvent mener à la découverte de nouveaux effets physiques.

6.1 L'élément de matrice V_{cb}

Il existe deux méthodes pour extraire le paramètre V_{cb} :

- La mesure *inclusive*, où l'on utilise le temps de vie du hadron B dans les processus semi-leptoniques. C'est la méthode que nous avons utilisée dans le chapitre précédent.
- La mesure *exclusive*, où l'élément est extrait de l'étude des désintégrations $B \rightarrow D l \nu$ et $B \rightarrow D^* l \nu$.

La principale approximation que nous avons utilisée lors de la détermination de l'élément V_{cb} est d'avoir considéré que les processus d'interactions fortes étaient négligeables, c'est-à-dire que le quark léger du méson B était un spectateur. Comme nous l'avons dit, cette approximation est d'autant meilleure que le quark b est lourd et que son temps de vie est faible. En pratique, on ne peut empêcher les quarks contenus dans le méson B d'interagir entre eux et avec le nuage gluonique puisqu'ils n'auront jamais une masse infinie. Il faut donc en réalité tenir compte de phénomènes non perturbatifs comme, par exemple, le processus représenté sur la figure (6.1).

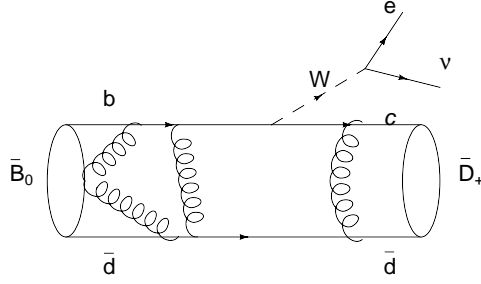


FIG. 6.1 – Désintégration du quark b dans le méson B avec des processus d'interaction fortes.

Une des méthodes utilisées pour cela est la théorie effective des quarks lourds (Heavy Quark Effective Theory) qui est une théorie exacte dans la limite où la masse des quarks tend vers l'infini. Le formalisme se trouve, par exemple, dans les références [36] et [27]. L'ordre zéro de cette théorie correspond au calcul que nous avons effectué au chapitre 5 et considère des quarks infiniment lourds. Il n'y a donc, comme dans notre cas, aucune interaction forte entre les quarks du hadron. Les ordres suivants sont obtenus par une expansion en puissance de $\frac{\Lambda_{QCD}}{M_Q}$ où Q représente les quarks du méson. Cela permet de tenir compte des effets non perturbatifs liés à l'interaction forte qui apparaissent à l'ordre deux c'est-à-dire sous la forme de $\frac{\Lambda_{QCD}^2}{M_Q^2}$. Une autre méthode fréquemment utilisée est la chromodynamique quantique¹ sur réseau qui résout la théorie sur un espace-temps discrétisé et dans un volume fini, et dont le principe est très simplement expliqué dans la référence [37].

Les autres éléments de la matrice CKM peuvent également être obtenus par l'étude de processus semi-leptoniques auxquels il faut ajouter les corrections non perturbatives.

On utilise en outre une autre méthode : la détermination la plus précise se fait par un ajustement global des paramètres. Cet ajustement utilise toutes les mesures accessibles et impose les contraintes du modèle standard c'est-à-dire une matrice CKM à trois générations et unitaire. Les données d'entrée de l'ajustement contiendront certains éléments de la matrice CKM qui devront être déterminés par des processus semi-leptoniques. On choisira en général les éléments V_{us} et V_{cb} car ce sont ceux sur lesquels nous avons le plus de précision par mesure directe. Plusieurs collaborations effectuent ce genre d'ajustement global sur les paramètres du modèle standard. Nous développerons dans la section suivante les résultats obtenus par **UTfit**² [39].

¹QCD.

²Une autre collaboration est celle de *CKMfitter* et fournit des résultats similaires [38].

6.2 Test du modèle standard par les triangles d'unitarité

Nous avons déjà, dans la section consacrée aux triangles d'unitarité, discuté de la contrainte qu'apporte la valeur des éléments V_{ub} et V_{cb} sur la longueur R_b du côté gauche du triangle d'unitarité normalisé. Elle est obtenue par l'étude des désintégrations du méson B et impose :

$$R_b = 0.409 \pm 0.027 . \quad (6.1)$$

Nous allons passer en revue les différentes contraintes obtenues par la collaboration **UTfit** sur les éléments de la matrice CKM, ce qui permet de tester la validité du modèle standard. Les valeurs d'entrée des paramètres et des contraintes dont nous aurons besoin pour l'ajustement sont données dans le tableau (6.1) [39]. où ϵ_K , Δm_d , Δm_s et $\sin 2\beta$ seront les quantités qui nous permettront de contraindre les éléments de la matrice CKM. Les quatre paramètres de la matrice CKM indépendants sont choisis comme étant V_{us} , V_{cb} , $\bar{\rho}$ et $\bar{\eta}$, c'est-à-dire ceux de la paramétrisation de Wolfenstein. Le deux premiers sont déterminés avec une grande précision par des processus semi-leptoniques, incluant les corrections de QCD et font partie des données d'entrée. Les deux paramètres $\bar{\rho}$ et $\bar{\eta}$ seront contraints par les différents processus que nous allons décrire. L'ajustement global des paramètres du modèle, en tenant compte de toutes les contraintes, fournira, entre autres, la valeur des paramètres $\bar{\rho}$ et $\bar{\eta}$, c'est-à-dire la position du sommet du triangle d'unitarité.

6.2.1 ϵ_K

Pour pouvoir expliquer cette contrainte, il faut tout d'abord introduire deux nouveaux états du kaon. L'étude de la désintégration du kaon a montré que celle-ci n'était pas caractérisée par une exponentielle décroissante, donc par un seul temps de vie, mais bien par deux temps de vie [40, 41]. Le temps de vie devant correspondre à un état propre du hamiltonien pour une particule libre, nous pouvons dire que le kaon est une superposition de deux états propres auxquels correspondent des temps de vie distincts. Les temps de vie de ces états étant de l'ordre de 0.9×10^{-10} s et de 5×10^{-8} s, on leur attribua respectivement le nom de $K_{short} = K_S$ et de $K_{Long} = K_L$. Ils sont définis par :

$$|K_S\rangle = \frac{1}{2}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle), \quad (6.2)$$

$$|K_L\rangle = \frac{1}{2}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle), \quad (6.3)$$

et sont des états propres du hamiltonien de l'interaction faible alors que le kaon est un état propre du hamiltonien de l'interaction forte. Ces deux nouveaux états ne sont pas orthogonaux et peuvent être exprimés comme une combinaison linéaire d'états propres de

Paramètre	Valeur
Paramètres de la matrice CKM	
λ	0.2258
$ V_{cb} (\text{excl.})$	41.4×10^{-3}
$ V_{cb} (\text{incl.})$	41.6×10^{-3}
$ V_{ub} (\text{excl.})$	33.0×10^{-4}
$ V_{ub} (\text{incl.})$	47.0×10^{-4}
Données liés à l'oscillation du méson B	
◦ Δm_d	0.502 ps^{-1}
◦ Δm_s	$> 14.5 \text{ ps}^{-1}$
Données liés à l'oscillation du méson K	
B_K	0.86
◦ $ \epsilon_K $	2.280×10^{-3}
f_K	0.159 GeV
Δm_K	$0.5301 \times 10^{-2} \text{ ps}^{-1}$
◦ $\sin 2\beta$	0.726
Données générales	
m_t	168.5 GeV
m_b	4.21 GeV
m_c	1.3 GeV
$\alpha_s(M_Z)$	0.119
G_F	$1.16639 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$
m_W	80.425 GeV
$m_{B_d^0}$	5.279 GeV
$m_{B_s^0}$	5.375 GeV
M_{K^0}	0.497648 GeV

TAB. 6.1 – Données d'entrée nécessaires pour contraindre les éléments de la matrice CKM à partir des désintégrations étudiées. Les contraintes sont distinguées des paramètres par un ◦. B_K est un facteur intervenant dans les corrections des effets non perturbatifs de QCD et f_K est la constante de désintégration du kaon.

