Année académique 2003-2004

Université de Liège
Faculté des Sciences
Département de Physique

Brisures de symétrie et génération de masse

Lorcé Cédric

Mémoire présenté en vue
de l'obtention du grade
de licencié en Sciences Physiques

Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes que j'ai côtoyées jusqu'à présent. Particulièrement ma famille qui, sans le savoir au début, m'a donné le goût de la physique. Un grand merci aussi à tous mes amis, sans qui je n'aurais pas pu m'épanouir. Un merci à mes institutrices, enseignants et professeurs pour avoir transmis leur savoir, leur passion et leur humanité. Et enfin, merci à mon promoteur, M. Cudell, pour m'avoir guidé tout au long du mémoire.

Table des matières

Introduction

Déjà bien avant les Grecs anciens, la symétrie fascinait l'Homme. Elle n'était alors vue que sous la forme de périodicité et de constance : périodicité dans l'alternance jour-nuit et dans le cycle des saisons, constance dans la taille des objets inanimés et dans l'immuabilité du ciel nocturne. La périodicité a permis de comprendre la notion de temps et de mesurer ce dernier. La constance, elle, a permis de définir des repères dans l'espace et de mesurer l'étendue de celui-ci. Cette symétrie sera appelée plus tard invariance par translation temporelle.

Au début de l'Antiquité, la symétrie est devenue synonyme de beauté et d'ordre. En poésie, elle s'exprimait par la répétition de sons et par le rythme donné aux mots. Associée au Nombre d'Or, la symétrie garantissait la construction d'édifices frôlant la perfection. Les généraux romains ont remporté d'éclatantes victoires et ont conquis tout le bassin méditerranéen grâce à leurs armées où l'ordre primait. Mais cela ne s'arrêtait pas là. La symétrie est également entrée dans les croyances en tant que manifestation du divin. Ainsi, par exemple, le cycle des saisons était lié au mythe d'Adonis[1] ou l'alternance du jour et de la nuit au voyage du dieu solaire Rê à l'extérieur et à l'intérieur du corps de Nout, la déesse du Ciel.

Au fil de l'Histoire, la symétrie a revêtu bien d'autres aspects encore : principe, nécessité, égalité, règle, critère, loi, outil, approximation, infini, ... Nous pouvons facilement concevoir que presque tout tourne autour de la symétrie. Pour nous en convaincre, il nous suffira d'imaginer un monde où elle n'existe pas. Ce monde serait en fait le chaos, rien de plus, rien de moins. Les Anciens en étaient déjà conscients et c'est pourquoi ils ont donné ce caractère divin, métaphysique et parfait à la symétrie, brique essentielle au Cosmos (par opposition au Chaos).

Pour en venir au coeur du sujet de ce mémoire, tâchons de voir quel impact la symétrie a eu sur le développement des sciences et des mathématiques. Nous commencerons donc tout naturellement avec les grecs, les premiers à s'être réellement interrogés sur le monde qui les entoure. En astronomie, Pythagore et Platon ont proposé un modèle d'univers essentiellement basé sur la perfection mathématique, même si cela allait à l'encontre des observations. Ainsi, le ciel était expliqué en termes de sphères, de nombre parfait[2] et de progressions géométriques[3]. Par la suite, Aristote a compliqué le système de sphères pour mieux rendre compte des observations sans sacrifier la perfection mathématique. En mathématique, les figures et les objets simples ont été classifiés selon leurs symétries particulières, démarche qu'on utilise encore de nos jours en physique des particules élémentaires.

À la fin de l'obscurantisme moyenâgeux, la physique a pris son essor grâce à des hommes

1. Suite à une querelle entre Aphrodite, déesse de l'Amour, et Perséphone, gardienne des Enfers, il a été décidé qu'Adonis resterait un tiers de l'année avec celle-ci (automne-hiver), un autre tiers avec celle-là (printemps) et le dernier tiers seul (été)[1].

2. Selon Pythagore, 10 est un nombre parfait car il est la somme des 4 premiers entiers. Il y a donc 10 corps célestes : le Soleil, la Terre, la Lune, Mercure, Vénus, Mars, Jupiter, Saturne, l'"anti-Terre" et un feu central.

3. Selon Platon, les distances des planètes par rapport à la Terre sont réglées par le jeu des deux séries géométriques : 1 (Lune) - 2 (Soleil) - 4 (Mercure) - 8 (Mars) et 1 (lune) - 3 (Vénus) - 9 (Jupiter) - 27 (Saturne).

comme Galilée et Newton qui ont montré que les mathématiques pouvaient également servir à décrire le monde des Hommes. Il n'y avait plus de distinction entre le ciel et la terre. On a découvert des ressemblances entre des phénomènes apparemment distincts qui ont amené les grandes unifications des lois de la physique. Newton a concilié gravitation et pesanteur, Maxwell a unifié électricité et magnétisme en symétrisant ses célèbres équations puis a identifié la lumière à l'onde électromagnétique, Einstein a rattaché le temps à l'espace et les fondateurs de la mécanique quantique ont concilié deux caractères antagonistes grâce au principe de dualité onde-corpuscule. Tous ces pas de géant ont eu notamment comme moteur des considérations de symétrie. Les lois de conservation ont simplifié nombre de problèmes et servent encore de nos jours à guider les pas des physiciens dans leurs recherches. La formulation mathématique de la symétrie fut un appui considérable pour la physique. Grâce au théorème de Noether, nous pouvons associer à chaque symétrie d'un système une quantité physique conservée. La théorie des groupes, quant à elle, est essentielle en cristallographie et dans l'étude des particules élémentaires. Enfin, la dernière théorie mathématique en date traitant des symétries à avoir trouvé une application en physique est la théorie des fractales. Il s'agit d'un outil indispensable dans l'étude des phénomènes chaotiques et des objets fractals.

La symétrie a donc toujours été un allié précieux pour le théoricien et particulièrement en physique des particules. Dans la seconde moitié du XX^{e} siècle, on a commencé à briser des symétries. De nouveaux phénomènes, comme la supraconductivité et la sympathie entre électromagnétisme et interaction faible, ont ainsi pu être expliqués en termes d'un brisure spontanée de symétrie. L'intérêt d'une brisure de symétrie est qu'elle permet dans certains cas d'assurer la renormalisabilité d'une théorie. Dans d'autres, des observations expérimentales ne peuvent être éclairées que si une symétrie n'a été que légèrement brisée. On dit alors que la symétrie est approchée. De plus, le mécanisme de brisure de symétrie peut générer spontanément une masse pour des particules tout en conservant une symétrie sous forme cachée. Enfin, la brisure de symétrie est un moyen d'unifier les descriptions des interactions fondamentales, rêve de nombreux physiciens.

Il existe de nos jours de nombreux mécanismes de brisure. Ce mémoire aura pour but d'en présenter quelques-uns aussi clairement que possible et de les illustrer par des exemples explicites.

Notations et conventions

Comme dans tous les ouvrages et tous les articles se rapportant à la théorie quantique des champs, nous utiliserons les unités "naturelles"

$$\hbar = c = 1,$$

ce qui permet de ne plus s'encombrer inutilement de constantes et de ne travailler qu'avec une seule unité

$$[\text{longueur}] = [\text{temps}] = [\text{énergie}]^{-1} = [\text{masse}]^{-1}.$$

Suivant le domaine physique ou mathématique, des symboles différents sont utilisés pour la même opération mathématique. Pire, un même symbole change parfois de signification d'un domaine à l'autre. Aussi, pour éviter toute confusion, voici ce que nous utiliserons :

$$\begin{aligned} {}^{*} &\equiv \text{conjugaison complexe,} \\ {}^{T} &\equiv \text{transposition,} \\ {}^{\dagger} &\equiv \text{conjugaison complexe et transposition.} \end{aligned}$$

Voici maintenant les notations et les conventions relatives aux tenseurs et à la relativité. Comme tout bon physicien théoricien des champs, nous utiliserons le tenseur métrique[4]

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

où les indices grecs ne pourront prendre que des valeurs parmi 0, 1, 2 et 3. Les indices romains i, j, k, ... ne désigneront que les composantes spatiales. Les quadrivecteurs ainsi que les nombres ordinaires (ex. : x, m) seront écrits en italique comme de coutume, tandis que les trivecteurs (ex. : $\mathbf{p}$) seront écrits en gras. Le $\cdot$ désignera le produit scalaire aussi bien dans l'espace de Minkowski que dans l'espace cartésien. On aura ainsi, par exemple,

$$p \cdot x = Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}.$$

Enfin, nous adopterons la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés, ce qui permettra d'écrire les produits scalaires en termes de leurs composantes plus facilement

$$p_\mu x^\mu = p_0 x^0 + p_i x^i.$$

4. Nous utilisons un abus d'écriture pour définir le tenseur métrique. De même, nous appellerons un quadrivecteur par sa composante μ. Le contexte est normalement suffisamment clair dans ce mémoire pour savoir exactement si nous avons affaire à un tenseur où à ses composantes.

Chapitre 1

Les symétries en théorie quantique des champs

Avant de voir ce qu'on entend par symétries en théorie quantique des champs et comment on les formalise, jetons un coup d'oeil rapide sur leur statut dans différents domaines de la physique.

1.1 Symétries et lois de conservation en mécanique classique

Pour étudier un problème en mécanique classique dans le paradigme de Newton, il suffit de faire l'inventaire des forces intervenant dans le problème et d'écrire la fameuse équation pour chaque point matériel

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{1.1}$$

où $\mathbf{F}$ désigne la somme de toutes les forces qui s'appliquent au point matériel considéré. On obtient ainsi un système d'équations différentielles du deuxième ordre éventuellement couplées. A part pour quelques exemples simples, nous nous rendons rapidement compte qu'il est rarement facile de résoudre ce système et d'obtenir ainsi les fonctions $\mathbf{r}(t)$ pour chaque point matériel.

C'est alors qu'on fait appel aux lois de conservation [2]. Elles sont au nombre de trois :

$$\frac{d}{dt}\,\mathbf{p} = \mathbf{F}, \tag{1.2}$$

$$\frac{d}{dt}\,\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \tag{1.3}$$

$$\frac{d}{dt}\,T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \tag{1.4}$$

Elles traduisent respectivement la conservation de la quantité de mouvement, du moment cinétique et de l'énergie. Ces lois sont intimement liées aux propriétés de symétrie de l'espace et du temps : la conservation de l'impulsion découle de l'homogénéité de l'espace, la conservation du moment cinétique de l'isotropie de l'espace et enfin la conservation de l'énergie de l'homogénéité du temps. L'utilité de ces lois de conservation apparaît principalement dans la recherche de ce qu'on appelle *intégrales premières*, c'est-à-dire des fonctions des variables $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ et t qui soient des constantes du mouvement.

Notons également que l'existence de certaines symétries du problème impose presque un système de coordonnées naturel. Par exemple, pour un satellite en orbite autour de la terre, il est incontestablement plus pratique d'utiliser les coordonnées polaires. De même, l'étude du mouvement d'une charge électrique dans un milieu d'induction magnétique homogène et constante privilégie les coordonnées cylindriques et le pendule de Foucault, les coordonnées sphériques. Un choix judicieux de système de coordonnées permet ainsi de simplifier la forme des équations et de mieux représenter la situation.

Il existe deux autres formalismes de la mécanique classique, à savoir le formalisme lagrangien et le formalisme hamiltonien. Il en ressort deux équations d'évolution [3].

La première est l'équation d'évolution de l'impulsion généralisée p_i

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{1.5}$$

où

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{1.6}$$

avec $L = L(q,\dot{q},t)$. Si le lagrangien L ne dépend pas explicitement d'une certaine coordonnée généralisée q_j (coordonnée dite cyclique), alors son impulsion généralisée p_j sera manifestement une constante du mouvement. Il s'agit là de l'essence même de la première règle d'or.

La deuxième est l'équation d'évolution du hamiltonien H

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{1.7}$$

où $H = p_i\dot{q}_i - L$. Si le lagrangien L ne dépend pas explicitement du temps, alors H est une constante du mouvement et est appelée intégrale première de Jacobi ou seconde règle d'or. Nous retrouvons évidemment les trois lois de conservation (1.2), (1.3) et (1.4) qui ne sont que des cas particuliers de (1.5) et (1.7).

Nous voyons donc de façon claire que les symétries jouent un rôle essentiellement simplificateur en mécanique classique. Elles ne constituent nullement la théorie en soi mais juste un outil très pratique dans la recherche des solutions.

1.2 La conservation de l'énergie

Au cours du temps, les scientifiques se sont aperçus que le concept d'énergie était particulièrement pertinent. Aussi ont-ils introduit différents types d'énergie : mécanique, chimique, électrique, magnétique, lumineuse, calorifique, ... et découvert que ces énergies pouvaient se transformer les unes en les autres. C'est maintenant qu'intervient un fait remarquable qui donne tout l'intérêt au concept d'énergie : la somme de toutes les énergies d'un système isolé est une constante ! Aucune expérience jusqu'à présent n'a pu invalider cette loi. Et lorsqu'une semblait l'enfreindre, une nouvelle forme d'énergie était alors découverte. Aujourd'hui, nous ne parlons pas *des énergies* mais *de l'énergie*. Il s'agit, dans l'esprit de la plupart, d'une sorte d'entité unique pouvant se présenter sous différentes formes et passer de l'une à l'autre en partie ou en totalité[1]. Cette vue de l'esprit n'a évidemment de sens que sous l'hypothèse d'une loi de conservation de l'énergie partout et toujours respectée.

La conservation de l'énergie constitue la pierre angulaire d'une des théories physiques les plus importantes où elle fait office de premier principe, à savoir la thermodynamique. Elle est

1. Ajoutons tout de même un bémol car, en réalité, l'énergie ne peut pas toujours changer de forme intégralement. C'est le cas de la chaleur qu'on considère comme de l'énergie dégradée. Elle ne peut jamais se convertir totalement en une autre forme d'énergie, ce qu'exprime bien le second principe de la thermodynamique [4].

même devenue indispensable dans toute théorie. De nos jours, rares sont ceux qui la remettent en question. Sa simplicité, sa facilité et son efficacité émerveille encore et toujours. Un de ses derniers grands coups d'éclat a eu lieu dans l'étude de la radioactivité β. En considérant la désintégration β^-

$$\mathrm{n} \longrightarrow \mathrm{p} + \mathrm{e}^-, \tag{1.8}$$

on a remarqué qu'il était impossible de satisfaire à la loi de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie. Nombreux ont été les physiciens à abandonner à contrecœur cette dernière. Pourtant Pauli en 1930, ne pouvant s'y résoudre, a préféré supposer l'existence d'une nouvelle particule encore indétectée à l'époque et n'interagissant que très peu avec la matière. Il a alors complété la désintégration (1.8)

$$\mathrm{n} \longrightarrow \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_e \tag{1.9}$$

où $\bar{\nu}_e$ est le neutrino électronique [2]. La particule a finalement été détectée en 1956 par Cowan et Reines [5].

1.3 Symétries en mécanique quantique

Dans la première moitié du XX^e siècle, les physiciens se sont rapidement rendus compte que la symétrie allait jouer un rôle plus fondamental en mécanique quantique. En mécanique quantique, le champ des symétries s'élargit. Alors qu'en mécanique classique, il s'agissait essentiellement de symétries spatio-temporelles, en mécanique quantique, elle passe à un degré plus abstrait. De plus, les symétries du système permettent de désigner de façon univoque les états susceptibles d'être occupés par le système.