CP, $|K_1\rangle$ et $|K_2\rangle$, de la manière suivante :

$$|K_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+|\epsilon_K|^2)}}(|K_1^0\rangle + \epsilon_K|\bar{K}_2^0\rangle), \quad (6.4)$$

$$|K_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+|\epsilon_K|^2)}}(|K_2^0\rangle + \epsilon_K|\bar{K}_1^0\rangle), \quad (6.5)$$

où ϵ_K est un paramètre complexe, dont le module est très petit, représentant la déviation des états K_L et K_S par rapport aux vrais états propres de CP. C'est ce manque d'orthogonalité qui va mener à la violation CP qui est dite indirecte car elle est liée à un mélange d'états propres.

On obtient la contrainte suivante par l'observation de la violation CP indirecte dans le système du kaon. Elle est habituellement écrite en fonction du paramètre ϵ_K qui est la fraction de violation CP :

$$\epsilon_K \equiv \frac{\mathcal{A}(K_L \rightarrow (\pi\pi)_{I=0})}{\mathcal{A}(K_S \rightarrow (\pi\pi)_{I=0})}, \quad (6.6)$$

où I représente l'isospin. Nous pouvons donc relier ϵ_K à l'aire du triangle d'unitarité, puisque, comme nous l'avons vu dans la section (3.5), toute mesure de la violation CP peut être reliée à l'aire a des triangles. Pour rappel :

$$a = \frac{1}{2}|J|, \quad (6.7)$$

$$|J| = |\text{Im } V_{ud}V_{ub}V_{cd}V_{cb}| = |V_{ud}V_{ub}V_{cd}V_{cb} \sin \gamma|, \quad (6.8)$$

$$= |\text{Im } Q_{cstd}| = |\text{Im } V_{cs}V_{td}V_{cd}V_{ts}|, \quad (6.9)$$

où, dans la dernière équation, nous utilisons le fait que les parties imaginaires des plaquettes sont identiques au signe près. Les éléments de matrice intervenant dans ϵ_K sont donc [27] V_{ts} , V_{td} , V_{cd} et V_{cs} . Ce sont, parmi les éléments représentés sur la figure (6.2), ceux qui ont la plus grande contribution au mélange $K - \bar{K}$. La mesure de ϵ_K par l'expérience permet donc

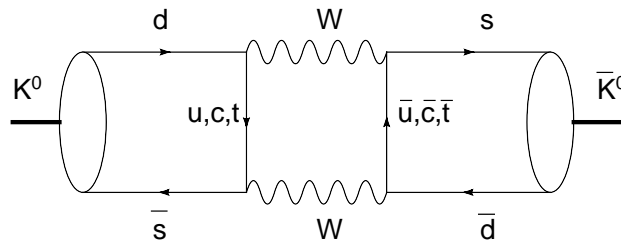


FIG. 6.2 – Diagramme en boîte caractérisant le mélange $K - \bar{K}$.

de contraindre les éléments de la matrice CKM en utilisant les données du tableau (6.1) et impose que le sommet du triangle d'unitarité soit contenu dans la zone représentée sur la figure (6.3).

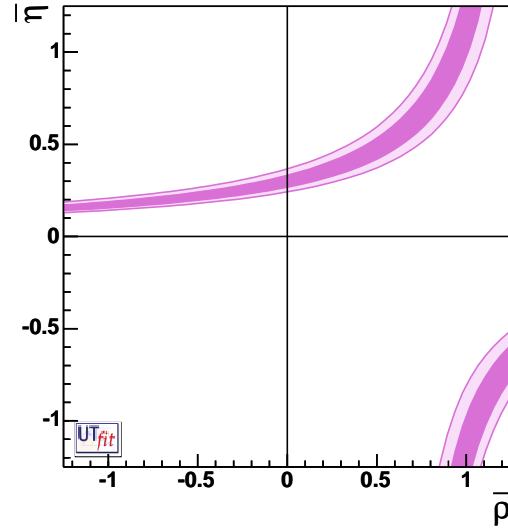


FIG. 6.3 – ϵ_K : Contraintes imposées par la violation CP dans le système du kaon. La bande la plus large correspond à une densité de probabilité de 95% et la plus mince à 68%. Extrait de www.utfit.org.

6.2.2 Δm_d et Δm_s

Le modèle standard prédit l'oscillation du $B_d^0 - \bar{B}_d^0$ par le diagramme en boîte représenté sur la figure (6.4). Les quarks intermédiaires peuvent être les quarks u , c et t et la contribu-

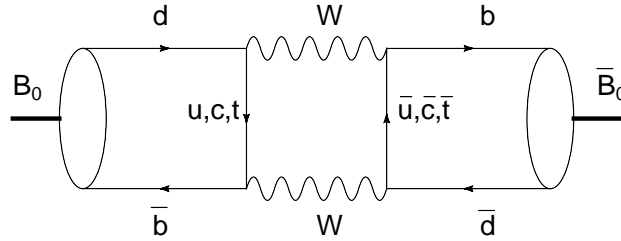


FIG. 6.4 – Diagramme en boîte décrivant l'oscillation du méson B_d^0 en méson \bar{B}_d^0 .

tion la plus importante est due au quark top vu que $V_{tb} \approx 1$. La fréquence d'oscillation peut être mesurée et reliée à la différence de masse des états propres, Δm_d , de la particule B . Cette différence de masse peut ensuite être liée à l'élément de matrice $|V_{td}|$. La différence de masse obtenue par la mesure de la fréquence d'oscillation du B_d est donnée dans le tableau (6.1). La contrainte imposée par Δm_d sur $|V_{td}|$ permet de déterminer la longueur du côté droit R_t du triangle d'unitarité : $R_t = 0,93 \pm 0,14$. Ceci contraint le sommet du triangle d'unitarité dans la zone représentée sur la figure (6.5). Le même principe peut être appliqué pour l'oscillation du méson B contenant un quark s plutôt qu'un d , c'est-à-dire au mélange $B_s^0 - \bar{B}_s^0$. On obtient alors une contrainte sur $|V_{ts}|$, qui permet d'obtenir :

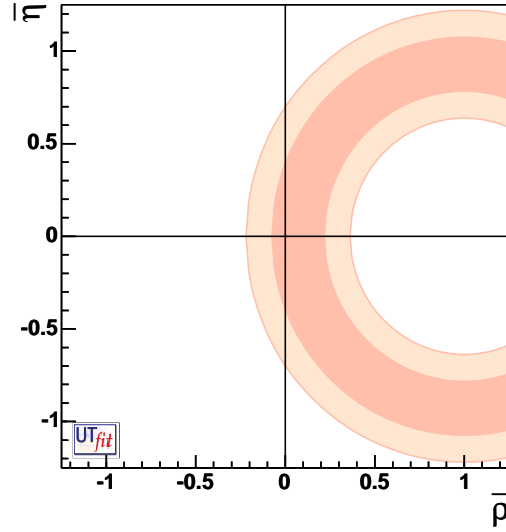


FIG. 6.5 – Δm_d : Contraintes imposées par Δm_d sur R_t obtenues par l'étude de l'oscillation du méson B_d . A nouveau, la bande la plus large correspond à une densité de probabilité de 95% et la plus mince à 68%. Extrait de www.utfit.org.