1.3.1 Symétries et constantes du mouvement en mécanique quantique

Déjà dans le formalisme hamiltonien de la mécanique classique, il était apparu à l'aide des crochets de Poisson que ce sont les symétries du hamiltonien du système qui entraînent celles de ce dernier. Voyons comment cela se présente en mécanique quantique. L'équation de base [3] de la mécanique quantique est l'équation d'évolution temporelle ou équation de Schrödinger [6]

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \widehat{H} |\psi(t)\rangle \tag{1.10}$$

où $\widehat{H}$ est l'opérateur d'énergie du système ou Hamiltonien. En projetant cette équation sur la base des coordonnées $|r\rangle$, nous retrouvons l'équation telle que Schrödinger l'avait écrite, c'est-à-dire en termes des fonctions d'ondes [4]

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r},t) = \widehat{H}\psi(\mathbf{r},t) \tag{1.11}$$

2. Il s'agit en réalité d'un antineutrino afin de respecter la conservation du nombre leptonique.

3. Le formalisme de Feynman de la mécanique quantique se base, lui, sur l'action S du système.

4. Entre 1923 et 1927, il existait deux formulations de la mécanique quantique : la *mécanique ondulatoire* d'Erwin Schrödinger faisant intervenir le concept de fonction d'onde et la *formulation matricielle* principalement due à Werner Heisenberg. C'est alors qu'au début de l'année 1927, Paul André Marie Dirac a montré que ces deux formulations de la mécanique quantique étaient équivalentes et n'étaient en fait que des représentations particulières de l'algèbre des opérateurs linéaires dans un espace vectoriel abstrait dénommé espace (de Hilbert) des vecteurs d'état $|\psi\rangle$.

avec $\psi(\mathbf{r},t) = \langle \mathbf{r}|\psi\rangle$. Lorsque le Hamiltonien est indépendant du temps, cette équation admet les solutions stationnaires

$$\psi_n(\mathbf{r},t) = \varphi_n(\mathbf{r})e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} \tag{1.12}$$

où $\varphi_n(\mathbf{r})$ satisfait à l'équation de Schrödinger indépendante du temps

$$\widehat{H}\varphi_n(\mathbf{r}) = E_n\varphi_n(\mathbf{r}), \tag{1.13}$$

qui n'est rien d'autre qu'une équation aux valeurs propres[5].

Observons ce qui se passe lorsque le système possède une certaine symétrie. A chaque opération de symétrie R agissant sur le système, on associe un opérateur de symétrie $\widehat{P}_R$ agissant, lui, sur le vecteur d'état $|\psi\rangle$ du système. On aura en toute généralité

$$\widehat{P}_R\,|\psi\rangle = |\psi'\rangle. \tag{1.14}$$

Par définition, $\widehat{P}_R$ sera un opérateur de symétrie s'il laisse l'équation d'évolution temporelle du système (1.10) inchangée. On a donc[6]

$$\begin{aligned} i\hbar\,\frac{d}{dt}\,|\psi'(t)\rangle &= \widehat{H}\,|\psi'(t)\rangle \\ i\hbar\,\widehat{P}_R\,\frac{d}{dt}\,|\psi(t)\rangle &= \widehat{H}\widehat{P}_R\,|\psi(t)\rangle \\ i\hbar\,\frac{d}{dt}\,|\psi(t)\rangle &= \widehat{P}_R^{-1}\widehat{H}\widehat{P}_R\,|\psi(t)\rangle\,, \end{aligned}$$

ce qui implique pour assurer l'invariance de l'équation d'évolution

$$\widehat{H} = \widehat{P}_R^{-1}\widehat{H}\widehat{P}_R, \tag{1.15}$$

c'est-à-dire

$$[\widehat{H},\widehat{P}_R] = 0. \tag{1.16}$$

Pour connaître les symétries du système, il suffit de connaître celles de son hamiltonien comme l'indique (1.15). Cette remarque montre qu'en mécanique quantique, le concept de hamiltonien revête une grande importance, tout comme en mécanique classique où les crochets de Poisson sont le pendant du commutateur. C'est réellement le hamiltonien qui pilote le comportement et définit les caractéristiques du système. Remarquons que l'ensemble des opérations de symétrie laissant le hamiltonien du système invariant forme un groupe qu'on appelle groupe de Schrödinger.

Faisons maintenant le lien entre symétrie et constante du mouvement. Un opérateur de symétrie ne change pas la norme du vecteur d'état

$$\begin{aligned} 1 &= \langle\psi'|\psi'\rangle \\ &= \langle\psi|\,\widehat{P}_R^{\dagger}\widehat{P}_R\,|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|\psi\rangle, \end{aligned}$$

5. Remarquons ici que pour une même valeur propre E_n, il peut correspondre plusieurs vecteurs propres $\varphi_n(\mathbf{r})$ linéairement indépendants. Le nombre quantique n ne suffit donc pas à désigner de manière univoque les états d'énergie. Nous verrons plus loin que des considérations de symétrie nous permettent de distinguer ces états.

6. On suppose que $\widehat{P}_R$ ne dépend pas du temps et ne fait pas intervenir la conjugaison complexe (il n'est donc pas antilinéaire).

ce qui implique son unitarité

$$\widehat{P}_R^\dagger \widehat{P}_R = \widehat{P}_R \widehat{P}_R^\dagger = \widehat{1}. \tag{1.17}$$

En outre, dans le cas des symétries continues, une application répétée de l'opérateur $\widehat{P}_R$ doit être équivalente à une simple transformation d'un état initial en un autre[7]. Cette condition avec celle de l'unitarité imposent la forme suivante

$$\widehat{P}_R = e^{-i\lambda \widehat{G}_R} \tag{1.18}$$

où λ est un paramètre réel et $\widehat{G}_R$ un opérateur hermitien appelé générateur de la transformation de symétrie. Comme $\widehat{P}_R$ est un opérateur de symétrie, on a

$$\begin{aligned} 0 &= [\widehat{H},\widehat{P}_R] \\ &= \left[\widehat{H},\widehat{1} - i\lambda\widehat{G}_R - \frac{\lambda^2}{2}(\widehat{G}_R)^2 + \dots\right] \\ &= 0 - i\lambda[\widehat{H},\widehat{G}_R] - \frac{\lambda^2}{2}(\widehat{G}_R[\widehat{H},\widehat{G}_R] + [\widehat{H},\widehat{G}_R]\widehat{G}_R) + \dots \end{aligned}$$

pour toute valeur du paramètre réel λ. Ceci impose donc

$$[\widehat{H},\widehat{G}_R] = 0. \tag{1.19}$$

Vu que $\widehat{G}_R$ est hermitien et linéaire, il s'agit d'un opérateur associé à une observable G. Nous avons aussi, dans le schéma de Heisenberg, la relation

$$\frac{d\widehat{G}_R}{dt} = \frac{\partial \widehat{G}_R}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}[\widehat{H},\widehat{G}_R]. \tag{1.20}$$

Si la grandeur physique G, qui est la valeur moyenne de l'opérateur quantique associé $\langle \widehat{G}_R \rangle$, ne dépend pas explicitement du temps, nous obtenons

$$\frac{d}{dt}\langle \widehat{G}_R \rangle = \frac{i}{\hbar}\langle [\widehat{H},\widehat{G}_R] \rangle \tag{1.21}$$

et vu (1.19), on trouve finalement

$$\frac{dG}{dt} = \frac{d\langle \widehat{G}_R \rangle}{dt} = 0 \tag{1.22}$$

c'est-à-dire que G est une constante du mouvement comme en mécanique classique.

En résumé, à chaque *transformation de symétrie* correspond une *constante du mouvement* ou encore *loi de conservation*. Nous rediscuterons ce lien un peu plus tard avec le théorème de Noether.

1.3.2 Symétries propres à la mécanique quantique

Le paradigme à suivre en mécanique quantique est simple. Il suffit d'écrire l'équation de Schrödinger (1.10) pour le système et de la résoudre. Surviennent alors deux difficultés principales : la résolution de l'équation et la recherche du hamiltonien. La première difficulté ne nous

7. Cette condition vient du fait que les opérations de symétrie forment un groupe et donc satisfont à la loi de composition interne.

intéresse pas pour ce mémoire [8]. Attardons-nous un peu sur la seconde. Il existe en mécanique quantique un principe appelé principe de correspondance ou théorème d'Ehrenfest [9] stipulant que les valeurs moyennes des opérateurs obéissent aux équations de la mécanique classique. Pour satisfaire à cette condition, l'opérateur d'évolution temporelle n'est rien d'autre que le hamiltonien classique promu au rang d'opérateur. Cet opérateur a exactement la même forme qu'en mécanique classique à un détail près : les quantités $\mathbf{r}$ et $\mathbf{p}$ sont remplacées par les opérateurs [10] correspondant $\hat{\mathbf{r}}$ et $\hat{\mathbf{p}}$. Ce critère permet ainsi à la mécanique quantique d'englober la mécanique classique.

Cependant, il existe en mécanique quantique des situations où des parties de l'opérateur hamiltonien ne trouvent pas de correspondant en mécanique classique. C'est le cas notamment de l'opérateur de spin $\hat{\mathbf{s}}$ vu que le spin ou moment intrinsèque d'une particule est un concept essentiellement quantique. Ces quantités essentiellement quantiques ont d'abord été introduites *ad hoc* afin de satisfaire à des impératifs expérimentaux. Nous verrons plus tard qu'en théorie quantique des champs, ce sont des considérations de symétrie qui permettent de construire le hamiltonien ou le lagrangien du système. Ces quantités propres à la mécanique quantique peuvent parfois être des constantes du mouvement. Il existe par conséquent des symétries associées agissant dans des espaces abstraits autres que l'espace-temps habituel.

Pour terminer cette section consacrée aux symétries propres à la mécanique quantique, regardons ce qui se passe pour les symétries par rapport aux permutations de particules. Nous savons que la mécanique quantique a balayé le concept de trajectoire au bénéfice de celui de densité de probabilité. Par conséquent, des particules identiques (même masse propre, même charge, même spin, . . .) ne peuvent plus être distinguées. En mécanique classique, nous pouvions toujours par la pensée écrire un numéro au marqueur noir sur les particules et les suivre à la trace vu que le concept de trajectoire y était pertinent. Ceci n'est plus vrai en mécanique quantique. Il est impossible de suivre à la trace une particule parmi ses répliques si elles sont trop proches les unes des autres. Les incertitudes quantiques leur permettent d'échanger leurs places sans que nous puissions le remarquer. Ceci a de grandes répercutions sur la physique des particules dites indiscernables. Considérons tout d'abord un système de deux particules indiscernables décrites respectivement par leurs vecteurs d'état

$$|\psi_{ab}(1,2)\rangle = |\varphi_a(1)\rangle \otimes |\varphi_b(2)\rangle \tag{1.23}$$

et

$$|\psi_{ba}(1,2)\rangle = |\varphi_b(1)\rangle \otimes |\varphi_a(2)\rangle \tag{1.24}$$

où a et b désignent l'ensemble des nombres quantiques, 1 et 2 respectivement la particule 1 et la particule 2 et $\otimes$ le produit externe. Définissons maintenant l'opérateur permutation des particules 1 et 2, $\widehat{P}_{12}$ [11], comme suit :

$$\widehat{P}_{12}\,|\psi_{ab}(1,2)\rangle = |\varphi_a(2)\rangle \otimes |\varphi_b(1)\rangle = |\psi_{ba}(1,2)\rangle \tag{1.25}$$

8. Il s'agit toutefois d'un problème fort intéressant faisant intervenir des méthodes numériques et la recherche d'approximations raisonnables.

9. On l'appelle théorème car, historiquement, Ehrenfest est parti de l'équation de Schrödinger. Maintenant, on préfère souvent construire l'équation de Schrödinger en utilisant la propriété découverte par Ehrenfest et la conservation de la norme du vecteur d'état (interprétée comme la conservation de la probabilité totale).

10. Il reste cependant un problème, celui de l'ordonnancement des opérateurs. En mécanique classique, les quantités $\mathbf{r}$ et $\mathbf{p}$ commutent, ce qui n'est pas le cas de leurs homologues quantiques $\hat{\mathbf{r}}$ et $\hat{\mathbf{p}}$.

11. Il ne faut bien entendu pas confondre l'opérateur de permutation $\widehat{P}_{ij}$ avec l'opérateur d'inversion $\widehat{P}_I$ défini par $\widehat{P}_I\mathbf{r} = -\mathbf{r}$.

vu que le produit externe est commutatif. Nous pouvons toujours former à partir de (1.23) et (1.24) les combinaisons linéaires suivantes

$$|\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,[\,|\psi_{ab}(1,2)\rangle + |\psi_{ba}(1,2)\rangle\,] \tag{1.26}$$

et

$$|\psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,[\,|\psi_{ab}(1,2)\rangle - |\psi_{ba}(1,2)\rangle\,] \tag{1.27}$$

qui sont vecteurs propres de l'opérateur de permutation

$$\widehat{P}_{12}\,|\psi_S\rangle = +\,|\psi_S\rangle\,, \tag{1.28}$$

$$\widehat{P}_{12}\,|\psi_A\rangle = -\,|\psi_A\rangle\,. \tag{1.29}$$

Et donc, même si $|\psi_{ab}(1,2)\rangle$ et $|\psi_{ba}(1,2)\rangle$ ne sont pas des vecteurs propres de l'opérateur $\widehat{P}_{12}$, on peut toujours trouver des combinaisons linéaires de ces vecteurs qui le soient. De plus, comme les particules sont indiscernables, le hamiltonien reste le même après permutation de deux particules. Il s'ensuit

$$[\widehat{H},\widehat{P}_{12}] = 0. \tag{1.30}$$

Ainsi, si un système de particules identiques est symétrique (ou antisymétrique) à un moment donné, il le restera indéfiniment. On est alors amené à introduire le principe de symétrie qui stipule qu'un vecteur d'état décrivant un système de particules identiques doit être obligatoirement symétrique ou antisymétrique par rapport aux permutations de ces particules. Dans le premier cas, ces particules seront des bosons. Dans le second, il s'agira de fermions. Bosons et fermions ne satisfont pas aux mêmes statistiques. Les premiers obéissent à la statistique de Bose-Einstein, tandis que les seconds obéissent à la statistique de Fermi-Dirac. Toutes les particules de l'univers se classent suivant ces deux familles qui possèdent des caractéristiques bien différentes. C'est grâce au caractère fermionique des particules élémentaires constitutives (leptons et quarks) que la matière ne s'effondre pas en une gigantesque soupe. Par contre, c'est grâce au caractère bosonique de certaines particules qu'on obtient des faisceaux de lumière très puissants, des fluides parfaits (de viscosité nulle) ou des supraconducteurs (résistance électrique nulle). La perte du concept de trajectoire a brouillé les cartes et étend le caractère symétrique des particules identiques et par là-même les propriétés physiques de notre univers.

1.3.3 Symétries et nombres quantiques

Revenons à la remarque concernant la dégénérescence des états d'énergie. Elle est due aux symétries du système et donc du hamiltonien. En recherchant l'ensemble des symétries de ce dernier, nous pouvons espérer pouvoir désigner les états individuellement. Parmi toutes les symétries obtenues, on choisit le plus grand ensemble d'opérateurs associés qui commutent entre eux. On obtient ainsi ce qu'on appelle un *Ensemble Complet d'Observables Compatibles.* Comme tous les opérateurs de cet ensemble commutent, ils sont simultanément diagonalisables. Les vecteurs propres de ces opérateurs sont alors caractérisés pas des nombres quantiques eux-même reliés aux valeurs propres de ces vecteurs propres.

L'exemple le plus connu et le plus simple est l'atome hydrogénoïde. Il suffit de trois nombres quantiques n, l et m_l pour désigner un état unique, c'est pourquoi le vecteur propre est souvent appelé par ses nombres quantiques $|n,l,m_l\rangle$. On peut montrer que[12]

$$\widehat{H}\,|n,l,m_l\rangle = -Z^2\,\frac{\mu}{m_0}\,\frac{I_0}{n^2}\,|n,l,m_l\rangle\,, \tag{1.31}$$

$$\widehat{L}^2\,|n,l,m_l\rangle = l(l+1)\hbar^2\,|n,l,m_l\rangle\,, \tag{1.32}$$

$$\widehat{L}_z\,|n,l,m_l\rangle = m_l\hbar\,|n,l,m_l\rangle\,. \tag{1.33}$$

où Z est la charge du noyau, μ la masse réduite de l'atome hydrogénoïde, m_0 la masse de l'électron et $I_0 = \frac{m_0\,e^4}{2\hbar^2}$ l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène. Les nombres quantiques n, l et m_l sont respectivement appelés nombre quantique principal, nombre quantique azimutal et nombre quantique magnétique.