$R_t = 0.92 \pm 0.04$. La contrainte est représentée sur la figure (6.6).

6.2.3 $\sin 2\beta$

La dernière méthode de contrainte dont nous allons discuter permet d'obtenir l'angle β du triangle d'unitarité. Pour cela, il faut considérer le mélange $B - \bar{B}$ et le processus de désintégration $B \rightarrow J/\psi K^0$. Ils sont représentés sur la figure (6.7).

La mesure de l'asymétrie A_{CP} dépendant du temps entre les désintégrations du B et celles du \bar{B} permet de contraindre l'angle β . En effet, nous avons [27] :

$$A_{CP} = \frac{\Gamma[\bar{B}_d(t) \rightarrow J/\psi K^0] - \Gamma[B_d(t) \rightarrow J/\psi K^0]}{\Gamma[\bar{B}_d(t) \rightarrow J/\psi K^0] + \Gamma[B_d(t) \rightarrow J/\psi K^0]} \approx \sin(\Delta m_d t) \sin 2\beta, \quad (6.10)$$

où t est le temps. Nous obtenons : $\sin 2\beta = 0.668 \pm 0.028$ ce qui correspond, à peu près, à un angle de 21° ou 69° , puisque $\sin(2\beta)$ et $\sin(\pi - 2\beta)$ ont la même solution. La contrainte imposée sur $(\bar{\rho}, \bar{\eta})$ est représentée sur la figure (6.8). Les détails des mesures expérimentales des différents éléments nécessaires sont données dans [42].

Nous avons ici montré cinq contraintes imposées par l'unitarité de la matrice CKM au travers des triangles d'unitarité. Nous contraignons de la sorte le sommet $(\bar{\rho}, \bar{\eta})$ du triangle d'unitarité par cinq relations indépendantes. Une fois rassemblées, ces cinq relations donnent la zone dans le plan $(\bar{\rho}, \bar{\eta})$ dans laquelle le sommet du triangle doit se trouver. Il n'est cependant pas garanti qu'il existe bien une zone commune entre les cinq graphiques représentant les contraintes précédentes. Nous pouvons donc tester le modèle standard

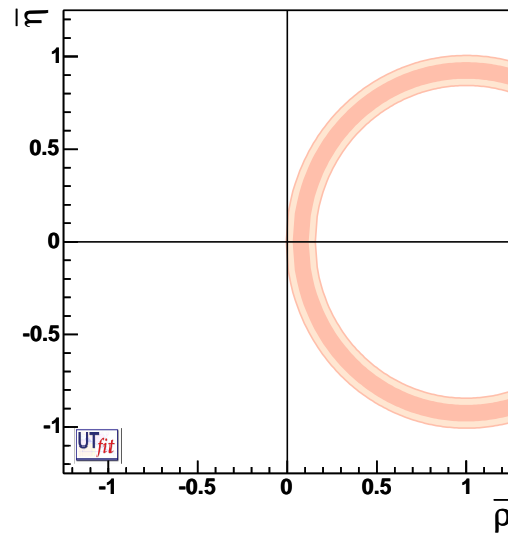


FIG. 6.6 – $\frac{\Delta m_d}{\Delta m_s}$: Contraintes imposées par Δm_s sur R_t , obtenues par l'étude de l'oscillation $B_s - \bar{B}_s$. La bande la plus large correspond à une densité de probabilité de 95% et la plus mince à 68%. Extrait de www.utfit.org.

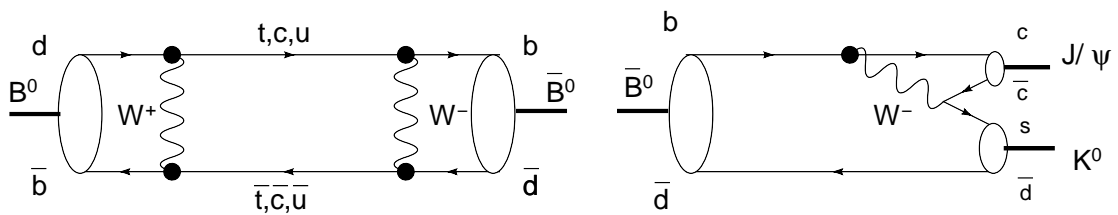


FIG. 6.7 – Diagramme en boîte du mélange $B - \bar{B}$ à gauche et processus principal de désintégration du \bar{B} à droite.

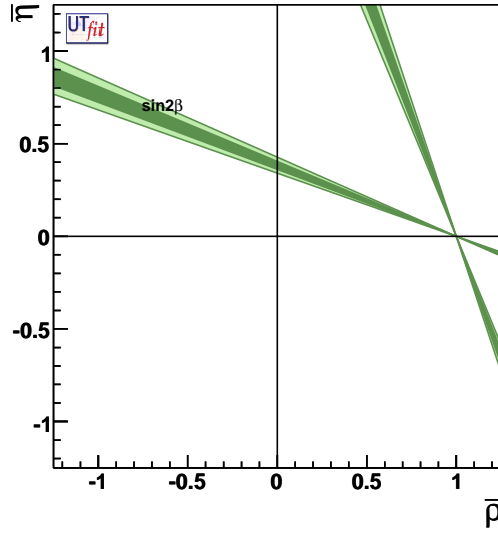


FIG. 6.8 – $\sin 2\beta$: Contraintes imposées par l'asymétrie due à la violation CP dans le méson B . La bande la plus large correspond à une densité de probabilité de 95% et la plus mince à 68%. Extrait de www.utfit.org.

puisque si certaines des contraintes étaient en désaccord, l'unitarité de la matrice CKM serait à reconsidérer. Pour l'instant, le mélange des saveurs dans le secteur des quarks est en très bon accord avec l'expérience puisque nous avons une zone commune entre les contraintes, cette zone étant représentée sur la figure (6.9). Finalement, en utilisant les contraintes sur V_{ub}/V_{cb} , ϵ_K , Δm_d , Δm_s et $\sin 2\beta$, nous avons les paramètres du triangle d'unitarité du tableau (6.2).

Paramètre	Intervalle (à 95 % de probabilité)
$\bar{\eta}$	[0.104, 0.283]
$\bar{\rho}$	[0.296, 0.396]
α	[82.1, 110.0] $^\circ$
β	[20.8, 26.1] $^\circ$
γ	[47.0, 74.2] $^\circ$
$\sin 2\alpha$	[-0.65, 0.27]
$\sin 2\alpha$	[0.670, 0.780]
$\sin(2\beta + \gamma)$	[0.852, 0.996]

TAB. 6.2 – Paramètres obtenus par l'ajustement sur les cinq contraintes obtenu par la collaboration UTfit [39].

Le Particle Data Group combine les résultats obtenus par *CKMfitter* [38] et ceux de *UTfit* [39] pour obtenir, dans la paramétrisation de Wolfenstein, les résultats suivants [20] :

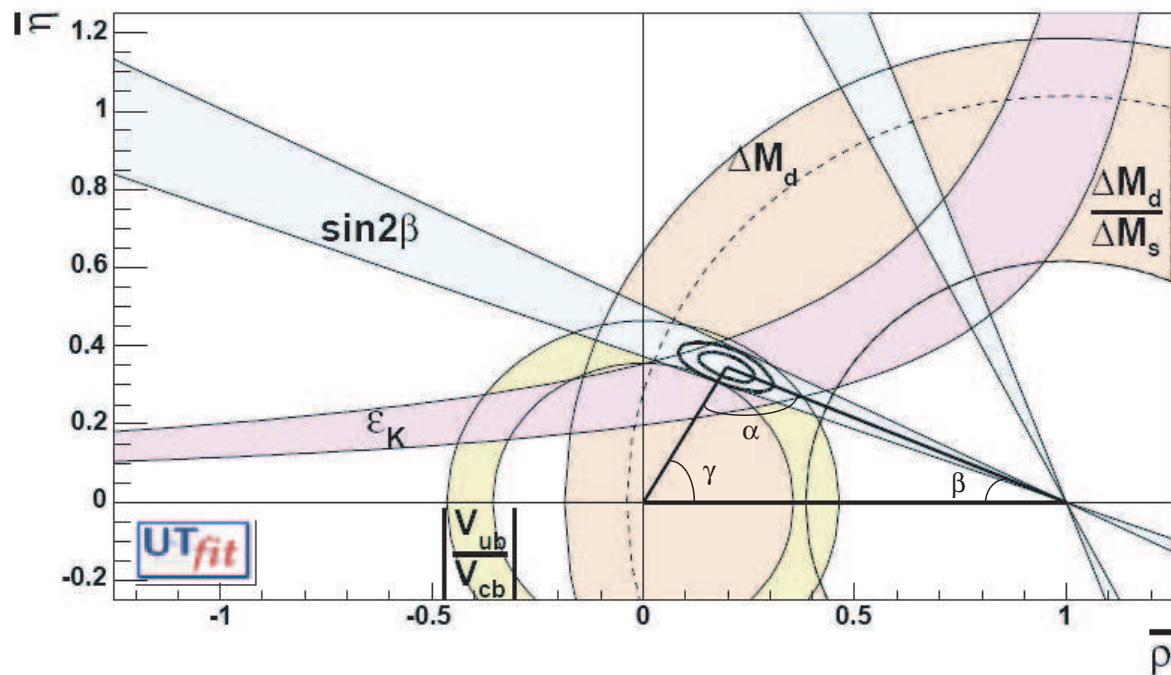


FIG. 6.9 – Contraintes imposées par l’ajustement des paramètres du modèle standard à partir des cinq contraintes citées précédemment. Les cinq contraintes sont représentées ainsi que la zone dans laquelle le sommet est contraint. Nous rappelons que la zone la plus grande correspond à une densité de probabilité de 95% et la plus petite à 68%. Extrait de [39].

$$\begin{aligned} \lambda &= 0,2272 \pm 0,0010, & A &= 0,818_{-0,017}^{+0,007}, \\ \bar{\rho} &= 0,221_{-0,028}^{+0,064}, & \bar{\eta} &= 0,340_{-0,045}^{+0,017}, \end{aligned}$$

auxquels correspond la matrice CKM :

$$V = \begin{pmatrix} 0.97383_{-0.00023}^{+0.00024} & 0.2272_{-0.0010}^{+0.0010} & (3.96_{-0.09}^{+0.09}) \times 10^{-3} \\ 0.2271_{-0.0010}^{+0.0010} & 0.97296_{-0.00024}^{+0.00024} & (42.21_{-0.80}^{+0.10}) \times 10^{-3} \\ (8.14_{-0.64}^{+0.32}) \times 10^{-3} & (41.61_{-0.78}^{+0.12}) \times 10^{-3} & 0.999100_{-0.000004}^{+0.000034} \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

En conclusion, l'ajustement global des paramètres du modèle standard par le triangle d'unitarité est fortement contraint par les nombreuses données expérimentales et les résultats théoriques permettent de tester certains secteurs du modèle standard. Nous pouvons dire que, puisque les différentes contraintes indépendantes ne se contredisent pas, pour l'instant le modèle du mélange des saveurs et de la violation CP est en bon accord avec les observations.

Conclusion

Nous avons introduit dans une théorie non massive, indépendante des générations, la masse des particules par le mécanisme de brisure spontanée de symétrie. Une des conséquences est la non équivalence des générations, c'est-à-dire le mélange des saveurs. Bien que ce mélange apparaisse pour tous les fermions, nous nous sommes uniquement intéressés au mélange des quarks et à la matrice qui le caractérise : la matrice CKM. Nous avons introduit les éléments théoriques nécessaires à l'obtention de cette matrice et donné ses propriétés. En particulier, nous nous sommes intéressés aux paramètres que la matrice contient. Nous avons ensuite montré que l'unitarité de la matrice CKM permet de réduire à quatre le nombre de paramètres indépendants et que ceux-ci peuvent être interprétés comme trois rotations et une phase physique. Cette phase physique est responsable de la violation CP puisqu'elle introduit un couplage complexe dans le lagrangien. Nous avons également donné quelques paramétrisations de la matrice CKM et montré que celles-ci sont arbitraires. Pour remédier à ce problème, nous avons introduit la notion de triangle d'unitarité et nous les avons utilisés dans la suite du mémoire.

Nous avons consacré la deuxième partie du mémoire à la détermination des paramètres du modèle standard, en particulier ceux de la matrice CKM. Nous avons montré qu'il est possible de contraindre l'élément de matrice V_{cb} par l'étude du processus semi-leptonique $b \rightarrow c\bar{\nu}_e e^-$. La valeur que nous avons obtenue pour $|V_{cb}|$ est de $(50.1 \pm 2,9) \times 10^{-3}$ et est dépourvue de corrections de QCD. La plupart des éléments de la matrice CKM peuvent être déterminés par cette méthode. Cependant, nous avons montré qu'il existe une méthode plus précise qui consiste à effectuer un ajustement global sur différentes contraintes et qui permet d'obtenir, par l'expérience, des mesures qui contraignent la position du sommet du triangle d'unitarité. Cela vient du fait que les paramètres du triangle, angles et longueur des côtés, sont liés à des observables physiques. En plus de la valeur des paramètres, cette méthode permet de tester le modèle standard. En effet, tout écart entre le modèle et l'expérience doit apporter des contradictions entre les différentes contraintes. Nous avons montré que, à la précision atteinte actuellement, il n'y avait pas de contradictions et que l'on peut déterminer une zone commune où le sommet du triangle d'unitarité doit se situer. Si des effets physiques supplémentaires à ceux du modèle standard devaient se manifester ils ne pourraient, aux énergies accessibles dans les grands collisionneurs, qu'être faibles. Les paramètres de la matrice CKM ne seraient alors que peu modifiés. Nous sommes donc arrivés à la conclusion que le mélange des saveurs, à trois générations et au travers d'une

matrice CKM unitaire, est en très bon accord avec les observations.

Nous avons montré que le mécanisme de brisure spontanée de symétrie apporte vingt-deux paramètres supplémentaires. Ce nombre élevé de paramètres semble inadéquat pour une théorie fondamentale et, bien que le modèle standard soit en accord avec l'expérience, celui-ci n'est qu'une théorie effective. Il devrait donc exister une théorie plus fondamentale. Nous avons obtenu que le modèle standard est toujours valide pour des énergies de l'ordre du TeV. Une théorie plus fondamentale devrait tenir compte d'effets physiques supplémentaires, principalement observables à des échelles d'énergie encore plus élevées. Elle pourrait permettre, par exemple, de calculer les masses des particules et les paramètres de la matrice CKM. De nombreuses recherches théoriques et expérimentales vont dans ce sens, comme la théorie des cordes et les modèles super symétriques, mais nous avons montré qu'il existe également une approche phénoménologique et que celle-ci consiste à utiliser la méthode de la bidiagonalisation. Le principe est d'obtenir deux matrices, appelées texture, qui, une fois bidiagonalisées, mènent à la bonne valeur des masses des quarks et des éléments de la matrice CKM. De cette manière nous pouvons obtenir les matrices à l'origine de la matrice CKM qui, dans le modèle standard, ne sont pas observables. La connaissance de ces matrices pourrait donner des indices sur la physique contenue dans un modèle plus fondamental. De plus, cette approche permet d'obtenir la matrice CKM de manière non conventionnelle. Nous avons, dans ce mémoire, réalisé une analyse sur la dépendance des masses par la méthode de la bidiagonalisation. Nous avons également montré que les éléments de la matrice CKM dépendaient faiblement de la texture ce qui n'est pas le cas pour les masses obtenues. La plus grande contrainte réside donc dans l'obtention des masses des quarks et non dans l'obtention des éléments de la matrice CKM. Pour terminer le chapitre 4, nous avons recherché une nouvelle forme de texture mais les matrices obtenues sont, pour l'instant, proches des matrices déjà connues. Les contraintes utilisées par cette méthode doivent encore être améliorées dans le but de pouvoir prédire les éléments de la matrice et obtenir une nouvelle forme de texture.