La symétrie permet donc de dénommer de manière biunivoque les états du système considéré. De plus, en brisant une de ces symétries, on observe directement une levée de dégénérescence des états caractérisés par des nombres quantiques différents relatifs à cette symétrie. Ainsi, dans le cas de l'atome hydrogénoïde, l'addition d'une induction magnétique extérieure $\mathbf{B}_0$ qui brise l'isotropie de l'espace lève la dégénérescence des états ne différant que par le nombre quantique magnétique[13] m_l. Tout ceci montre qu'il existe un lien entre symétries, dégénérescence des états d'énergie et nombres quantiques.

1.4 La symétrie comme principe fondateur de la relativité

Un des plus grands physiciens est sans conteste Albert Einstein, le seul homme dont le laboratoire tenait dans un chapeau. Tout comme chaque physicien, il croyait avec ferveur à certains principes. Pour lui, la Nature et donc la physique se doit d'être élégante et symétrique. Aussi, en 1905, a-t-il principalement invoqué de telles considérations dans son mémoire fondateur de la théorie de la relativité restreinte intitulé *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*[14]. Il a énoncé dans ce dernier un des plus beaux et des plus fondamentaux principes de la physique, le principe de relativité : du point de vue de leurs propriétés physiques, tous les référentiels inertiels sont équivalents. En clair, les lois de la physique doivent avoir la même forme quelque soit le référentiel inertiel dans lequel on se trouve. Cependant, la théorie de la relativité restreinte a besoin d'un second postulat qui est l'invariance de la vitesse de la lumière c dans le vide. Ces deux postulats ont révolutionné à eux seuls toute la physique. Le principe de la relativité a balayé le concept d'espace absolu. Il n'existe pas de référentiel privilégié, ils sont tous sur un pied d'égalité. Il n'y a pas non plus de temps absolu, pas de grande horloge cosmique dictant sa loi sur l'univers. Le caractère privilégié du temps dans les transformations de Galilée disparaît pour laisser place à un lien étroit entre espace et temps comme le montrent les transformations de Lorentz

$$x^\mu \to \underline{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{1.34}$$

avec $\Lambda^\mu{}_\nu$ satisfaisant à la condition

$$\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda_\nu{}^\rho = \delta^\mu_\nu, \tag{1.35}$$

désormais seules transformations de coordonnées autorisées. Le temps devient à proprement parler la quatrième dimension.

12. On a négligé ici le spin de l'électron et celui du proton induisant des interactions spin-orbite et spin-spin.
13. C'est du cas que nous considérons que vient le nom de ce nombre quantique.
14. Ce qui signifie “Sur l'électrodynamique des corps en mouvement”.

Peu après qu'Einstein ait bouleversé le monde de Newton, Minkowski a réussi à trouver un espace satisfaisant à la relativité restreinte, c'est l'espace-temps (de Minkowski). On a pu alors regrouper des quantités en quadrivecteurs, les vecteurs de cet espace-temps. Ainsi, si espace et temps sont liés, impulsion et énergie le sont aussi. En outre, ces quadrivecteurs ont permis de simplifier considérablement les équations de la physique et tout particulièrement celles de l'électromagnétisme qui reflétaient déjà ce lien étroit entre espace et temps. Einstein a également jeté un autre pont qui s'est avéré d'une importance capitale en physique nucléaire et en physique des particules : il s'agit de l'équivalence de la masse et de l'énergie, ou plus exactement de l'inertie associée à l'énergie.

Einstein ne s'est pas arrêté en si bon chemin. Si la relativité restreinte traitait le cas des référentiels inertiels, il restait les référentiels non inertiels. Toujours pour des considérations de symétrie, il voulait supprimer cette distinction entre les référentiels introduite par Newton deux siècles plus tôt. Il est parti d'une observation toute innocente à première vue : l'égalité entre la masse *inerte* et la masse *pesante* [15]. Newton n'y a rien vu d'autre qu'une coïncidence de la Nature. Pourtant, Einstein s'est dit que cela devait cacher quelque chose de plus profond. C'est alors qu'il en est arrivé, en 1911, à introduire le principe d'équivalence : les lois physiques rapportées à un référentiel dans un champ de pesanteur "vers le bas" de mesure g concordent parfaitement avec ces mêmes lois rapportées dans un référentiel subissant une accélération "vers le haut" de mesure g [16]. Autrement dit, si un physicien est enfermé dans un ascenseur, aucune expérience ne pourra lui montrer s'il est soumis à la gravitation ou bien s'il se trouve à bord d'une fusée accélérée. Ainsi gravitation et forces fictives d'inertie ne forment qu'un seul et même phénomène vu sous deux angles différents tout comme le champ électromagnétique possède deux facettes, à savoir le champ électrique et le champ magnétique. Cela suggère donc un élargissement du principe de relativité, qui sera maintenant appelé principe de relativité générale et qui stipule que *tous* les référentiels sont équivalents au point de vue physique. Toutes les transformations de coordonnées sont permises (aux restrictions mathématiques près) mais les coordonnées perdent leur sens physique. Les coordonnées physiques sont obtenues grâce au

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu \tag{1.36}$$

qu'on peut découper[7] comme suit :

$$\mathrm{d}s^2 = g_{00}(\mathrm{d}x^0 + \frac{g_{0i}}{g_{00}}\,\mathrm{d}x^i)^2 + \left(g_{ij} - \frac{g_{0i}\,g_{0j}}{g_{00}}\right)\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j. \tag{1.37}$$

L'élément de distance spatiale physique $\mathrm{d}\sigma$ est défini par la relation

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \left(g_{ij} - \frac{g_{0i}\,g_{0j}}{g_{00}}\right)\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j \tag{1.38}$$

tandis que l'élément de temps physique (temps propre) $\mathrm{d}\tau$ s'obtient par

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}\tau^2 \tag{1.39}$$

15. En réalité, il faudrait dire que c'est rapport entre la masse inerte et la masse pesante qui est identique pour tous les corps. Cependant, il est toujours possible de choisir la constante de gravitation pour que ce rapport vaille 1.

16. On en conclu qu'un référentiel en chute libre dans un champ de gravitation est positivement inertiel et par conséquent, la relativité restreinte y est applicable. Il est toujours possible d'annuler (localement du moins) les effets de la pesanteur, il suffit pour cela de se laisser tomber. Il existe une anecdote dont je ne peux certifier la véracité racontant qu'un jour, Einstein aurait demandé à une personne suicidaire venant de se jeter par la fenêtre, s'il avait ressenti son poids lors de la chute. Cette personne aurait affirmé que non. Einstein serait alors reparti satisfait.

avec $\mathrm{d}\sigma = 0$. Voici les principes fondamentaux de la théorie de la relativité générale qu'Einstein n'arrivera à formuler mathématiquement qu'en 1915.

Jusqu'à ce jour, aucun résultat expérimental n'a pu mettre en doute la théorie de la relativité. Une fois de plus, les arguments de symétrie ont permis à la physique d'avancer et même de faire un pas de géant dans la compréhension de notre univers.

1.5 Symétries en théorie quantique des champs

Nous voici arrivés à ce qui nous intéresse plus particulièrement dans ce mémoire. Le rapide tour d'horizon que nous venons d'accomplir n'a pas uniquement un but récréatif et introductif. Il a montré également quel rôle ont joué les symétries dans les théories physiques. Les théories récentes étant les enfants légitimes des anciennes, il nous a alors semblé nécessaire d'esquisser d'un coup de pinceau leur héritage. La théorie quantique des champs est la digne descendante de la mécanique quantique et de la relativité restreinte[17]. Elle est même une descendante naturelle car dès qu'on tente d'associer les concepts de la relativité restreinte avec ceux de la mécanique quantique, on tombe tout naturellement sur une théorie des champs.

1.5.1 Symétries et lagrangien d'une théorie des champs

Pour élaborer, construire une théorie des particules aujourd'hui, il faut tout d'abord pouvoir écrire l'expression d'une quantité-pilote de laquelle il est possible de dériver les équations du mouvement. Comme mentionné plus haut, nous avons principalement deux approches possibles, l'une basée sur le hamiltonien du système, l'autre sur son lagrangien. Ce mémoire utilisera principalement le formalisme lagrangien de la théorie des champs. En mécanique classique, nous avons une quantité fondamentale, l'action S du système, qui n'est rien d'autre que l'intégrale d'un temps t_1 à un temps t_2 du lagrangien. Le principe variationnel veut que le système passe de sa configuration initiale à sa configuration finale suivant un "chemin" tel que l'action soit extrémale. C'est grâce à ce principe que nous pouvons obtenir les équations du mouvement d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{1.40}$$

où $L = L(q_i,\dot{q}_i,t)$. La théorie lagrangienne des champs reprend ces idées et les adapte aux champs. On obtient ainsi l'expression suivante

$$S \equiv \int L\,\mathrm{d}t = \int \mathcal{L}(\phi_i,\partial_\mu\phi_i)\,\mathrm{d}^4x \tag{1.41}$$

où $\mathcal{L}$ est la densité lagrangienne qui est une fonction d'un ou plusieurs champs ϕ_i et de leurs dérivées $\partial_\mu\phi_i$. Comme en théorie des champs on joue presque exclusivement avec cette densité lagrangienne, on se permet un abus de langage en l'appelant simplement lagrangien. De la même manière nous obtenons les équations du mouvement pour les champs

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0. \tag{1.42}$$

17. L'intensité des interactions gravitationnelles étant de beaucoup plus faibles que les trois autres interactions fondamentales de la nature, il convient, comme nous l'avions fait en mécanique quantique de ne pas les considérer. Il existe toutefois des tentatives qui visent à incorporer la gravitation en essayant d'intégrer les concepts d'Einstein. Aucune tentative n'a encore obtenu de résultats probant. Elles ne peuvent donc pas être considérées comme des théories à part entière.

Remarquons que par rapport au cas classique (1.40), les équations du mouvement en théorie des champs font également intervenir les dérivées par rapport aux coordonnées spatiales. Ceci est tout-à-fait normal car la théorie de champs tient compte de la relativité restreinte. Il faut, par conséquent, que les dérivées temporelles s'accompagnent toujours des dérivées spatiales pour satisfaire au principe de relativité.

Nous avons vu dans la section (1.3.1) qu'on appelle symétries du système un ensemble de transformations qui laissent la forme des équations du mouvement inchangée. Nous en avons conclu que toute symétrie du système était une symétrie du hamiltonien. De même, en théorie (classique) des champs, nous dirons qu'une transformation des champs est une symétrie si elle laisse la forme des équations du mouvement inchangée. Cela est assuré si l'action S est elle-même inchangée. De manière plus générale, nous pouvons autoriser l'addition d'un terme de surface à l'action car ce dernier n'affectera pas la dérivation des équations du mouvement. Ceci revient à dire que le lagrangien doit être invariant à une quadridivergence près[18]. Ainsi, par exemple, pour une transformation de symétrie infinitésimale[19] des champs ϕ_i

$$\phi_i(x) \to \phi_i'(x) = \phi_i(x) + \alpha\delta\phi_i(x) \tag{1.43}$$

où α est un paramètre infinitésimal et $\delta\phi_i(x)$ est une déformation du champ $\phi_i(x)$, on aura

$$\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(x) + \alpha\partial_\mu \mathcal{J}^\mu(x) \tag{1.44}$$

où $\mathcal{J}^\mu$ est un quadrivecteur quelconque.

1.5.2 Théorème de Noether

Nous avons supputé et même quelque peu montré dans les sections précédentes qu'il existe un lien entre symétries et lois de conservation. C'est grâce à la mathématicienne Emmy Noether que ce lien a pu être clairement établi. Elle a démontré, en 1928, un théorème stipulant qu'à chaque symétrie continue d'un système, on peut associer une loi de conservation. Ce théorème est un véritable pain béni pour les physiciens théoriciens. Ces derniers tentent de construire des modèles du système qu'ils étudient. La question à se poser alors est : “Comment tenir compte des lois de conservation ?”. Réponse : “Simplement en construisant un lagrangien qui possède les bonnes symétries !”.

Démontrons maintenant ce fameux théorème. En supposant que la dérivée partielle commute avec la déformation, on peut écrire la variation du lagrangien $\delta\mathcal{L}$

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}\,\alpha\delta\phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\,\alpha\delta(\partial_\mu\phi_i) \\
&= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}\,\alpha\delta\phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\,\partial_\mu(\alpha\delta\phi_i) \\
&= \alpha\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\,\delta\phi_i\right) + \alpha\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\right)\right]\delta\phi_i \\
&= \alpha\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\,\delta\phi_i\right)
\end{aligned}$$

18. Cette condition est obtenue grâce à l'équivalent du théorème d'Ostrogradsky ou formule du flux dans l'espace de Minkowski.

19. Lie a montré que l'étude des transformations de symétrie continue finies se ramène à celle des transformations de symétrie infinitésimales.

vu (1.42). D'autre part, on tire de (1.44)

$$\delta\mathcal{L} = \alpha\partial_\mu\mathcal{J}^\mu.$$

On en arrive finalement à l'expression

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{1.45}$$

en prenant

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\,\delta\phi_i - \mathcal{J}^\mu. \tag{1.46}$$

Il s'agit exactement de l'expression d'un courant conservé en relativité. Nous avons ainsi obtenu la loi de conservation associée à la transformation de symétrie infinitésimale (1.43). La charge Q est définie comme suit :

$$Q \equiv \int_{V_\infty} j^0\,\mathrm{d}^3x. \tag{1.47}$$

Cette charge Q est conservée dans le temps à cause de (1.45)

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dt} &= \int_{V_\infty} \partial_0 j^0\,\mathrm{d}^3x \\ &= -\int_{V_\infty} \partial_i j^i\,\mathrm{d}^3x \\ &= -\int_{S_\infty} n_i j^i\,\mathrm{d}S \\ &= 0\end{aligned}$$

où n_i est la normale à la surface au point considéré[20] et $\mathrm{d}S$ l'élément de surface.

Illustrons ce théorème par un petit exemple. Considérons le lagrangien de Klein-Gordon pour un champ ϕ complexe

$$\mathcal{L}_{KG} = |\partial_\mu\phi|^2 - m^2|\phi|^2 = (\partial^\mu\phi)^*(\partial_\mu\phi) - m^2\phi^*\phi. \tag{1.48}$$

Nous voyons immédiatement que ce lagrangien est invariant sous la transformation

$$\phi \to e^{i\alpha}\phi, \tag{1.49}$$

qui n'est rien d'autre qu'un changement de phase global. Comme

$$e^{i\alpha} = 1 + i\alpha + \mathcal{O}(\alpha^2), \tag{1.50}$$

on trouve les déformations[21]

$$\alpha\delta\phi = i\alpha\phi \qquad \textit{et} \qquad \alpha\delta\phi^* = -i\alpha\phi^*$$

et donc, à partir de (1.46), on a

$$j^\mu = i[(\partial^\mu\phi^*)\phi - \phi^*(\partial^\mu\phi)] \tag{1.51}$$

20. Cet abus de langage ne gêne pas les physiciens habitués. On considère en réalité une boule de rayon R comme domaine d'intégration. On passe ensuite à la limite $R \to \infty$.

21. On traite ϕ et ϕ^* comme des champs différents. Nous aurions pu également travailler avec la partie réelle et la partie imaginaire du champ.

où on prend tout naturellement pour quadrivecteur $\mathcal{J}^\mu$ de quadridivergence nulle, le quadrivecteur nul.

Regardons aussi ce qui se passe pour une symétrie interne continue quelconque car ceci nous servira par la suite. Nous avons vu que certaines lois de conservation n'étaient pas due aux symétries de l'espace-temps mais aux symétries liées aux degrés de liberté internes[22] comme, par exemple, l'isospin. Par conséquent, il faut autoriser un mélange des champs sous une transformation d'une telle symétrie

$$\phi_i(x) \to \phi_i'(x) = e^{-i\alpha q_{ij}}\phi_j(x) \tag{1.52}$$

où α est encore un paramètre infinitésimal et q_{ij} une collection de nombres complexes fixes. On trouve donc directement que la déformation des champs au premier ordre vaut

$$\delta\phi_i(x) = -i\alpha q_{ij}\phi_j(x). \tag{1.53}$$

Le courant conservé (1.46) s'écrit donc

$$j^\mu = -i\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi_i\right)}\,q_{ij}\phi_j. \tag{1.54}$$

La charge conservée, elle, s'écrit

$$Q = -i\int \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0\phi_i\right)}\,q_{ij}\phi_j \mathrm{d}^3x. \tag{1.55}$$

La nature physique de ces charges et de ces courants peut être déterminée grâce aux couplages du système avec les champs externes.