Les saveurs et la violation CP ont déjà été dans le passé le point de départ de l'obtention de nouveaux effets physiques. En effet, nous avons montré que le mélange des saveurs observé dans les années cinquante a permis de compléter le modèle sans masse par l'ajout de l'angle de Cabibbo, tout comme l'absence de courants neutres avec changement de saveur a prédit le quark charmé. De la même manière, la violation CP observée pour le kaon a permis à Kobayashi et Maskawa de prédire l'existence d'une troisième génération. Il est donc tout à fait légitime de comparer les résultats du modèle standard avec les observations dans l'espoir de détecter les premiers indices d'une théorie plus fondamentale. Plusieurs études ont été réalisées dans ce sens, par exemple [43, 44, 45, 46, 47], mais il en ressort qu'il faudrait un approfondissement théorique et expérimental pour pouvoir affirmer l'existence d'une physique au-delà du modèle standard. A l'avenir, de futures expériences, comme par exemple celles concernant les désintégrations rares du kaon, pourraient fournir des résultats sur la découverte d'une violation CP supplémentaire à celle obtenue par la phase de la matrice CKM. Or, pouvoir décrire la violation CP est d'une grande importance car elle

permettrait d'expliquer la disproportion entre la quantité de particules et d'antiparticules dans l'univers. Malheureusement, la violation CP obtenue par la phase de la matrice CKM ne permet pas, à elle seule, d'expliquer cette disproportion et de nouveaux effets menant à la violation CP sont donc attendus. Si nous n'observons pas ce genre de nouveaux effets physiques, les expériences futures permettront tout de même une meilleure précision sur les paramètres et peut-être une meilleure compréhension du modèle. En particulier, du couplage de Yukawa qui est le seul mécanisme dans le modèle standard qui permette de différencier les générations.

L'étude du mélange des saveurs, conséquence de la génération de masse, nous a donc permis de montrer que le modèle standard est une excellente théorie effective, du moins jusqu'à l'ordre du TeV. De la même manière, le mélange des saveurs pourrait permettre d'obtenir, dans un avenir proche, les premiers indices sur une théorie plus fondamentale.

Table des matières

1	Introduction et position du problème	3
1.1	La scène	6
1.2	Les problèmes	8
2	La matrice CKM	9
2.1	Le modèle non brisé	9
2.2	Mécanisme de Brout-Englert-Higgs	12
2.3	Masses des quarks	15
2.4	Interprétations et conséquences de la matrice CKM	19
3	Propriétés fondamentales de la matrice CKM	21
3.1	Invariance par changement de phase	21
3.2	Phase physique	23
3.3	Paramétrisations	25
3.4	Conditions d'unitarité sur les modules	28
3.5	Les triangles d'unitarité	30
4	Bidiagonalisation	37
4.1	Théorème et preuve	37
4.2	Principe de la bidiagonalisation et intérêts	39
4.3	Programme sous REDUCE	40
5	Détermination des éléments de la matrice CKM	45
5.1	Désintégration du quark bottom	45
5.2	Matrice invariante	47
5.3	Espace de phase	51
5.4	Taux de désintégration	52
5.5	Détermination de V_{cb}	56
6	Eléments de la matrice CKM	58
6.1	L'élément de matrice V_{cb}	58
6.2	Test du modèle standard par les triangles d'unitarité	60
6.2.1	ϵ_K	60

6.2.2	Δm_d et Δm_s	63
6.2.3	$\sin 2\beta$	64
A	Programme	74
	Bibliographie	85

Annexe A

Programme

```
matrix un,m,ul,ur,cm,cul,cur,md,uld,urd,cmd,culd,curd;
on complex,rounded;
la:=0.22;
m:=mat((la**8,0,0),(0,la**4,la**2),(0,la**2,la**0))*178;
cm:=mat((conj(m(1,1)),conj(m(2,1)),conj(m(3,1))),
(conj(m(1,2)),conj(m(2,2)),conj(m(3,2))),
(conj(m(1,3)),conj(m(2,3)),conj(m(3,3))));
m2a:=m*cm;
m2b:=cm*m;
un:=mat((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1));
d2a:=det(m2a-lam*un);
deno:=den(d2a);
numo:=num(d2a);
lterm(numo,lam);
a:=(ws/lam^3)/deno;
tamp:=numo-lterm(numo,lam);
lterm(ws,lam);
b:=(ws/lam^2)/deno;
tamp1:=tamp-lterm(tamp,lam);
lterm(ws,lam);
c:=(ws/lam)/deno;
d:=(tamp1-lterm(tamp1,lam))/deno;

p:= -(b^2/(3*a^2))+c/a;
q:= (b/(27*a))*((2*b^2/a^2)-(9*c/a))+d/a;
delta:= 27*q^2+(4*p^3);
j:=exp(i*2*pi/3);
if delta>0
then <<u:=((-q+sqrt(delta))/2)^(1/3), v:=-(+q+sqrt(delta))/2)^(1/3),
x1:=u+v, x2:=j*u+conj(j)*v, x3:=u*j^2+v*conj(j^2)>>;
```

```

if delta=0
then <<p:=- (b^2/(3*a^2))+c/a, q:= (b/(27*a))*((2*b^2/a^2)-(9*c/a))+d/a,
      x1:=3*p/q, x2:=- (3*q)/(2*p), x3:=- (3*q)/(2*p)>>;
if delta<0
then <<
x1:=2*sqrt(-p/3)*cos((1/3)*acos((-q/2)*sqrt(27/-p**3))+2*0*pi/3)+(-b/(3*a)),
x3:=2*sqrt(-p/3)*cos((1/3)*acos((-q/2)*sqrt(27/-p**3))+2*1*pi/3)+(-b/(3*a)),
x2:=2*sqrt(-p/3)*cos((1/3)*acos((-q/2)*sqrt(27/-p**3))+2*2*pi/3)+(-b/(3*a))
>>;
lam1:= x1;
lam2:= x2;
lam3:= x3;
if ((lam1=0)or(lam2=0)or(lam3=0)) then <<end;>>;
clear a,b,c,d,p,f,g;
a1:=m2a(1,1);
b1:=m2a(1,2);
c1:=m2a(1,3);
d1:=m2a(2,1);
e1:=m2a(2,2);
f1:=m2a(2,3);
g1:=m2a(3,1);
h1:=m2a(3,2);
i1:=m2a(3,3);

on rounded;
if (m2a(1,2)=0 and m2a(1,3)=0)
then <<
c:=0,
b:=0>>
else <<
b:=(-c1*d1+(a1-lam1)*f1)/(c1*(e1-lam1)-(f1*b1)),
      c:= -((a1-lam1)+b1*b)/c1,
norm1:=sqrt(1+b*conj(b)+c*conj(c))>>;

if (m2a(1,2)=0 and m2a(1,3)=0)
then <<so:=solve((m2a(2,2)-lam2)+(d*m2a(2,3)),d),d:=part(so,1,2),
normd:=-sqrt(1+d**2)>>
else <<
d:=(-c1*(e1-lam2)+(f1*b1))/(c1*d1-(a1-lam2)*f1),
p:= -(((a1-lam2)*d)+b1)/c1,
norm2:=sqrt(1+d*conj(d)+p*conj(p))>>;

```

```

if (m2a(1,2)=0 and m2a(1,3)=0)
then <<
so:=solve((f*(m2a(3,2)))+(m2a(3,3)-lam1),f),
f:=part(so,1,2),
normf:=-sqrt(1+f**2)>>
else <<
f:=(-h1*c1+b1*(i1-lam3))/(((a1-lam3)*h1)-(b1*g1)),
g:=(-(i1-lam3)-g1*f)/h1,
norm3:=sqrt(1+f*conj(f)+g*conj(g))>>;

if (m2a(1,2)=0 and m2a(1,3)=0)
then << ul:=mat((1,b,c),(0,1/normd,f/normf),(0,d/normd,1/normf))>>
else << ul:=mat((1/norm1,d/norm2,f/norm3),(b/norm1,1/norm2,g/norm3),
(c/norm1,p/norm2,1/norm3))>>;

cul:=mat((conj(ul(1,1)),conj(ul(2,1)),conj(ul(3,1))),
(conj(ul(1,2)),conj(ul(2,2)),conj(ul(3,2))),
(conj(ul(1,3)),conj(ul(2,3)),conj(ul(3,3))));
ul*cul;
cul*ul;
off rounded;

reponse:=cul*m2a*(ul);

clear a,b,c,d,p,f,g;
d2b:=det(m2b-lam*un);
deno:=den(d2b);
numo:=num(d2b);
lterm(numo,lam);
a:=(ws/lam^3)/deno;
tamp:=numo-lterm(numo,lam);
lterm(ws,lam);
b:=(ws/lam^2)/deno;
tamp1:=tamp-lterm(tamp,lam);
lterm(ws,lam);
c:=(ws/lam)/deno;
d:=(tamp1-lterm(tamp1,lam))/deno;
p:= -(b^2/(3*a^2))+c/a;
q:= (b/(27*a))*((2*b^2/a^2)-(9*c/a))+(d/a);
delta:= 27*q^2+(4*p^3);
j:=exp(i*2*pi/3);
if delta>0
then <<u:=((-q+sqrt(delta))/2)^(1/3), v:=-(+q+sqrt(delta))/2)^(1/3),

```

```

x1:=u+v, x2:=j*u+conj(j)*v, x3:=u*j^2+v*conj(j^2)>>;
if delta=0
then <<x1:=3*p/q, x2:=- (3*q)/(2*p), x3:=- (3*q)/(2*p)>>;
if delta<0
then <<
x1:=2*sqrt(-p/3)*cos((1/3)*acos((-q/2)*sqrt(27/-p**3))+2*0*pi/3)+(-b/(3*a)),
x3:=2*sqrt(-p/3)*cos((1/3)*acos((-q/2)*sqrt(27/-p**3))+2*1*pi/3)+(-b/(3*a)),
x2:=2*sqrt(-p/3)*cos((1/3)*acos((-q/2)*sqrt(27/-p**3))+2*2*pi/3)+(-b/(3*a))
>>;
lam1:= x1;
lam2:= x2;
lam3:= x3;
if ((lam1=0)or(lam2=0)or(lam3=0)) then <<end;>>;
clear a,b,c,d,p,f,g;

a1:=m2b(1,1);
b1:=m2b(1,2);
c1:=m2b(1,3);
d1:=m2b(2,1);
e1:=m2b(2,2);
f1:=m2b(2,3);
g1:=m2b(3,1);
h1:=m2b(3,2);
i1:=m2b(3,3);

on rounded;
if (m2b(1,2)=0 and m2b(1,3)=0)
then <<b:=0,c:=0>>
else <<
b:=(-c1*d1+(a1-lam1)*f1)/(c1*(e1-lam1)-(f1*b1)),
      c:=-(a1-lam1)+b1*b/c1,
norm1:=sqrt(1+b*conj(b)+c*conj(c))>>;
if (m2b(1,2)=0 and m2b(1,3)=0)
then <<
so:=solve((m2b(2,2)-lam2)+(d*m2b(2,3)),d),
d:=part(so,1,2),
normd:=sqrt(1+d**2)>>
else <<
d:=(-c1*(e1-lam2)+(f1*b1))/(c1*d1-(a1-lam2)*f1),
p:=-(a1-lam2)*d+b1/c1,
norm2:=sqrt(1+d*conj(d)+p*conj(p))>>;

if (m2b(1,2)=0 and m2b(1,3)=0)

```

```

then <<
so:=solve(f*(m2b(3,2))+(m2b(3,3)-lam1),f),
f:=part(so,1,2),
normf:=-sqrt(1+f**2)>>
else <<
f:=(-h1*c1+b1*(i1-lam3))/(((a1-lam3)*h1)-(b1*g1)),
g:=(-(i1-lam3)-g1*f)/h1,
norm3:=sqrt(1+f*conj(f)+g*conj(g))>>;

if (m2b(1,2)=0 and m2b(1,3)=0)
then << ur:=mat((1,b,c),(0,1/normd,f/normf),(0,d/normd,1/normf))>>
else << ur:=mat((1/norm1,d/norm2,f/norm3),(b/norm1,1/norm2,g/norm3),
(c/norm1,p/norm2,1/norm3))>>;

cur:=mat((conj(ur(1,1)),conj(ur(2,1)),conj(ur(3,1))),
(conj(ur(1,2)),conj(ur(2,2)),conj(ur(3,2))),
(conj(ur(1,3)),conj(ur(2,3)),conj(ur(3,3))));

ur*cur;
cur*ur;
reponse2:=cur*m2b*(ur);
diag:=cul*m*ur;

clear a,b,c,d,p,f,g;
md:=mat((la**4,la**3,0),(0,0,la**2),(0,1,1))*2;
cmd:=mat((conj(md(1,1)),conj(md(2,1)),conj(md(3,1))),
(conj(md(1,2)),conj(md(2,2)),conj(md(3,2))),
(conj(md(1,3)),conj(md(2,3)),conj(md(3,3))));
m2ad:=md*cmd;
m2bd:=cmd*md;

d2ad:=det(m2ad-lam*un);

deno:=den(d2ad);
numo:=num(d2ad);
lterm(numo,lam);
a:=(ws/lam^3)/deno;
tamp:=numo-lterm(numo,lam);
lterm(ws,lam);
b:=(ws/lam^2)/deno;
tamp1:=tamp-lterm(tamp,lam);
lterm(ws,lam);
c:=(ws/lam)/deno;