Einstein était fasciné par le résultat obtenu par Emmy Noether. Pour lui, ce théorème constituait la plus grande idée mathématique du siècle. Encore de nos jours, beaucoup de physiciens considèrent le théorème de Noether comme le plus grand théorème de la physique tant ce dernier est pratique et puissant. En fait, il est encore plus que ça, il est aussi beau. La beauté en physique, c'est de pouvoir relier simplement des choses qui ne semblent pas avoir *a priori* de lien évident. Si vous demandez à une personne qui n'est pas physicienne de formation, elle ne verra aucun lien logique entre le concept de symétrie et le concept de loi de conservation. Ce sont apparemment deux idées bien distinctes. Et c'est là que le théorème de Noether révèle toute sa beauté car il lie ces deux concepts de manière intime.

Avant de clore ce premier chapitre, vérifions qu'après quantification les charges de Noether $\widehat{Q}$ restent des quantités conservées. Supposons que $\widehat{Q}$ soit l'opérateur associé à la charge de Noether classique. Nous avons montré dans la section 1.3.1 la loi de conservation en mécanique quantique

$$[\widehat{H},\widehat{Q}] = 0, \tag{1.56}$$

qui implique que le hamiltonien $\widehat{H}$ est invariant sous la transformation unitaire

$$\widehat{H} \to \widehat{H}' = e^{i\alpha\widehat{Q}}\widehat{H}e^{-i\alpha\widehat{Q}}. \tag{1.57}$$

Si le hamiltonien classique d'un système physique est invariant sous une transformation $U(1)$ de certains de ses champs, l'invariance de $\widehat{H}$ est assurée si les opérateurs de ces champs se transforment de la manière suivante

$$\widehat{\phi} \to \widehat{\phi}' = e^{i\alpha\widehat{Q}}\,\widehat{\phi}\,e^{-i\alpha\widehat{Q}} = e^{-i\alpha q}\widehat{\phi} \tag{1.58}$$

22. L'existence de degrés de liberté implique une description par des champs à plusieurs composantes. Ainsi, le spineur de Dirac ψ possède 4 champs pour décrire la matière et l'antimatière avec un spin "up" ou spin "down".

et comme nous savons que

$$e^{\lambda\widehat{A}}\widehat{B}e^{-\lambda\widehat{A}} = \widehat{B} + \frac{\lambda}{1!}\,[\widehat{A},\widehat{B}] + \frac{\lambda^2}{2!}\,[\widehat{A},[\widehat{A},\widehat{B}]] + \dots \tag{1.59}$$

on trouve immédiatement par identification des coefficients de α au premier ordre

$$[\widehat{Q},\widehat{\phi}] = -q\widehat{\phi}. \tag{1.60}$$

Cette dernière relation montre que la condition (1.58) implique que q doit être une valeur propre de $\widehat{Q}$. En effet, en appliquant (1.60) au vide[23], on tire

$$\widehat{Q}\widehat{\phi}\,|0\rangle = \widehat{\phi}\widehat{Q}\,|0\rangle - q\widehat{\phi}\,|0\rangle$$

et vu qu'on suppose que le vide n'est pas chargé, c'est-à-dire que $\widehat{Q}\,|0\rangle = 0$, on trouve

$$\widehat{Q}\widehat{\phi}\,|0\rangle = -q\widehat{\phi}\,|0\rangle \tag{1.61}$$

comme annoncé. La quantification du champ nous dit que $\widehat{\phi}\,|0\rangle$ est un état à une antiparticule. Ceci est la raison du signe $-$ devant q vu que particules et antiparticules possèdent des charges de signes opposés. La relation (1.61) nous certifie que la charge de Noether est aussi conservée dans une théorie quantifiée si le paramètre q apparaissant dans la charge classique est une valeur propre de l'opérateur de charge $\widehat{Q}$. Enfin, pour la plupart des théorie pertinentes, il est vrai que les symétries classiques sont aussi des symétries de la théorie quantifiée.

23. En mécanique quantique, l'étude de l'oscillateur harmonique à une dimension nous a conduit à écrire $|n\rangle$, qui désignait l'état à n quanta de vibration. L'énergie de cet état vaut $\left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$. L'état fondamental, celui de plus basse énergie est donc $|0\rangle$. Enfin, il est possible de passer d'un état à l'autre grâce aux opérateurs d'échelle. L'opérateur de création $\widehat{a}^\dagger$ crée un quantum de vibration tandis que l'opérateur d'annihilation $\widehat{a}$ en détruit un.

La situation est analogue en théorie des champs. Les quanta de vibration sont ici interprétés comme étant des particules. L'état fondamental $|0\rangle$ est l'état à zéro particule. Les opérateurs de champ $\widehat{\phi}$ et $\widehat{\phi}^\dagger$ détruisent (créent) et créent (détruisent) respectivement une particule (antiparticule) ϕ.

Chapitre 2

Brisures spontanées de symétrie

Nous pouvons à présent en venir au coeur du sujet de ce mémoire. Jusqu'à présent, nous avons vu que les symétries, fort pratiques aux débuts de la physique, sont devenues progressivement indispensables au cours de l'histoire. Suite au théorème de Noether, nous sommes en droit de penser que nous sommes arrivés à en faire le tour. Et pourtant, il n'en est rien. La symétrie surprend à nouveau : il est possible de générer spontanément une masse pour des particules à condition de briser une symétrie [8] !

2.1 Qu'est-ce qu'une brisure spontanée de symétrie ?

Il est préférable de présenter, dès le départ, une image claire de la brisure spontanée de symétrie avant d'en donner une définition abstraite. Prenons, par exemple, un aimant dont la température T est inférieure à la température de Curie T_C. Les équations et le lagrangien décrivant le champ magnétique sont invariants si on fait subir une rotation au système (voie active) ou, de manière équivalente, si nous passons à un nouveau système de coordonnées relié à l'ancien par une rotation (voie passive). En gros, un aimant est une collection de petits dipôles magnétiques interagissant entre eux. Du point de vue énergétique, l'état le plus favorable est celui où tous ces petits dipôles sont alignés et pointent dans la même direction. Il s'agit de l'état fondamental. Comme tous les petits dipôles sont alignés, il apparaît tout naturellement une direction particulière et l'état fondamental n'est pas invariant sous n'importe quelle rotation. Voilà ce qu'on appelle une brisure spontanée de symétrie. Il s'agit d'une brisure de symétrie vu que l'état fondamental n'exhibe pas les mêmes symétries que le lagrangien. De plus, cette brisure est spontanée car un système tend naturellement, spontanément à évoluer vers son état fondamental. Dans le cas de l'aimant, le lagrangien possède une symétrie sphérique tandis que l'état fondamental n'exhibe, lui, qu'une symétrie cylindrique. Prenons un autre exemple. Posons un bâton cylindrique debout sur le sol. Appuyons de manière verticale sur le dessus du bâton. A partir d'une certaine force, il va se produire un phénomène de flambage, le bâton va se courber d'un côté[1]. De nouveau, la symétrie (cylindrique ici) du problème ne se retrouve pas dans l'état fondamental.

Suite à ces deux exemples illustratifs, nous sommes prêts à définir le concept de brisure spontanée de symétrie de façon générale. On dira qu'une symétrie est *spontanément brisée* si

1. Il semblerait à titre anecdotique que la Nature suive la morale de la fable du chêne et du roseau : "Je plie, et ne romps pas". Une symétrie est parfois sacrifiée afin de stabiliser le système. Remarquons encore que cette idée est pleine de sens philosophique. La symétrie n'implique pas forcément la stabilité comme on le croit souvent.

le lagrangien d'un système est invariant sous cette symétrie alors que l'état fondamental ne l'est pas. On dit aussi parfois que la symétrie est *cachée*.

La brisure spontanée de symétrie joue un rôle très important en théorie quantique des champs. C'est grâce à ce mécanisme qu'il a été possible de regrouper la description des interactions faibles avec la description des interactions électromagnétiques pour former la théorie électrofaible. Cette théorie édifiée par Glashow, Salam et Weinberg est un incroyable succès, un premier pas vers le rêve ultime de beaucoup de physiciens : une description unifiée de toutes les interactions. Dans cette théorie, il n'existerait qu'une seule interaction entre les particules. Le fait qu'il y ait quatre interactions fondamentales dans notre monde viendrait de plusieurs brisures spontanées de symétrie. A ce jour, seule la théorie électrofaible semble au point [2]. La synthèse de la théorie électrofaible avec la chromodynamique quantique n'est pas encore totalement achevée tandis que la gravitation résiste toujours à toute unification avec les autres forces.

2.2 Théorème de Goldstone

A partir de maintenant, par facilité d'écriture, nous omettrons l'accent circonflexe sur les opérateurs quand le contexte sera suffisamment clair. Rappelons-nous que lorsqu'un lagrangien est invariant sous une certaine symétrie continue, nous obtenons automatiquement une charge conservée. Ainsi, si le vide possède la même symétrie, on a

$$e^{-i\alpha Q}\left|0\right\rangle = \left|0\right\rangle \tag{2.1}$$

où Q est un générateur du groupe de symétrie en question. En développant l'exponentielle, on voit que ceci impose

$$Q\left|0\right\rangle = 0. \tag{2.2}$$

L'usage veut qu'on appelle une telle réalisation de la symétrie le *mode de Wigner*. Comme d'habitude, le vide $\left|0\right\rangle$ est défini comme étant l'état tel que $\left\langle 0\right| H \left|0\right\rangle$ soit minimum.

Mais il se peut fort bien que le vide ne soit pas invariant sous une symétrie du lagrangien $\mathcal{L}$. Revenons au cas de l'aimant. Nous avions dit que l'état fondamental privilégiait une direction. En réalité, il n'existe pas *un* état fondamental, mais *plusieurs* et, dans ce cas, même une infinité puisqu'il existe une infinité de direction. Comme le hamiltonien de l'aimant est invariant par rotation, tous ces états possèdent la même énergie, ils sont donc dégénérés. Si le système est fini, il est possible de passer par effet tunnel d'un état à l'autre si bien que l'état fondamental de l'aimant est une superposition linéaire de ces états. Par contre, si le système est infini, l'effet tunnel ne peut avoir lieu vu que la barrière de potentiel devient infiniment grande. Les différents états fondamentaux et leurs états excités se découplent complètement et forment alors des espaces d'Hilbert différents. La situation est identique en théorie quantique des champs. Si le vide n'est pas invariant sous une transformation de symétrie induite par le générateur Q

$$e^{-i\alpha Q}\left|0\right\rangle \neq \left|0\right\rangle, \tag{2.3}$$

alors un nouvel état est obtenu et possède la même énergie que notre vide de départ vu que Q commute avec le hamiltonien. On a de nouveau plusieurs états fondamentaux dégénérés. Dans ce cas-ci, on dira que la réalisation de la symétrie se fait dans le *mode de Goldstone*. Dans ce mode, les charges associées à la symétrie brisée n'annihilent pas le vide

$$Q\left|0\right\rangle \neq 0. \tag{2.4}$$

2. La théorie ne prédit cependant pas la valeur de l'angle de Weinberg θ_W.

Venons-en à un théorème-clé de la brisure spontanée de symétrie. Il s'agit du théorème de Goldstone qui montre que chaque brisure spontanée d'une symétrie continue du lagrangien implique l'existence d'une particule sans masse. C'est Nambu [9],[10] qui, en 1960, a initié l'étude de cette connexion, suivi plus tard par Jona-Lasinio [11], Goldstone [12] et d'autres [13] en 1961. De nombreuses preuves plus ou moins rigoureuses de ce théorème ont été fournies. Ce mémoire en rappellera deux : l'une formelle, l'autre plus imagée.

Commençons par la preuve formelle. Nous avons vu dans le chapitre précédent que pour chaque symétrie continue d'un lagrangien, il existe un courant conservé (1.46) ainsi qu'une charge conservée (1.47). Supposons que le vide ne soit pas invariant sous cette transformation de symétrie. Nous faisons face cependant à une première difficulté car la norme du nouvel état $Q\left|0\right\rangle$ est infinie

$$\left\langle 0\right| QQ \left|0\right\rangle = \int \mathrm{d}^3x \left\langle 0\right| j_0(x) Q \left|0\right\rangle = \int \mathrm{d}^3x \left\langle 0\right| j_0(0) Q \left|0\right\rangle = V_\infty, \tag{2.5}$$

due à l'intégration sur tout l'espace d'une constante différente de zéro. La deuxième égalité s'obtient par le fait que le vide est invariant par translation. Nous avons donc un opérateur Q qui n'est pas bien défini. Ceci n'est pas important en réalité car, dans les calculs, seul le commutateur de Q apparaît

$$\begin{aligned} \phi(y) \to \phi'(y) &= e^{i\alpha Q}\, \phi(y)\, e^{-i\alpha Q} \\ &= \phi(y) + i\alpha\, [Q,\phi(y)] + \ldots \end{aligned}$$

À partir de maintenant, on suppose que ce champ ϕ n'est pas invariant sous une transformation générée par la charge Q, autrement dit

$$\left\langle 0\right| [Q,\phi(y)] \left|0\right\rangle = \int \mathrm{d}^3x \left\langle 0\right| [j_0(x),\phi(y)] \left|0\right\rangle \neq 0. \tag{2.6}$$

Étant donné (1.45), on a

$$\partial^0\, [j_0(x),\phi(y)] = -\partial^i\, [j_i(x),\phi(y)]\,, \tag{2.7}$$

puis on intègre sur l'espace sa valeur moyenne au vide

$$\partial^0 \int \mathrm{d}^3x \left\langle 0\right| [j_0(x),\phi(y)] \left|0\right\rangle = -\int \mathrm{d}^3x \left\langle 0\right| [\nabla\cdot\mathbf{j}(x),\phi(y)] \left|0\right\rangle \tag{2.8}$$

et par le théorème d'Ostrogradsky

$$\partial^0 \int \mathrm{d}^3x \left\langle 0\right| [j_0(x),\phi(y)] \left|0\right\rangle = -\int \mathrm{d}\mathbf{S}\cdot \left\langle 0\right| [\mathbf{j}(x),\phi(y)] \left|0\right\rangle = 0 \tag{2.9}$$

vu que $\mathbf{j}(x)$ et $\phi(y)$ sont des opérateurs locaux et que la distance entre deux points x et y de la surface devient infiniment grande lorsqu'on étend l'intégrale sur le volume à tout l'espace. D'autre part, en explicitant le commutateur et en insérant un ensemble complet d'états $\left|n\right\rangle$ entre les opérateurs, on peut écrire

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}^3x \left\langle 0\right| [j_0(x),\phi(y)] \left|0\right\rangle &= \int \mathrm{d}^3x \left\langle 0\right| j_0(x)\phi(y) \left|0\right\rangle - \left\langle 0\right| \phi(y) j_0(x) \left|0\right\rangle \\ &= \int \mathrm{d}^3x \sum_n \big[\left\langle 0\right| j_0(x) \left|n\right\rangle \left\langle n\right| \phi(y) \left|0\right\rangle \\ &\qquad - \left\langle 0\right| \phi(y) \left|n\right\rangle \left\langle n\right| j_0(x) \left|0\right\rangle\big]\,. \end{aligned} \tag{2.10}$$