```

```

d:=(tamp1-lterm(tamp1,lam))/deno;
p:= -(b^2/(3*a^2))+c/a;
q:= (b/(27*a))*((2*b^2/a^2)-(9*c/a))+d/a;
delta:= 27*q^2+(4*p^3);
j:=exp(i*2*pi/3);

if delta>0
then <<u:=((-q+sqrt(delta))/2)^(1/3), v:=-(+q+sqrt(delta))/2)^(1/3),
x1:=u+v, x2:=j*u+conj(j)*v, x3:=u*j^2+v*conj(j^2)>>;

if delta=0
then <<p:= -(b^2/(3*a^2))+c/a, q:= (b/(27*a))*((2*b^2/a^2)-(9*c/a))+d/a,
x1:=3*p/q, x2:=-(3*q)/(2*p), x3:=-(3*q)/(2*p)>>;

if delta<0
then <<
x1:=2*sqrt(-p/3)*cos((1/3)*acos((-q/2)*sqrt(27/-p**3))+2*0*pi/3)+(-b/(3*a)),
x3:=2*sqrt(-p/3)*cos((1/3)*acos((-q/2)*sqrt(27/-p**3))+2*1*pi/3)+(-b/(3*a)),
x2:=2*sqrt(-p/3)*cos((1/3)*acos((-q/2)*sqrt(27/-p**3))+2*2*pi/3)+(-b/(3*a))
>>;

lam1:= x3;
lam2:= x2;
lam3:= x1;

clear a,b,c,d,p,f,g;
a1:=m2ad(1,1);
b1:=m2ad(1,2);
c1:=m2ad(1,3);
d1:=m2ad(2,1);
e1:=m2ad(2,2);
f1:=m2ad(2,3);
g1:=m2ad(3,1);
h1:=m2ad(3,2);
i1:=m2ad(3,3);

if (m2ad(1,2))=0
then <<
c:= -(a1-lam1)/c1,
b:= -(f1/(e1-lam1))*c,
norm1:=sqrt(1+b**2+c**2) >>
else <<
b:=(-c1*d1+(a1-lam1)*f1)/(c1*(e1-lam1)-(f1*b1)),

```

```

        c:=-((a1-lam1)+b1*b)/c1,
norm1:=sqrt(1+b*conj(b)+c*conj(c))>>;

if (m2ad(1,2))=0
then <<
p:=- (e1-lam2)/f1,
d:=- (c1/(a1-lam2))*p,
norm2:=sqrt(1+p**2+d**2)>>
else <<
d:=(-c1*(e1-lam2)+(f1*b1))/(c1*d1-(a1-lam2)*f1),
p:=(-((a1-lam2)*d)+b1)/c1,
norm2:=sqrt(1+d*conj(d)+p*conj(p))>>;

if (m2ad(1,2))=0
then <<
f:=-c1/(a1-lam3),
g:=-f1/(e1-lam3),
norm3:=sqrt(1+f**2+g**2) >>
else <<
f:=(h1*f1-(e1-lam3)*(i1-lam3))/(((e1-lam3)*g1)-(h1*d1)),
g:=- (f1+d1*f)/(e1-lam3),
norm3:=sqrt(1+f*conj(f)+g*conj(g))>>;

uld:=mat((1/norm1,d/norm2,f/norm3),
(b/norm1,1/norm2,g/norm3),
(c/norm1,p/norm2,1/norm3));
culd:=mat((conj(uld(1,1)),conj(uld(2,1)),conj(uld(3,1))),
(conj(uld(1,2)),conj(uld(2,2)),conj(uld(3,2))),
(conj(uld(1,3)),conj(uld(2,3)),conj(uld(3,3))));

uld*culd;
culd*uld;
reponed:=culd*m2ad*(uld);

off rounded;

clear a,b,c,d,p,f,g,lam;
d2bd:=det(m2bd-lam*un);

deno:=den(d2bd);
numo:=num(d2bd);
lterm(numo,lam);
a:=(ws/lam^3)/deno;

```



```

tamp:=numo-lterm(numo,lam);
lterm(ws,lam);
b:=(ws/lam^2)/deno;
tamp1:=tamp-lterm(tamp,lam);
lterm(ws,lam);
c:=(ws/lam)/deno;
d:=(tamp1-lterm(tamp1,lam))/deno;
p:= -(b^2/(3*a^2))+c/a;
q:= (b/(27*a))*((2*b^2/a^2)-(9*c/a))+(d/a);
delta:= 27*q^2+(4*p^3);

if delta>0
then <<u:=((-q+sqrt(delta))/2)^(1/3), v:=-(+q+sqrt(delta))/2)^(1/3),
x1:=u+v, x2:=j*u+conj(j)*v, x3:=u*j^2+v*conj(j^2)>>;

if delta=0
then <<x1:=3*p/q, x2:=- (3*q)/(2*p), x3:=- (3*q)/(2*p)>>;

if delta<0
then <<
x1:=2*sqrt(-p/3)*cos((1/3)*acos((-q/2)*sqrt(27/-p**3))+2*0*pi/3)+(-b/(3*a)),
x3:=2*sqrt(-p/3)*cos((1/3)*acos((-q/2)*sqrt(27/-p**3))+2*1*pi/3)+(-b/(3*a)),
x2:=2*sqrt(-p/3)*cos((1/3)*acos((-q/2)*sqrt(27/-p**3))+2*2*pi/3)+(-b/(3*a))
>>;

lam1:= x3;
lam2:= x2;
lam3:= x1;

clear a,b,c,d,p,f,g;
a1:=m2bd(1,1);
b1:=m2bd(1,2);
c1:=m2bd(1,3);
g1:=m2bd(3,1);
h1:=m2bd(3,2);
i1:=m2bd(3,3);
d1:=m2bd(2,1);
e1:=m2bd(2,2);
f1:=m2bd(2,3);

on rounded;

if (m2bd(1,3))=0

```

```

then <<
b:= -(a1-lam1)/b1,
c:= (-h1*b)/(i1-lam1),
norm1:=sqrt(1+b*conj(b)+c*conj(c)) >>
else <<
b:=(-c1*d1+(a1-lam1)*f1)/(c1*(e1-lam1)-(f1*b1)),
      c:=-((a1-lam1)+b1*b)/c1,
norm1:=sqrt(1+b*conj(b)+c*conj(c))>>;

if (m2bd(1,3))=0
then <<
d:= -b1/(a1-lam2),
p:= -(e1-lam2)-d1*d)/f1,
norm2:=sqrt(1+p*conj(p)+d*conj(d))>>
else <<
d:=(-c1*(e1-lam2)+(f1*b1))/(c1*d1-(a1-lam2)*f1),
p:=-(((a1-lam2)*d)+b1)/c1,
norm2:=sqrt(1+d*conj(d)+p*conj(p))>>;

if (m2bd(1,3))=0
then<<
g:=- (i1-lam3)/h1,
f:=- (b1/(a1-lam3))*g,
norm3:=sqrt(1+f**2+g**2) >>
else <<
f:=(h1*f1-(e1-lam3)*(i1-lam3))/(((e1-lam3)*g1)-(h1*d1)),
g:=- (f1+d1*f)/(e1-lam3),
norm3:=sqrt(1+f*conj(f)+g*conj(g))>>;

urd:=mat((1/norm1,d/norm2,f/norm3),
(b/norm1,1/norm2,g/norm3),
(c/norm1,p/norm2,1/norm3));
curd:=mat((conj(urd(1,1)),conj(urd(2,1)),conj(urd(3,1))),
(conj(urd(1,2)),conj(urd(2,2)),conj(urd(3,2))),
(conj(urd(1,3)),conj(urd(2,3)),conj(urd(3,3))));
urd*curd;
curd*urd;
reponse2d:=curd*m2bd*(urd);
diagd:=culd*md*urd;

ckm:=uld*cul;
end;