En utilisant la relation

$$\langle 0|\, j_\mu(x)\, |n\rangle = \langle 0|\, j_\mu(0)\, |n\rangle\, e^{-ip_n\cdot x} \tag{2.11}$$

où p_n est la quadri-impulsion de l'état $|n\rangle$, on obtient

$$\int \mathrm{d}^3x \sum_n \left[\langle 0|\, j_0(0)\, |n\rangle \langle n|\, \phi(y)\, |0\rangle\, e^{-ip_n\cdot x} - \langle 0|\, \phi(y)\, |n\rangle \langle n\, |j_0(0)|\, 0\rangle\, e^{ip_n\cdot x}\right]. \tag{2.12}$$

Il suffit maintenant d'intégrer pour obtenir

$$(2\pi)^3 \sum_n \delta^{(3)}(\mathbf{p}_n) \left[\langle 0|\, j_0(0)\, |n\rangle \langle n|\, \phi(y)\, |0\rangle\, e^{-iE_nx_0} - \langle 0|\, \phi(y)\, |n\rangle \langle n|\, j_0(0)\, |0\rangle\, e^{iE_nx_0}\right]. \tag{2.13}$$

Remarquons que la "fonction" de Dirac $\delta^{(3)}(\mathbf{p}_n)$ limite les états $|n\rangle$ à seulement ceux dont la quantité de mouvement est nulle, il s'ensuit

$$E_n = \sqrt{\mathbf{p}_n^2 + m_n^2} \quad \Rightarrow \quad E_n = m_n. \tag{2.14}$$

Donc (2.13) semble dépendre du temps. En réalité, vu (2.9), cela ne se peut. Par conséquent, il ne faut pas que le temps apparaisse. Pour les états massifs, il faut par conséquent que

$$\langle 0|\, j_0(x)\, |n\rangle = 0. \tag{2.15}$$

Cependant, vu qu'on a supposé que le champ $\phi(y)$ n'était pas invariant sous une transformation de symétrie générée par la charge Q, ce qui revenait à la condition (2.6), on a aussi

$$(2\pi)^3 \sum_n \delta^{(3)}(\mathbf{p}_n) \left[\langle 0|\, j_0(0)\, |n\rangle \langle n|\, \phi(y)\, |0\rangle\, e^{-iE_nx_0} - \langle 0|\, \phi(y)\, |n\rangle \langle n|\, j_0(0)\, |0\rangle\, e^{iE_nx_0}\right] \neq 0. \tag{2.16}$$

Il doit donc exister au moins un état dans la somme n'ayant pas de masse. L'existence d'un tel état entraîne

$$\langle 0|\, j_0(x)\, |n\rangle \langle n|\, \phi(y)\, |0\rangle \neq 0, \tag{2.17}$$

ce qui prouve le théorème de Goldstone. L'existence d'une valeur moyenne au vide non nulle d'un générateur d'un groupe de symétrie implique l'existence de particules sans masse. Ces particules possèdent les mêmes nombres quantiques que le générateur brisé. En effet, pour que $\langle 0|\, j_0(x)\, |n\rangle \neq 0$, il faut que les nombres quantiques de l'état $|n\rangle$ correspondent à ceux de l'état $j_0(x)\, |0\rangle$. En outre, ces particules sont des particules scalaires, c'est-à-dire des bosons de spin 0. Ceci vient de notre hypothèse (2.6) qui peut se réécrire

$$\langle 0|\, Q\phi(y)\, |0\rangle - \langle 0|\, \phi(y)Q\, |0\rangle \neq 0. \tag{2.18}$$

Comme la charge conservée Q est un scalaire (voir annexe A), il faut absolument que $\phi(y)$ soit un champ scalaire pour que $\langle 0|\, Q\phi(y)\, |0\rangle \neq 0$.

Les bosons qui apparaissent naturellement lors d'une brisure spontanée de symétrie continue sont appelés bosons de Nambu-Goldstone ou parfois simplement bosons de Goldstone. Pour une question de facilité dactylographique, nous utiliserons l'abréviation BNG.

Passons à la seconde démonstration. Il s'agit d'une démonstration générale du théorème de Goldstone pour des champs scalaires classiques. Il est ainsi plus facile de "voir" ce qui se passe dans ce mécanisme. Considérons une théorie faisant intervenir des champs scalaires classiques $\phi_i(x)$ dans un lagrangien de la forme

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{cin} - V(\phi). \tag{2.19}$$

Comme le vide est invariant par translation, il faut que les champs décrivant l'état fondamental soient constants. Appelons-les $\phi_{0,i}$. Par définition, l'état fondamental est celui qui minimise l'énergie et donc le hamiltonien. Le terme d'énergie cinétique est nul dans l'état fondamental car il demande de dériver un champ constant. Il faut donc trouver les champs constants $\phi_{0,i}$ qui minimisent le potentiel V, c'est-à-dire tels que

$$\frac{\partial}{\partial \phi_i} V \bigg|_{\phi_i(x)=\phi_{0,i}} = 0. \tag{2.20}$$

Développons d'abord le potentiel V autour du minimum, on trouve ainsi

$$V(\phi) = V(\phi_0) + \frac{1}{2}(\phi - \phi_0)_i (\phi - \phi_0)_j \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi_i \partial \phi_j} V\right)_{\phi_0} + \dots \tag{2.21}$$

où le terme linéaire est évidemment nul vu que les champs $\phi_{0,i}$ minimisent le potentiel. On redéfinit ensuite les champs comme suit :

$$h_i(x) = \phi_i(x) - \phi_{0,i} \tag{2.22}$$

et on appelle le coefficient du terme quadratique en h

$$m_{ij}^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi_i \partial \phi_j} V\right)_{\phi_0}, \tag{2.23}$$

qui est une matrice symétrique vu que les dérivées partielles pour des champs classiques commutent. Comme à l'accoutumée, les valeurs propres de cette matrice seront interprétées comme étant les masses des particules[3]. Ces valeurs propres ne peuvent être négatives vu que nous avons défini $\phi_{0,i}$ comme étant un minimum.

Il suffit maintenant de montrer que chaque symétrie continue du lagrangien qui ne soit pas en même temps une symétrie de $\phi_{0,i}$ amène une valeur propre nulle. Considérons tout d'abord une transformation de symétrie infinitésimale des champs (1.43). Comme au vide les champs sont constants, le potentiel V seul doit être invariant sous cette transformation jusqu'au premier ordre inclus. Autrement dit, on a

$$\begin{aligned} V(\phi) &= V(\phi') \\ &= V(\phi) + \alpha \delta\phi_i \left(\frac{\partial V}{\partial \phi'_i}\right)_{\phi'=\phi} + \mathcal{O}(\alpha^2), \end{aligned} \tag{2.24}$$

ce qui impose

$$\delta\phi_i \left(\frac{\partial V}{\partial \phi'_i}\right)_{\phi'=\phi} = 0. \tag{2.25}$$

On dérive ensuite par rapport à ϕ'_j et on se place en $\phi' = \phi_0$

$$\left(\frac{\partial \delta\phi_i}{\partial \phi'_j}\right)_{\phi'=\phi_0} \left(\frac{\partial V}{\partial \phi'_i}\right)_{\phi'=\phi_0} + \delta\phi_{0,i} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi'_i \partial \phi'_j}\right)_{\phi'=\phi_0} = 0. \tag{2.26}$$

3. En physique théorique, il est courant d'avoir une erreur d'un facteur $\frac{1}{2}$ ou de π dans le résultat d'un calcul. Remarquons donc que pour un champ bosonique *réel*, le terme de masse est du type $-\frac{1}{2}m^2$, tandis que pour un champ bosonique *complexe* (comme dans (1.48)), le terme de masse ne possède pas le facteur $\frac{1}{2}$. Ceci vient de la normalisation des états. On peut toujours regrouper deux champs bosoniques réels ϕ_1 et ϕ_2 de même masse m en un champ complexe normalisé à l'unité $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$ également de masse m. On trouve effectivement que $-m^2\phi^*\phi = -\frac{1}{2}m^2\phi_1^2 - \frac{1}{2}m^2\phi_2^2$.

Le premier terme s'annule vu que l'expression est évaluée au minimum. Il reste donc

$$\delta\phi_{0,i}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\phi'_i\partial\phi'_j}\right)_{\phi'=\phi_0} = 0. \tag{2.27}$$

Deux cas peuvent alors se présenter :

1. $\delta\phi_{0,i} = 0$, ce qui revient à dire que le vide reste invariant vis-à-vis de cette symétrie;
2. $\delta\phi_{0,i} \neq 0$, ce qui signifie qu'on a affaire à une brisure spontanée de symétrie. Par conséquent, $\delta\phi_{0,i}$ sont les composantes d'un vecteur propre de valeur propre 0. Dans ce cas, un champ $h(x) = g(x)\delta\phi_0$, où $g(x)$ est un simple champ scalaire, possédera une masse nulle. Il s'agit du BNG. Ainsi, à chaque symétrie brisée, il correspond un BNG.

Le théorème est ainsi prouvé.

Avant de passer aux exemples, essayons de voir à quoi correspondent les BNG. Par définition, une symétrie brisée ne laisse pas le vide invariant. Dans l'espace des champs, les déformations infinitésimales du champ du vide se font dans des directions perpendiculaires à ce dernier. Par conséquent, les BNG sont des champs orthogonaux au vide. S'il est possible de représenter le potentiel du modèle, les modes massifs correspondront aux modes radiaux, ceux qui pointent dans la même direction que le vide. Les BNG correspondront aux modes pointant dans les directions brisées. Le second exemple montrera ce point clairement dans la suite.

2.3 Exemples de brisure spontanée de symétrie

Afin de voir en pratique comment fonctionne un mécanisme de brisure spontanée, nous développerons deux exemples explicitement. Le premier montrera qu'une brisure spontanée de symétrie peut aussi se produire pour une symétrie discrète. Il n'y aura cependant pas de BNG. Le second est connu sous le nom de modèle σ linéaire. Il s'agit d'une généralisation du premier exemple aux symétries continues. Nous y verrons apparaître les BNG comme nous l'assure le théorème de Goldstone que nous venons de démontrer.

2.3.1 Exemple 1 : Brisure spontanée d'une symétrie discrète

Considérons d'abord le lagrangien d'une théorie en ϕ^4 pour un champ classique réel

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4. \tag{2.28}$$

Ensuite, supprimons la factorielle et remplaçons le paramètre m^2 par μ^2 qui peut être aussi bien positif que négatif. Il ne faut donc pas le voir *a priori* comme la masse du champ ϕ.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4. \tag{2.29}$$

Ce lagrangien possède une symétrie discrète : il est invariant sous la transformation $\phi \to -\phi$.

L'état fondamental est décrit par le champ constant ϕ_0 qui minimise le potentiel

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4. \tag{2.30}$$

Nous trouvons rapidement

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\phi} &= 0 = \mu^2\phi + \lambda\phi^3 \\ &= \phi\left(\mu^2 + \lambda\phi^2\right). \end{aligned} \tag{2.31}$$

Deux cas se présentent suivant le signe de μ^2 :

Si $\mu^2 > 0$, alors seul

$$\phi_0 = 0 \tag{2.32}$$

est solution. Il s'agit bien d'un minimum[4] comme le montre la figure 2.1. De plus, vu que

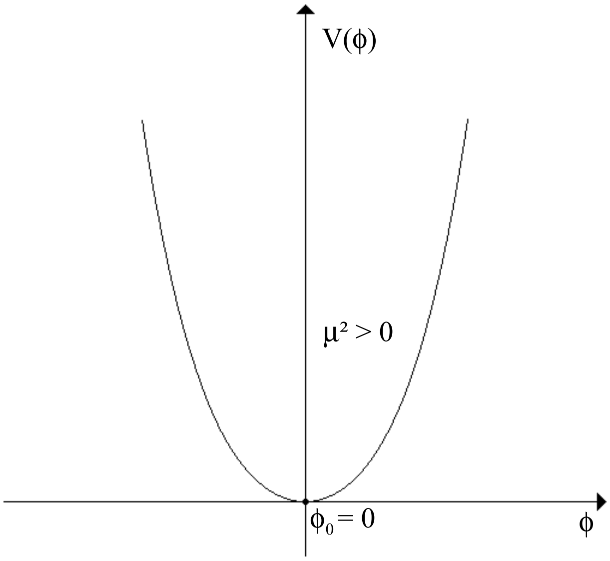


FIG. 2.1 – *Potentiel du champ scalaire au niveau arbre lorsque* $\mu^2 > 0$.

$\phi_0 = -\phi_0 = 0$, il n'y a pas de brisure spontanée de la symétrie discrète du lagrangien.

Sinon $\mu^2 < 0$, ce qui entraîne l'existence de solutions non nulles

$$\phi_0 = \pm\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} = \pm v. \tag{2.33}$$

Dans ce cas, $\phi(x) = 0$ n'est pas un minimum mais un maximum local. Par contre, $\pm v$ sont bien deux minima comme le montre la figure 2.2. De plus, ils ne sont pas invariants sous la transformation $\phi \to -\phi$, ce qui nous permet de dire que nous avons affaire à une brisure spontanée de symétrie. Cette transformation nous fait passer d'un minimum à l'autre.

Voyons comment nous pouvons interpréter cette théorie. En théorie quantique des champs, on part de l'état fondamental et on construit les autres états à partir de ce dernier. Supposons donc que le système se trouve aux alentours du minimum v. Il est plus pratique de définir un champ σ comme suit :

$$\phi(x) = v + \sigma(x) \tag{2.34}$$

4. On voit en effet directement que la dérivée seconde est positive.

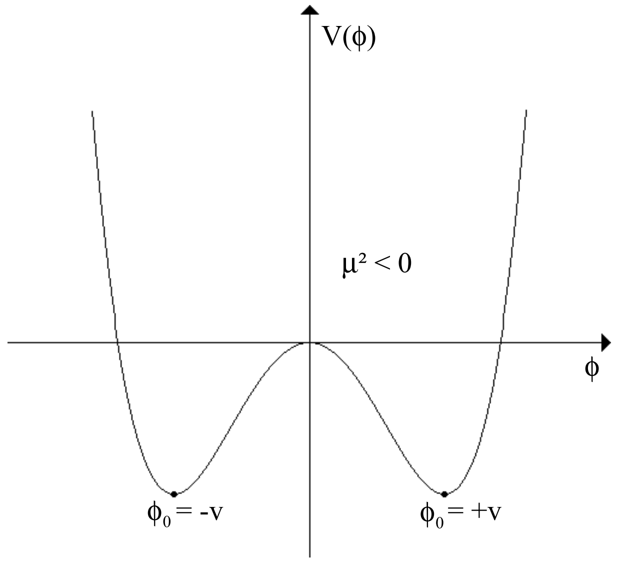


FIG. 2.2 – *Potentiel du champ scalaire au niveau arbre lorsque* $\mu^2 < 0$.

et de réécrire le lagrangien (2.29) en termes de ce champ. On trouve ainsi

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \sigma\right)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\left(v+\sigma\right)^2 - \frac{\lambda}{4}\left(v+\sigma\right)^4 \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \sigma\right)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\left(v^2+\sigma^2+2v\sigma\right) - \frac{\lambda}{4}\left(v^4+\sigma^4+6v^2\sigma^2+4v^3\sigma+4v\sigma^3\right) \end{aligned} \tag{2.35}$$

et comme $v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}$, il s'ensuit

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \sigma\right)^2 + \frac{\mu^4}{2\lambda} - \frac{1}{2}\mu^2\sigma^2 - \mu^2\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}\,\sigma - \frac{\mu^4}{4\lambda} - \frac{\lambda}{4}\sigma^4 \\ +\frac{3}{2}\mu^2\sigma^2 + \mu^2\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}\,\sigma - \sqrt{-\mu^2\lambda}\,\sigma^3. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Nous trouvons finalement après réduction des termes et en laissant tomber le terme constant

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \sigma\right)^2 - \frac{1}{2}\left(-2\mu^2\right)\sigma^2 - \sqrt{-\mu^2\lambda}\,\sigma^3 - \frac{\lambda}{4}\sigma^4. \tag{2.37}$$

Ce lagrangien décrit maintenant un champ scalaire σ de masse $\sqrt{-2\mu^2}$ ayant des interactions en σ^3 et en σ^4. La brisure spontanée de symétrie a donc permis de générer une masse pour le champ scalaire. Le prix à payer ici est un terme en σ^3 qui n'existait pas dans le lagrangien de départ (2.29). Vu qu'on a développé le champ autour d'un minimum, la symétrie $\phi \to -\phi$ n'est plus apparente. En fait, elle n'a pas vraiment disparu, elle se manifeste juste différemment. Elle impose une relation entre les trois coefficients des termes de masse et d'interaction qui ne dépendent que des deux seuls paramètres μ^2 et λ.

2.3.2 Exemple 2 : Modèle σ linéaire

Voyons ce qui se passe dans le cas d'une symétrie continue du lagrangien. L'exemple développé ici est le modèle σ linéaire. Le lagrangien de ce modèle fait intervenir N champs scalaires réels $\phi_i(x)$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi_i\right)^2 - \frac{1}{2}\mu^2 \phi_i^2 - \frac{\lambda}{4}\left(\phi_i^2\right)^2 . \tag{2.38}$$

Ce lagrangien est manifestement invariant sous n'importe quelle rotation (avec inversion possible) dans l'espace des champs de dimension N. Autrement dit, il est invariant sous la transformation

$$\phi_i \to \phi_i' = R_{ij}\phi_j \tag{2.39}$$

où R est une matrice orthogonale $N \times N$. Ces matrices forment la représentation fondamentale du groupe orthogonal de dimension N noté $O(N)$. C'est le groupe de symétrie de notre lagrangien.

Une fois de plus, nous allons rechercher les champs constants $\phi_{0,i}$ qui minimisent le potentiel

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2 \phi_i^2 + \frac{\lambda}{4}\left(\phi_i^2\right)^2 . \tag{2.40}$$

On se retrouve dans la même situation que dans l'exemple précédent sauf que nous avons affaire à N champs au lieu d'un seul. Comme les champs sont supposés indépendants, on a

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \phi_j} = \delta_{ij}. \tag{2.41}$$

De nouveau, deux cas se présentent suivant le signe de μ^2 :

Si $\mu^2 > 0$, alors seul

$$\phi_{0,i} = 0, \qquad \forall i \in \{1, \cdots, N\} \tag{2.42}$$

est solution. Il s'agit encore d'un minimum comme on peut le voir sur la figure 2.3 qui illustre

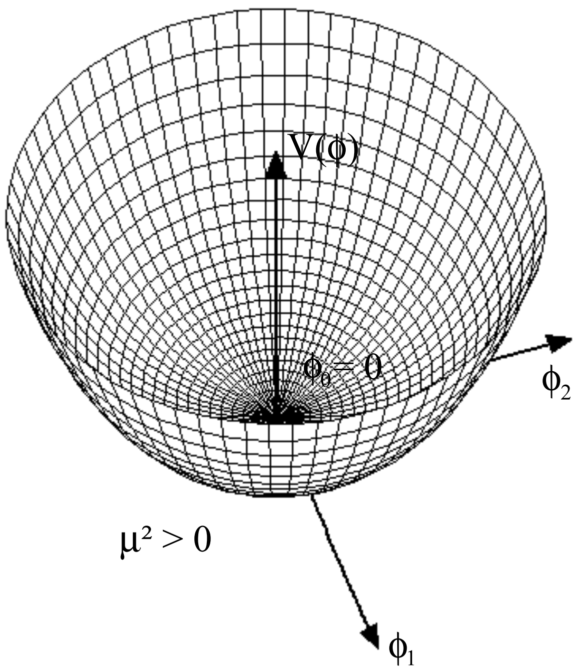


FIG. 2.3 – *Potentiel de deux champs scalaires au niveau arbre lorsque $\mu^2 > 0$.*

la situation où $N = 2$. L'état fondamental est invariant sous (2.39). Il n'y a donc pas brisure spontanée de symétrie.

Sinon $\mu^2 < 0$ et, en lorgnant sur l'exemple précédent, on s'aperçoit qu'il existe des solutions non nulles qui sont des minima, celles qui satisfont à

$$\phi_{0,i}^2 = \frac{-\mu^2}{\lambda}. \tag{2.43}$$

Cette condition impose la longueur du vecteur dans l'espace des champs de dimension N. Ainsi, quand $N = 2$, cette condition impose au vide de se trouver sur un cercle comme le montre la figure 2.4.

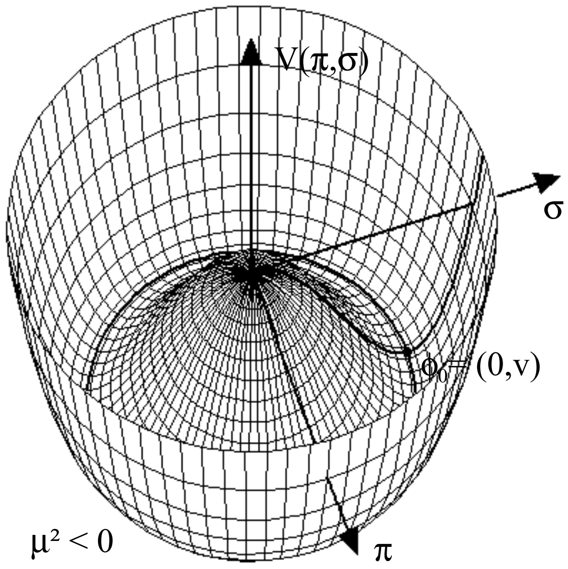


FIG. 2.4 – *Potentiel de deux champs scalaires au niveau arbre lorsque* $\mu^2 < 0$.

Nous pouvons à présent tenter d'interpréter cette théorie. Par convention, on choisit d'abord les champs de telle manière que le vide pointe dans la direction N, c'est-à-dire

$$\phi_0 = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{N-1}, v) \tag{2.44}$$

où $v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}$ comme dans l'exemple précédent. On peut alors définir les champs[5] σ et π_k pour $k = 1,2,\ldots,N-1$

$$\phi(x) = (\pi_1(x), \pi_2(x), \ldots, \pi_{N-1}(x), \sigma(x)) . \tag{2.45}$$

Nous pouvons réécrire le lagrangien (2.38) en fonction de ces champs π_k et de

$$\sigma(x) = v + \sigma'(x). \tag{2.46}$$

5. Cette notation vient du fait qu'une description des pions peut être faite à partir du modèle σ linéaire. Nous en discuterons dans le chapitre suivant consacré à la brisure de la symétrie chirale.

Il devient un peu plus fastidieux d'écrire le développement mais le calcul reste simple. Nous trouvons

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \pi_k\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \sigma'\right)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\left[\pi_k^2 + \left(v+\sigma'\right)^2\right] - \frac{\lambda}{4}\left[\pi_k^2 + \left(v+\sigma'\right)^2\right]^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \pi_k\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \sigma'\right)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\left(\pi_k^2 + v^2 + \sigma'^2 + 2v\sigma'\right) - \frac{\lambda}{4}\left(\pi_k^2 + v^2 + \sigma'^2 + 2v\sigma'\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \pi_k\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \sigma'\right)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\left(\pi_k^2 + v^2 + \sigma'^2 + 2v\sigma'\right) \\
&\quad -\frac{\lambda}{4}\left[\left(\pi_k^2\right)^2 + v^4 + \sigma'^4 + 6v^2\sigma'^2 + 2\pi_k^2 v^2 + 2\pi_k^2\sigma'^2 + 4\pi_k^2 v\sigma' + 4v^3\sigma' + 4v\sigma'^3\right]. \qquad (2.47)
\end{aligned}$$

Les termes faisant intervenir uniquement σ' et v sont les mêmes que dans l'exemple précédent. Ceci nous permet de nous occuper que des termes en π_k. Nous avons donc

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \pi_k\right)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\pi_k^2 - \frac{\lambda}{4}\left[\left(\pi_k^2\right)^2 + 2\pi_k^2 v^2 + 2\pi_k^2\sigma'^2 + 4\pi_k^2 v\sigma'\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \pi_k\right)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\pi_k^2 - \frac{\lambda}{4}\left(\pi_k^2\right)^2 + \frac{1}{2}\mu^2\pi_k^2 - \frac{\lambda}{2}\pi_k^2\sigma'^2 - \sqrt{-\mu^2\lambda}\,\pi_k^2\sigma'. \qquad (2.48)
\end{aligned}$$

Il ne suffit plus alors que de réduire les termes semblables et de rassembler les résultats tout en laissant tomber le terme constant pour obtenir finalement

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \pi_k\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \sigma'\right)^2 - \frac{1}{2}\left(-2\mu^2\right)\sigma'^2 - \sqrt{-\mu^2\lambda}\,\sigma'^3 - \sqrt{-\mu^2\lambda}\,\pi_k^2\sigma' \\
-\frac{\lambda}{4}\sigma'^4 - \frac{\lambda}{2}\pi_k^2\sigma'^2 - \frac{\lambda}{4}\left(\pi_k^2\right)^2. \qquad (2.49)
\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi un champ σ' massif comme dans l'exemple précédent mais avec en plus $N-1$ champs sans masse, les π_k. Ces derniers sont les BNG que le théorème de Goldstone annonce. Nous étions partis avec une symétrie $O(N)$ et nous arrivons finalement à un lagrangien ne possédant qu'une symétrie $O(N-1)$ (correspondant aux rotations des champs π_k). Au départ, nous avions donc $\frac{N(N-1)}{2}$ générateurs. À la fin nous n'en trouvons plus que $\frac{(N-1)(N-2)}{2}$. Par soustraction, nous trouvons directement le nombre de générateurs brisés $N-1$. Comme le théorème de Goldstone l'annonçait, nous avons trouvé autant de BNG que de générateurs brisés. De le figure 2.4, nous voyons que le champ massif σ' décrit les oscillations de ϕ dans la direction radiale pour laquelle le potentiel possède une dérivée seconde non nulle. Par contre, les champs sans masse π_k décrivent les oscillations dans les directions tangentielles, celles pour lesquelles la dérivée seconde du potentiel est nulle. Le prix à payer est de nouveau l'apparition de termes d'interaction en σ'^3 et en $\pi_k^2\sigma'$, autrement dit des interactions à trois champs. Les symétries brisées s'expriment d'une autre manière, en créant une relation entre les six coefficients des termes de masse et d'interaction qui ne dépendent en fait que des deux seuls paramètres μ^2 et λ.

Chapitre 3

Brisure de la symétrie chirale

Jusqu'à présent, nous n'avons parlé que de symétries exactes. Il se fait qu'il est souvent utile d'appliquer les considérations de symétrie à des situations où nous avons *presque* une symétrie. On dit aussi qu'on a affaire à une symétrie approchée. Qu'entendons-nous par là? Bien souvent un lagrangien posséderait une certaine symétrie si quelques-uns de ses paramètres valaient zéro. Dans cette limite, la symétrie impliquerait différentes conséquences physiques que nous n'aurions pu obtenir en-dehors. Cependant, si ces paramètres non nuls sont en quelque sorte "petits", les conséquences prédites restent approximativement valables. En fait, quand l'interaction qui brise la symétrie se transforme d'une manière bien définie sous cette dernière, il est souvent possible de déterminer ses effets en utilisant la base des états non perturbés. Le critère qui nous permet d'affirmer que les termes brisant la symétrie sont petits dépend du problème en question. En pratique, l'utilité d'une symétrie approchée est rarement connue *a priori*, ce n'est qu'en comparant ses prédictions avec l'expérience qu'elle devient évidente.

3.1 Symétrie chirale

Nous allons imaginer un monde où les leptons et les quarks ont tous une masse nulle. Ces fermions obéissent alors à l'équation de Dirac

$$\gamma_\mu \partial^\mu \psi = 0. \tag{3.1}$$

On peut multiplier cette équation à gauche par γ_5 et utiliser la propriété d'anticommutativité entre γ_5 et γ_μ pour obtenir

$$\gamma_\mu \partial^\mu \gamma_5 \psi = 0. \tag{3.2}$$

Donc, dans le cas des fermions sans masse, si ψ est solution de l'équation de Dirac, $\gamma_5\psi$ l'est de même. Toute combinaison linéaire de ces deux solutions est aussi solution vu la linéarité de (3.1). Introduisons les combinaisons

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi, \tag{3.3}$$

$$\psi_R = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi, \tag{3.4}$$

qui sont également vecteurs propres de γ_5

$$\gamma_5 \psi_L = -\psi_L, \tag{3.5}$$

$$\gamma_5 \psi_R = +\psi_R. \tag{3.6}$$

Étant donné que l'opérateur de chiralité γ_5 commute avec le hamiltonien de Dirac pour un fermion de masse nulle, si une telle particule se trouve dans un des états L ou R à un moment donné, elle y restera au cours de son mouvement. De plus, vu que les équations (3.5) et (3.6) sont invariantes sous une transformation de Lorentz propre (pas d'inversion spatiale), le caractère L ou R est indépendant du référentiel choisi.

Pour comprendre la signification physique de ce nouveau nombre quantique, considérons l'équation aux valeurs propres

$$(\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m) \begin{cases} u(p,s) \\ v(-p,s) \end{cases} = E_p \begin{cases} u(p,s) \\ -v(-p,s) \end{cases} \tag{3.7}$$

où pour rappel $\beta \alpha_i = \gamma_i$ et $\beta = \gamma_0$. Dans le cas $m = 0$, cette équation se réduit à

$$\alpha \cdot \mathbf{p} \begin{cases} u(p,s) \\ v(-p,s) \end{cases} = |\mathbf{p}| \begin{cases} u(p,s) \\ -v(-p,s) \end{cases} . \tag{3.8}$$

Nous allons montrer que cette équation aux valeurs propres de l'énergie est équivalente à l'équation aux valeurs propres d'hélicité. Pour ce faire, multiplions (3.8) à gauche par γ_5 et remarquons que

$$\gamma_5 \alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} = \mathbf{\Sigma}$$

pour enfin écrire

$$\frac{\mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \begin{cases} u(p,s) \\ v(-p,s) \end{cases} = \gamma_5 \begin{cases} u(p,s) \\ -v(-p,s) \end{cases} . \tag{3.9}$$

En comparant cette dernière équation avec l'équation aux valeurs propres d'hélicité

$$\frac{\mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \begin{cases} u(p,s) \\ v(-p,s) \end{cases} = 2s \begin{cases} u(p,s) \\ v(-p,s) \end{cases} , \tag{3.10}$$

on tire directement

$$\gamma_5 \, u(p,s) = +2s \; u(p,s), \tag{3.11}$$

$$\gamma_5 \, v(-p,s) = -2s \; v(-p,s). \tag{3.12}$$

Ceci montre que pour des particules de masse nulle, chiralité et hélicité coïncident (au facteur 2 près). Cette adéquation n'a plus lieu d'être lorsque $m \neq 0$. La raison physique à cela est qu'une particule massive peut toujours être vue depuis un référentiel allant plus vite qu'elle. Dans ce référentiel, la particule semble faire marche arrière, ce qui renverse le signe de l'hélicité[1]. L'hélicité n'est donc pas une quantité invariante de Lorentz en général.

Les appellations L (left-handed $\equiv$ lévogyre) et R (right-handed $\equiv$ dextrogyre) prennent désormais une signification claire. ψ_L décrit une particule dont le spin et l'impulsion sont antiparallèles tandis que ψ_R décrit une particule dont le spin et l'impulsion sont parallèles.