```

Table des figures

1.1	Transitions permises dans le modèle de Cabibbo à deux générations.	8
2.1	Potentiel de Higgs ou chapeau mexicain.	14
3.1	Le triangle d'unitarité correspondant à la relation (3.45).	31
3.2	Triangle d'unitarité rephasé.	33
3.3	Contrainte imposée par la détermination de R_b sur la position du sommet du triangle d'unitarité. La bande la plus large correspond à une densité de probabilité de 95% et la plus petite à 68%. Figure extraite du site de la collaboration UTfit (www.utfit.com).	36
4.1	Répartissons des masses obtenues par la bidiagonalisation des textures . . .	43
5.1	Désintégration du quark b dans le méson B	46
5.2	Désintégration du quark b en quark c par un processus semi-leptonique. . .	47
5.3	Représentation de l'état final dans le centre de masse.	51
6.1	Désintégration du quark b dans le méson B avec des processus d'interaction fortes.	59
6.2	Diagramme en boîte caractérisant le mélange $K - \bar{K}$	62
6.3	ϵ_K : Contraintes imposées par la violation CP dans le système du kaon. La bande la plus large correspond à une densité de probabilité de 95% et la plus mince à 68%. Extrait de www.utfit.org	63
6.4	Diagramme en boîte décrivant l'oscillation du méson B_d^0 en méson \bar{B}_d^0	63
6.5	Δm_d : Contraintes imposées par Δm_d sur R_t obtenues par l'étude de l'oscillation du méson B_d . A nouveau, la bande la plus large correspond à une densité de probabilité de 95% et la plus mince à 68%. Extrait de www.utfit.org	64
6.6	$\frac{\Delta m_d}{\Delta m_s}$: Contraintes imposées par Δm_s sur R_t , obtenues par l'étude de l'oscillation $B_s - \bar{B}_s$. La bande la plus large correspond à une densité de probabilité de 95% et la plus mince à 68%. Extrait de www.utfit.org	65
6.7	Diagramme en boîte du mélange $B - \bar{B}$ à gauche et processus principal de désintégration du \bar{B} à droite.	65

6.8	$\sin 2\beta$: Contraintes imposées par l'asymétrie due à la violation CP dans le méson B . La bande la plus large correspond à une densité de probabilité de 95% et la plus mince à 68%. Extrait de www.utfit.org	66
6.9	Contraintes imposées par l'ajustement des paramètres du modèle standard à partir des cinq contraintes citées précédemment. Les cinq contraintes sont représentées ainsi que la zone dans laquelle le sommet est contraint. Nous rappelons que la zone la plus grande correspond à une densité de probabilité de 95% et la plus petite à 68%. Extrait de [39].	67

Bibliographie

- [1] Z. Maki, M. Nakagawa et S. Sakata, Prog. Theor. Phys. **28**, 870 (1962).
- [2] N. Cabibbo, Phys. Rev. Lett. **10** (1963) 531.
- [3] P. W. Higgs, Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 508.
- [4] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1264.
- [5] A. Salam et J. C. Ward, Nuovo Cim. **11** (1959) 568.
- [6] M. Kobayashi et T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **49** (1973) 652.
- [7] S. W. Herb *et al.*, Phys. Rev. Lett. **39** (1977) 252.
- [8] Herbert Melenk, The Rand Corporation.
- [9] M. Gell-Mann, Phys. Rev. **92** (1953), 833.
- [10] G. Zweig, CERN-8419-TH-412 (1964).
- [11] M. Gell-Mann, Phys. Lett. **8** (1964) 214.
- [12] S. L. Glashow, J. Iliopoulos et L. Maiani, Phys. Rev. D **2** (1970) 1285.
- [13] F. Englert et R. Brout, Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 321.
- [14] F. Mandl et G. Shaw, Quantum field theory (John Wiley and Sons : New York, 1984).
- [15] J. Goldstone, Nuovo Cim. **19** (1961) 154.
- [16] V. Barger et R. Phillips, Collider Physics : Updated edition (Addison-Wesley publishing company : 1997).
- [17] S. L. Glashow, Nucl. Phys. **22** (1961) 579.
- [18] J. D. Bjorken et I. Duniety, Phys. Rev. D **36** (1987) 2109.
- [19] L. L. Chau and W. Y. Keung, Phys. Rev. Lett. **53** (1984) 1802.
- [20] K. Hagiwara *et al.*, Phys. Rev. D **66** (2002), 010001-249.
- [21] L. Wolfenstein, Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 1945.
- [22] M. Beneke, G. Buchalla, M. Neubert et C. Sachrajda, Nucl. Phys. B **606** (2001) 245.
- [23] G. C. Branco et L. Lavoura, Phys. Lett. B208.
- [24] M. Gronau et J. L. Rosner, Phys. Rev. D **65** (2002) 013004.
- [25] G. C. Branco, L. Lavoura et J. P. Silva, CP violation (Oxford university press : New York, 1999).

- [26] C. Jarlskog, Phys. Rev. Lett. **55** (1985) 1039.
- [27] M. Battaglia *et al.*, arXiv : hep-ph/0304132.
- [28] S. Antusch, J. Kersten, M. Lindner, M. Ratz and M. Schmidt, http://users.physik.tu-muenchen.de/rge/MPT/doc/MPTdoc_p.pdf.
- [29] Z. z. Xing and H. Zhang, J. Phys. G **30** (2004) 129 [arXiv :hep-ph/0309112].
- [30] N. Uekusa, A. Watanabe and K. Yoshioka, Phys. Rev. D **71** (2005) 094024 [arXiv :hep-ph/0501211].
- [31] B. R. Desai and A. R. Vaucher, Phys. Rev. D **63** (2001) 113001 [arXiv :hep-ph/0007233].
- [32] M. Peskin et D. Schroeder, An introduction to quantum field theory (Westview Press : USA, 1995).
- [33] A.P. Prudnikov, YU.A. Brychkov, O.I. Marichev, Integrals and Series (Volume 1)(Gordon and Breach : New York, 1986).
- [34] J. Hu, Semileptonic decay of b quark and examination of CKM matrix elements $|V_{ub}|$ and $|V_{cb}|$, <http://www.phy.duke.edu/courses/346/section1/EssayJieHu.pdf>.
- [35] W.-M. Yao et al. (Particle Data Group), J. Phys. G **33**, 1 (2006) (URL : <http://pdg.lbl.gov>).
- [36] C. T. H. Davies et S. M. Playfer, Heavy flavor physics : theory and experimental results in heavy quark physics and CP violation (Scottish universities summer school in physics : Bristol, 2002).
- [37] Mathieu Remazeilles, Etude des mésons D_s à l'aide de la QCD sur réseau, Laboratoire de Physique Théorique, Orsay.
- [38] J. Charles, *In the Proceedings of 4th Flavor Physics and CP Violation Conference (FPKP 2006), Vancouver, British Columbia, Canada, 9-12 Apr 2006, pp 043* [arXiv :hep-ph/0606046].
- [39] M. Bona *et al.* [UTfit Collaboration], JHEP **0507** (2005) 028 [arXiv :hep-ph/0501199].
- [40] R. Feynman, R. Leighton et M. Sands, The Feynman : Lectures on physics (Addison-Wesley : London, 1965).
- [41] A. Das et T. Ferbel, Introduction to nuclear and particles physics (John Wiley & Sons : New York, 1994).
- [42] M. Ciuchini, M. Pierini and L. Silvestrini, Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 221804 [arXiv :hep-ph/0507290].
- [43] Z. Ligeti, Int. J. Mod. Phys. A **20** (2005) 5105 [arXiv :hep-ph/0408267].
- [44] P. Wagner [CDF Collaboration], FERMILAB-CONF-07-077-E, Apr 2007. 5pp.
- [45] I. Shreyber [CDF Collaboration], FERMILAB-CONF-06-410-E, Nov 2006. 4pp.
- [46] M. Bona *et al.* [UTfit Collaboration], Phys. Rev. Lett. **97** (2006) 151803 [arXiv :hep-ph/0605213].

-
- [47] M. Bona *et al.* [UTfit Collaboration], *JHEP* **0603** (2006) 080 [arXiv :hep-ph/0509219].
- [48] L. Silvestrini *et al.* [**UTfit** Collaboration], *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **156** (2006) 3.
- [49] F. Halzen et D. Martin, *Quarks and leptons : An introductory course in modern particle physics* (John Wiley & Sons : New York, 1984).
- [50] A. Stocchi, Current status of the CKM matrix and the CP violation, arXiv :hep-ph/0405038.