Il est assez simple d'inclure la chiralité dans le formalisme lagrangien. Le lagrangien pour un fermion de masse nulle sans interaction est

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma_\mu \partial^\mu \psi, \tag{3.13}$$

1. Pour rappel, l'hélicité est la projection du spin sur la direction de l'impulsion et est une constante du mouvement pour l'équation de Dirac.

qu'on peut réécrire en termes des champs chiraux

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_L + \mathcal{L}_R \tag{3.14}$$

avec

$$\mathcal{L}_{L,R} = i\bar{\psi}_{L,R}\gamma_\mu\partial^\mu\psi_{L,R}. \tag{3.15}$$

Ce lagrangien est invariant sous n'importe quelle transformation de phase chirale globale

$$\psi_{L,R} \to \psi'_{L,R} = e^{-i\alpha_{L,R}}\,\psi_{L,R}. \tag{3.16}$$

À cette symétrie sont associés les courants conservés (au facteur i près)

$$j^\mu_{L,R} = \bar{\psi}_{L,R}\gamma^\mu\psi_{L,R}. \tag{3.17}$$

De ces courants, on peut construire les courants vectoriel et axial qui sont également conservés

$$V^\mu = j^\mu_R + j^\mu_L, \tag{3.18}$$
$$A^\mu = j^\mu_R - j^\mu_L. \tag{3.19}$$

Ces derniers s'expriment facilement en termes de ψ

$$\begin{aligned} V_\mu &= \frac{1}{2}\psi^\dagger\left(1+\gamma_5\right)\gamma_0\gamma_\mu\frac{1}{2}\left(1+\gamma_5\right)\psi + \frac{1}{2}\psi^\dagger\left(1-\gamma_5\right)\gamma_0\gamma_\mu\frac{1}{2}\left(1-\gamma_5\right)\psi \\ &= \frac{1}{2}\bar{\psi}\left(1+\gamma_5^2\right)\gamma_\mu\psi \\ &= \bar{\psi}\gamma_\mu\psi, \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$A_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi. \tag{3.21}$$

et sont associés aux symétries du lagrangien

$$\psi \to \psi' = e^{-i\varepsilon}\,\psi \qquad \text{et} \qquad \psi \to \psi' = e^{-i\eta\gamma_5}\,\psi. \tag{3.22}$$

La première symétrie est évidente. Pour la seconde, il suffit de considérer une transformation infinitésimale. Dans ce cas, nous obtenons

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi \quad \to \quad & i\bar{\psi}'\gamma_\mu\partial^\mu\psi' \\ &= i\psi^\dagger\left(1+i\eta\gamma_5\right)\gamma_0\gamma_\mu\partial^\mu\left(1-i\eta\gamma_5\right)\psi \\ &= i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi + \mathcal{O}(\eta^2). \end{aligned}$$

ce qui montre qu'il s'agit effectivement d'une symétrie du lagrangien vu qu'il n'y a pas de déformation d'ordre 1 de ce dernier.

3.2 Retour au modèle σ linéaire

Le modèle σ permet d'exhiber deux symétries importantes des interactions fortes : la symétrie chirale et $SU(2)$. Il sert souvent d'exemple pour la brisure spontanée de symétrie aussi bien en physique des particules qu'en physique nucléaire.

Nous allons étudier le modèle σ linéaire $SU(2)_L \times SU(2)_R$. Le lagrangien est construit à l'aide d'un isotriplet de pions $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$, d'un champ isoscalaire σ et d'un isodoublet de nucléons $N = (p, n)$

$$\mathcal{L} = \bar{N} i\gamma^\mu \partial_\mu N + \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu \sigma)^2 + (\partial_\mu \boldsymbol{\pi})^2\right] - g\bar{N}\left(\sigma + i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}\gamma_5\right)N - V\left(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2\right) \tag{3.23}$$

où

$$V\left(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2\right) = \frac{1}{2}\mu^2\left(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2\right) + \frac{\lambda}{4}\left(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2\right)^2. \tag{3.24}$$

Le terme d'interaction entre les mésons et les nucléons contient un facteur γ_5 pour assurer le caractère scalaire du lagrangien [2].

3.2.1 Invariances du lagrangien

Nous allons vérifier que ce lagrangien possède bien la symétrie $SU(2)_L \times SU(2)_R$. Pour ce faire, il faut d'abord connaître les lois de transformation des champs qui y apparaissent.

Pour l'isodoublet, les lois de transformation vectorielle et axiale se devinent facilement

$$N \to N' = e^{-i\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}} N \qquad \text{et} \qquad N \to N' = e^{-i\boldsymbol{\eta}\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\gamma_5} N, \tag{3.25}$$

que nous pouvons combiner pour donner

$$N \to N' = e^{-i(\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\eta}\gamma_5)\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}} N. \tag{3.26}$$

L'algèbre s'obtient également de manière triviale

$$\begin{aligned}
[\tau_V^k, \tau_V^l] &= i\epsilon^{klm}\tau_V^m, \\
[\tau_A^k, \tau_A^l] &= i\epsilon^{klm}\tau_V^m, \\
[\tau_V^k, \tau_A^l] &= i\epsilon^{klm}\tau_A^m,
\end{aligned} \tag{3.27}$$

où naturellement $\tau_V^k = \frac{\tau^k}{2}$ et $\tau_A^k = \frac{\tau^k}{2}\gamma_5$. En choisissant pour générateurs les combinaisons linéaires

$$\tau_L^k = \frac{1}{2}(\tau_V^k - \tau_A^k), \tag{3.28}$$

$$\tau_R^k = \frac{1}{2}(\tau_V^k + \tau_A^k), \tag{3.29}$$

l'algèbre se découple

$$\begin{aligned}
[\tau_L^k, \tau_L^l] &= i\epsilon^{klm}\tau_L^m, \\
[\tau_R^k, \tau_R^l] &= i\epsilon^{klm}\tau_R^m, \\
[\tau_L^k, \tau_R^l] &= 0.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

La symétrie combinée est donc $SU(2)_L \times SU(2)_R$. Réécrivons la transformation (3.26) à l'aide de ces derniers générateurs. Nous obtenons

$$N' = e^{-i[(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\eta})\cdot\boldsymbol{\tau}_L + (\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\eta})\cdot\boldsymbol{\tau}_R]} N \tag{3.31}$$

2. Les pions observés expérimentalement sont des particules pseudoscalaires.

avec, plus explicitement,

$$\boldsymbol{\tau}_L = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{\tau}_R = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}. \tag{3.32}$$

Remarquons que $\frac{1}{2}(1-\gamma_5)$ et $\frac{1}{2}(1+\gamma_5)$ sont les projecteurs respectivement sur la partie gauche et la partie droite de N. En effet, nous avons

$$\frac{1}{2}(1-\gamma_5)N = N_L \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2}(1+\gamma_5)N = N_R$$

par les définitions (3.3) et (3.4) ainsi que

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\right]^2 &= \frac{1}{4}(1-2\gamma_5+\gamma_5^2) = \frac{1}{2}(1-\gamma_5),\\
\left[\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\right]^2 &= \frac{1}{4}(1+2\gamma_5+\gamma_5^2) = \frac{1}{2}(1+\gamma_5),
\end{aligned}$$

ce qui suffit pour répondre à la définition d'un projecteur. Nous pouvons donc tirer les transformations pour la partie gauche et la partie droite de N

$$N_{L,R} \to N'_{L,R} = e^{-i(\boldsymbol{\varepsilon}\mp\boldsymbol{\eta})\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}} N_{L,R} = U_{L,R}N_{L,R}. \tag{3.33}$$

Pour trouver les lois de transformation des mésons du modèle, considérons une matrice d'isospin 2×2 de la forme

$$W = N_L N_R^\dagger. \tag{3.34}$$

Vu la forme donnée à W, il est aisé d'écrire sa loi transformation chirale

$$\begin{aligned}
W \to W' &= U_L W U_R^\dagger\\
&= e^{-i(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\eta})\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}} W e^{i(\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\eta})\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Vu que W est une matrice d'isospin 2×2 construite à partir de deux objets d'isospin $1/2$, elle peut être décomposée sur la base formée par les matrices de Pauli et de l'identité à deux dimensions

$$W = \sigma + i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi} \tag{3.36}$$

où σ et $\boldsymbol{\pi}$ sont respectivement un champ isoscalaire et un champ isovectoriel. Écrivons la loi de transformation (3.35) sous forme infinitésimale

$$\begin{aligned}
W' &= (1-i(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\eta})\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2})W(1+i(\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\eta})\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2})\\
&= W - i\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\left[\frac{\boldsymbol{\tau}}{2},W\right] + i\boldsymbol{\eta}\cdot\left\{\frac{\boldsymbol{\tau}}{2},W\right\}\\
&= W - i\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\left[\frac{\boldsymbol{\tau}}{2},i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}\right] + i\boldsymbol{\eta}\cdot\left\{\frac{\boldsymbol{\tau}}{2},\sigma+i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}\right\}\\
&= W + i\varepsilon^k\pi^l\epsilon^{klm}\tau^m + i(\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\tau})\sigma - \eta^k\pi^l\delta^{kl}\\
&= W + i\boldsymbol{\tau}\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\pi}) + i(\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\tau})\sigma - \boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\pi}\\
&= \sigma' + i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}'
\end{aligned}$$

où nous avons laissé tomber les termes d'ordre deux en les paramètres infinitésimaux. Pour obtenir la loi de transformation vectorielle sous $SU(2)$ des mésons du modèle, il suffit d'imposer $\boldsymbol{\eta}=0$, ce qui donne

$$\begin{cases} \sigma' = \sigma \\ \boldsymbol{\pi}' = \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\pi} \end{cases} \tag{3.37}$$

et qui montre bien que σ est un scalaire et que $\boldsymbol{\pi}$ se transforme comme un vecteur pour les transformation de $SU(2)$. Pour les transformations axiales, on prend $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$ et on obtient

$$\begin{cases} \sigma' = \sigma - \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\pi} \\ \boldsymbol{\pi}' = \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\eta}\sigma \end{cases} . \tag{3.38}$$

Remarquons que les lois de transformation (3.37) et (3.38) conservent la norme euclidienne du vecteur à quatre composantes $(\boldsymbol{\pi}, \sigma)$ vu que nous avons

$$W^\dagger W = \sigma^2 + (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi})^2 = \sigma^2 + (\delta^{kl} + i\epsilon^{klm}\tau^m)\pi^k\pi^l = \sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2 \tag{3.39}$$

et donc

$$\sigma'^2 + \boldsymbol{\pi}'^2 = W'^\dagger W' = U_R W^\dagger U_L^\dagger U_L W U_R^\dagger = U_R U_R^\dagger W^\dagger W = \sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2. \tag{3.40}$$

Ceci reflète le fait que le groupe de symétrie chirale $SU(2) \times SU(2)$ possède la même algèbre que le groupe des rotations à quatre dimensions dans l'espace euclidien $SO(4)$. Nous sommes à présent en mesure de vérifier l'invariance chirale du lagrangien (3.23).

Invariance du lagrangien sous $SU(2)_V$

Pour simplifier au plus possible la vérification, écrivons les déformations des champs sous $SU(2)_V$

$$\begin{cases} \delta N = -i\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} N \\ \delta\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\pi} \\ \delta\sigma = 0 \end{cases} . \tag{3.41}$$

Dans le lagrangien (3.23), le terme cinétique des nucléons et le potentiel[3] sont clairement invariants. Il nous suffit de vérifier que les déformations du terme cinétique des mésons et de leur terme d'interaction avec les nucléons sont nulles. Nous trouvons

$$\begin{aligned} \delta\left[(\partial_\mu\sigma)^2 + (\partial_\mu\boldsymbol{\pi})^2\right] &= 2\left[(\partial_\mu\boldsymbol{\pi}) \cdot (\partial^\mu\delta\boldsymbol{\pi}) + (\partial_\mu\sigma) \cdot (\partial^\mu\delta\sigma)\right] \\ &= 2(\partial_\mu\boldsymbol{\pi}) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \times \partial^\mu\boldsymbol{\pi}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \delta\left[\bar{N}\left(\sigma + i\tau \cdot \boldsymbol{\pi}\gamma_5\right)N\right] &= \delta N^\dagger\gamma_0\left(\sigma + i\tau \cdot \boldsymbol{\pi}\gamma_5\right)N + \bar{N}\left(\delta\sigma + i\tau \cdot \delta\boldsymbol{\pi}\gamma_5\right)N + \bar{N}\left(\sigma + i\tau \cdot \boldsymbol{\pi}\gamma_5\right)\delta N \\ &= \bar{N}i\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\sigma N - \bar{N}\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}\gamma_5 N + \bar{N}i\boldsymbol{\tau} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\pi})\gamma_5 N \\ &\quad -\bar{N}\sigma i\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}N + \bar{N}\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}\gamma_5\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}N \\ &= \bar{N}\left(-\varepsilon^k\tau^k\tau^l\pi^l + i\tau^m\epsilon^{klm}\varepsilon^k\pi^l + \tau^l\pi^l\varepsilon^k\tau^k\right)\frac{1}{2}\gamma_5 N \\ &= \bar{N}\left(-[\tau^k,\tau^l] + i\epsilon^{klm}\tau^m\right)\frac{1}{2}\varepsilon^k\pi^l\gamma_5 N \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nous sommes ainsi assuré de l'invariance sous $SU(2)_V$ du lagrangien (3.23).

3. Le potentiel est manifestement invariant vu qu'il ne dépend que de la combinaison invariante $\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2$.

Invariance du lagrangien sous $SU(2)_A$

De même, nous avons les déformations des champs sous $SU(2)_A$

$$\begin{cases} \delta N = -i\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\gamma_5 N \\ \delta\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\eta}\sigma \\ \delta\sigma = -\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\pi} \end{cases} . \tag{3.42}$$

De nouveau, il suffit de vérifier que les déformations du terme cinétique des mésons et de leur terme d'interaction avec les nucléons sont nulles. Nous trouvons

$$\begin{aligned} \delta\left[(\partial_\mu\sigma)^2 + (\partial_\mu\boldsymbol{\pi})^2\right] &= 2\left[(\partial_\mu\boldsymbol{\pi})\cdot(\boldsymbol{\eta}\partial^\mu\sigma) - (\partial_\mu\sigma)(\boldsymbol{\eta}\cdot\partial^\mu\boldsymbol{\pi})\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \delta\left[\bar{N}\left(\sigma + i\tau\cdot\boldsymbol{\pi}\gamma_5\right)N\right] &= -\bar{N}\sigma i\boldsymbol{\eta}\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\gamma_5 N + \bar{N}\boldsymbol{\eta}\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}N - \bar{N}\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\pi}N \\ &\quad + \bar{N}i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\eta}\sigma\gamma_5 N - \bar{N}\sigma i\boldsymbol{\eta}\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\gamma_5 N + \bar{N}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\eta}\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}N \\ &= \bar{N}\left(\frac{1}{2}\eta^k\tau^k\tau^l\pi^l + -\eta^k\pi^k + \frac{1}{2}\tau^l\pi^l\eta^k\tau^k\right)N \\ &= \bar{N}\left(\{\tau^k,\tau^l\} - 2\delta^{kl}\right)\frac{1}{2}\eta^k\pi^l N \\ &= 0. \end{aligned}$$

Vu que le lagrangien (3.23) est invariant aussi bien sous $SU(2)_V$ que sous $SU(2)_A$, nous sommes assurés de son invariance chirale $SU(2)_L \times SU(2)_R$. Remarquons qu'il était possible de vérifier presque immédiatement l'invariance chirale du terme d'interaction entre les mésons et les nucléons. En effet, ce terme peut s'écrire

$$\begin{aligned} \bar{N}(\sigma + i\gamma_5\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi})N &= (\bar{N}_L + \bar{N}_R)(\sigma + i\gamma_5\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi})(N_L + N_R) \\ &= \bar{N}_L(\sigma - i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi})N_L + \bar{N}_R(\sigma - i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi})N_L + \bar{N}_L(\sigma + i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi})N_R \\ &\quad + \bar{N}_R(\sigma + i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi})N_R \\ &= \bar{N}_R(\sigma - i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi})N_L + \bar{N}_L(\sigma + i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi})N_R \\ &= \bar{N}_R W^\dagger N_L + \bar{N}_L W N_R, \end{aligned} \tag{3.43}$$

forme sous laquelle cette invariance est explicite.

3.2.2 Brisure spontanée de la symétrie chirale

L'isospin d'un nucléon est conservé par les interactions fortes. L'état du système doit donc être invariant sous une transformation de $SU(2)_V$. Le courant vectoriel est alors conservé. Par contre, il se fait que le courant axial n'est que *partiellement* conservé. Ceci pourrait être la conséquence d'une symétrie approchée des interactions fortes qui, si elle était exacte, imposerait la conservation de ce courant. De plus, les nucléons sont des particules massives. On devrait alors *a priori* ajouter un terme de masse pour les nucléons dans le lagrangien (3.23). Mais ceci ne peut se faire sans automatiquement perdre complètement la conservation du courant axial. Et enfin, ce modèle prédit une même masse pour les pions et la particule σ. Or dans la nature, il n'existe pas de particule σ possédant une masse semblable à celle des trois pions[4]. Une brisure spontanée de la symétrie chirale permet de trouver une solution à ce problème.

Pour cette brisure spontanée de symétrie, nous pouvons directement nous servir des développement effectués dans l'exemple (2.3.2)[5].

Ainsi, si $\mu^2 > 0$, le potentiel a son minimum en $\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2 = 0$. On aura donc l'état fondamental

$$\sigma_0 = 0, \qquad \boldsymbol{\pi}_0 = 0. \tag{3.44}$$

Le vide reste invariant sous $SU(2)_V \times SU(2)_A$ et nous n'avons pas brisure spontanée de la symétrie chirale. Dans ce cas, les pions et la particule σ possèdent tous la même masse μ tandis que les nucléons restent sans masse. Il est alors possible de classer les nucléons suivant leur hélicité gauche ou droite, ce qui n'est pas possible dans la nature.

Par contre, si $\mu^2 < 0$, on atteindra le minimum du potentiel pour $\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2 = v^2$. On choisit le vide dans la direction σ

$$\sigma_0 = v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}, \qquad \boldsymbol{\pi}_0 = 0. \tag{3.45}$$

Ce choix est nécessaire pour obtenir un vide de parité positive. Ce vide n'est plus invariant sous $SU(2)_A$ vu les lois de transformation (3.38). Il reste par contre invariant sous $SU(2)_V$. On a donc réalisé la brisure spontanée de symétrie $SU(2)_L \times SU(2)_R \to SU(2)_V$. Remarquons que bien que le vide ne présente plus l'invariance sous $SU(2)_A$, le courant axial reste conservé vu que le lagrangien est toujours invariant sous les transformations chirales. Nous pouvons développer le lagrangien autour du minimum choisi

$$\sigma = v + \sigma' \tag{3.46}$$

pour obtenir

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \bar{N} i\gamma^\mu \partial_\mu N + \frac{1}{2}\left[\left(\partial_\mu \sigma'\right)^2 + \left(\partial_\mu \boldsymbol{\pi}\right)^2\right] - g\bar{N}\left(v + \sigma' + i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}\gamma_5\right)N \\
&\quad -\frac{1}{2}\mu^2\left(v^2 + 2v\sigma' + \sigma'^2 + \boldsymbol{\pi}^2\right) - \frac{\lambda}{4}\left(v^2 + 2v\sigma' + \sigma'^2 + \boldsymbol{\pi}^2\right)^2 \\
&= \bar{N}(i\gamma^\mu\partial_\mu - gv)N + \frac{1}{2}\left[\left(\partial_\mu \sigma'\right)^2 + \left(\partial_\mu \boldsymbol{\pi}\right)^2\right] - ig\bar{N}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}\gamma_5 N \\
&\quad +\mu^2\sigma'^2 - g\bar{N}\sigma' N - \lambda v\sigma'(\sigma'^2 + \boldsymbol{\pi}^2) - \frac{\lambda}{4}(\sigma'^2 + \boldsymbol{\pi}^2)^2 + \text{const.}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Écrit ainsi, le lagrangien n'est plus un invariant chiral. Seule la symétrie $SU(2)_V$ reste manifestement présente.

Nous remarquons que, suite à la brisure spontanée de symétrie, les nucléons acquièrent une masse $m_N = gv$. Le méson σ obtient une masse $m_\sigma = \sqrt{-2\mu^2}$ tandis que les pions restent sans masse. Ces derniers sont les BNG du modèle. Ils sont donc reliés aux générateurs brisés (ceux de $SU(2)_A$). Le modèle σ est un exemple explicite qui montre comment un courant axial peut être conservé en présence de fermions massifs. Revenons quelque peu sur l'absence de masse des pions. Celle-ci est due à notre hypothèse d'une symétrie exacte $SU(2)_L \times SU(2)_R$. Or expérimentalement, les pions possèdent une masse non nulle. Il est possible de générer une telle masse à partir du modèle σ. Il suffit pour cela d'ajouter un terme $\mathcal{L}'$ de la forme

$$\mathcal{L}' = a\sigma \qquad (a > 0) \tag{3.48}$$

4. La masse du pion neutre vaut à peu près 135 MeV tandis que les pions chargés possèdent une masse d'environ 139 MeV.

5. C'est la raison de notre choix de notation dans cet exemple pour les champs après la brisure spontanée de la symétrie.

au lagrangien (3.23) qui aura pour effet de briser explicitement la symétrie chirale puisque ce terme fixe une direction privilégiée dans l'espace ($\boldsymbol{\pi}$,σ), ce qui brise l'invariance $SO(4)$ ou de manière équivalente $SU(2)_L \times SU(2)_R$. Ce terme conserve la symétrie $SU(2)_V$ mais brise la symétrie $SU(2)_A$. Dans ce cas, le courant axial n'est plus conservé ni dans le mode de Wigner, ni dans le mode de Goldstone. Le minimum du potentiel se trouve maintenant en

$$\sigma_0 = f, \qquad \boldsymbol{\pi}_0 = 0 \tag{3.49}$$

où f doit satisfaire la condition de minimisation du potentiel

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} = \mu^2 f + \lambda f^3 - a = 0 \tag{3.50}$$

ou encore

$$a = \lambda f(f^2 - v^2). \tag{3.51}$$

Si nous exprimons le potentiel autour du nouveau minimum

$$\sigma = f + \sigma', \tag{3.52}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}\mu^2\left(f^2 + 2f\sigma' + \sigma'^2 + \boldsymbol{\pi}^2\right) + \frac{\lambda}{4}\left(f^2 + 2f\sigma' + \sigma'^2 + \boldsymbol{\pi}^2\right)^2 - a(f+\sigma') \\ &= \frac{1}{2}\lambda(3f^2 - v^2)\sigma'^2 + \frac{1}{2} <, \lambda(f^2 - v^2)\boldsymbol{\pi}^2 + \lambda f\sigma'(\sigma'^2 + \boldsymbol{\pi}^2) + \frac{\lambda}{4}(\sigma'^2 + \boldsymbol{\pi}^2)^2. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Nous voyons alors que les pions acquièrent une masse $m_\pi = \sqrt{\lambda(f^2 - v^2)} = \sqrt{\frac{a}{f}}$ tandis que le méson σ acquiert la une masse $m_\sigma = \lambda(3f^2 - v^2)$. Notons que la masse des nucléons est maintenant $m_N = gf$. La masse des pions est directement proportionnelle à la "force" de la brisure explicite de symétrie a.

Nous allons établir, pour terminer la discussion sur le modèle σ linéaire, le lien entre la masse des pions et la non-conservation du courant axial. Écrivons d'une part la déformation du terme $\mathcal{L}'$ sous une transformation axiale

$$\delta\mathcal{L}' = a\delta\sigma = -a\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\pi}. \tag{3.54}$$

D'autre part, on a

$$\delta(\mathcal{L} + \mathcal{L}') = \boldsymbol{\eta}\cdot\partial^\mu \mathbf{A}_\mu \tag{3.55}$$

Vu que $\mathcal{L}$ est un invariant chiral, $\delta\mathcal{L} = 0$, ce qui conduit à

$$\partial^\mu \mathbf{A}_\mu = -a\boldsymbol{\pi}, \tag{3.56}$$

qu'on peut écrire à l'aide de la masse des pions

$$\partial^\mu \mathbf{A}_\mu = -fm_\pi^2\boldsymbol{\pi}. \tag{3.57}$$

Cette dernière équation constitue l'hypothèse PCAC (Partially Conserved Axial Current) qui suppose, indépendamment de notre modèle, que la divergence du courant axial est reliée au carré de la masse des pions et qu'elle s'annule lorsque cette masse tend vers zéro.

3.3 Modèle σ non linéaire et lagrangiens effectifs

Le modèle σ linéaire décrit un méson scalaire σ qu'il n'a toujours pas été possible d'identifier expérimentalement de manière univoque. Si nous ne nous intéressons qu'aux énergies suffisamment faibles, l'effet de ce méson σ pourra être incorporé dans quelques constantes. Nous allons pour ce faire utiliser la technique des lagrangiens *effectifs* qui permet de représenter de manière simple la dynamique d'une théorie à faible énergie [14], [15], [16]. Lorsque cette énergie est suffisamment faible, seuls un ou quelques-uns de ces lagrangiens sont pertinents. Il est ainsi facile de tirer les principales prédictions de la théorie.

3.3.1 Suppression d'un champ lourd au niveau arbre

Lorsque nous étudions une théorie effective à basse énergie, le lagrangien effectif n'inclut pas les champs lourds. Le processus qui supprime les champs lourds dans un lagrangien s'appelle *integrating out the fields.*

Il existe en théorie des champs un résultat général appelé théorème du découplage [17], [18] qui décrit comment les particules lourdes doivent intervenir dans les théories à basse énergie. Ce théorème stipule que si la théorie à basse énergie restante est renormalisable, alors tous les effets d'une particule lourde apparaissent comme une renormalisation des constantes de couplage de la théorie, sinon sont supprimés par des puissances de la masse de la particule lourde. Si la masse d'une particule lourde devient infinie, nous pouvons nous attendre à ce que son influence disparaisse. Tout décalage dans les constantes de couplages n'est pas directement observable parce que les valeurs de ces couplages sont toujours déterminées par les expériences.

L'exemple le plus marquant se trouve dans le modèle standard. A faible énergie, nous pouvons considérer que les interactions faibles n'agissent que localement au travers de l'interaction de Fermi. Les effets de l'échange de bosons de jauge sont supprimés car la constante de couplage G_F est proportionnelle à m_W^{-2}.

Le nom du processus qui supprime un champ lourd Φ vient du formalisme des intégrales de chemin et est défini en termes d'une action effective $S_{eff}[l_i]$

$$e^{iS_{eff}[l_i]} = \frac{\int [\mathrm{d}\Phi] e^{i\int \mathrm{d}^4x \mathcal{L}(\Phi(x), l_i(x))}}{\int [\mathrm{d}\Phi] e^{i\int \mathrm{d}^4x \mathcal{L}(\Phi(x), 0)}} \tag{3.58}$$

où l_i désigne les autres champs. Nous allons expliciter ce processus à l'aide d'un exemple d'intégrale de chemin. Considérons le lagrangien suivant

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - m_\Phi^2 \Phi^2\right) + J\Phi. \tag{3.59}$$

En utilisant les raccourcis d'écriture

$$\begin{aligned} D &= \Box_x + m_\Phi^2 \\ D\Delta_F(x-y) &= -\delta^4(x-y) \\ D^{-1}J &= -\int \mathrm{d}^4y \Delta_F(x-y) J(y) \end{aligned} \tag{3.60}$$

et en intégrant suffisamment de fois par parties, on peut écrire

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^4x\mathcal{L}(\Phi,J) &= \int \mathrm{d}^4x \left[-\frac{1}{2}\Phi D\Phi + J\Phi\right] \\ &= -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x \left[\Phi D\Phi - 2DD^{-1}J\Phi + JD^{-1}J - JD^{-1}J\right] \\ &= -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x \left[(\Phi - D^{-1}J)D(\Phi - D^{-1}J) - JD^{-1}J\right] \\ &= -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x \left[\Phi' D\Phi' - JD^{-1}J\right] \qquad (3.61)\end{aligned}$$

où on a clairement posé

$$\Phi' = \Phi - D^{-1}J. \qquad (3.62)$$

Comme, dans l'intégrale de chemin, on intègre sur toutes les valeurs du champ en chaque point de l'espace-temps, nous pouvons changer les variables $[\mathrm{d}\Phi]$ en $[\mathrm{d}\Phi']$ ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} e^{iS_{eff}[J]} &= \frac{\int[\mathrm{d}\Phi]e^{i\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}(\Phi,J))}}{\int[\mathrm{d}\Phi]e^{i\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}(\Phi,0)}} \\ &= \frac{\int[\mathrm{d}\Phi']e^{-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}^4x\left[\Phi' D\Phi' - JD^{-1}J\right]}}{\int[\mathrm{d}\Phi]e^{i\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}(\Phi(x),0)}} \\ &= e^{\frac{i}{2}\int \mathrm{d}^4x\, JD^{-1}J}.\end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$S_{eff}[J] = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\, J(x)\Delta_F(x-y)J(y). \qquad (3.63)$$

Nous obtenons finalement un lagrangien local en remarquant que le propagateur $\Delta_F(x-y)$ de la particule lourde présente un pic pour les courtes distances. À cette échelle, on peut utiliser le développement en série de Taylor

$$J(y) = J(x) + (y-x)^\mu \left[\partial_\mu J(y)\right]_{y=x} + \dots \qquad (3.64)$$

De plus,

$$\int \mathrm{d}^4y\,\Delta_F(x-y) = -\frac{1}{m_\Phi^2} \qquad (3.65)$$

vu que nous avons

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^4y\,\Box_x\Delta_F(x-y) &= -\int \mathrm{d}^4y\,\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\,k^2\tilde{\Delta}_F(k)e^{-ik\cdot(x-y)} \\ &= -\int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\,k^2\tilde{\Delta}_F(k)e^{-ik\cdot x}\,\delta(k) \\ &= 0\end{aligned}$$

où $\tilde{\Delta}_F(k)$ est la transformée de Fourier du propagateur de la particule lourde. En insérant (3.64) et (3.65) dans (3.63), on obtient finalement le développement

$$S_{eff}[l] = \int \mathrm{d}^4x\,\frac{1}{2m_\Phi^2}\,J(x)J(x) + \dots, \qquad (3.66)$$

résultat qui n'est pas sans rappeler l'échange des bosons de jauge de l'interaction faible.

3.3.2 Paramétrisations du modèle σ

Dans ce chapitre, nous avons étudié le modèle σ linéaire, dont lagrangien était donné par (3.23). Il était exprimé à l'aide des champs N, σ et $\boldsymbol{\pi}$. Nous pouvons nous amuser à le réécrire sous une autre représentation linéaire à l'aide des champs N_L, N_R et W. On obtient alors rapidement le lagrangien sous la forme

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \bar{N}_L i\gamma_\mu \partial^\mu N_L + \bar{N}_R i\gamma_\mu \partial^\mu N_R + \frac{1}{4}\operatorname{tr}(\partial_\mu W^\dagger \partial^\mu W) - g(\bar{N}_R W^\dagger N_L + \bar{N}_L W N_R) \\ & -\frac{\mu^2}{4}\operatorname{tr}(W^\dagger W) - \frac{\lambda}{16}\left[\operatorname{tr}(W^\dagger W)\right]^2 \end{aligned} \tag{3.67}$$

qui montre de manière assez explicite son invariance chirale $SU(2)_L \times SU(2)_R$.

La paramétrisation du modèle σ peut également se faire de manière non linéaire, c'est-à-dire que les champs se transforment de manière non linéaire. Ce type de paramétrisation se révèle utile lorsque nous désirons supprimer un champ et développer le lagrangien en série pour n'en garder que les termes dominants.

Par exemple, à la place des champs σ' et $\boldsymbol{\pi}$, on peut définir les champs S et φ de la façon suivante :

$$S \equiv \sqrt{(\sigma'+v)^2 + \boldsymbol{\pi}^2} - v = \sigma' + \ldots, \qquad \varphi \equiv \frac{v\boldsymbol{\pi}}{\sqrt{(\sigma'+v)^2+\boldsymbol{\pi}^2}} = \boldsymbol{\pi} + \ldots \tag{3.68}$$

où on développe en puissances inverses de v. Cette représentation porte le nom de représentation racine carrée.

Une autre paramétrisation utile est la paramétrisation exponentielle. Ici, on utilise les champs S et Σ où

$$W = \sigma + i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi} = (v+S)\Sigma, \qquad \Sigma = e^{i\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}'}{v}} \tag{3.69}$$

de telle façon que $\boldsymbol{\pi}' = \boldsymbol{\pi} + \ldots$. Écrivons le lagrangien (3.67) à l'aide de ces champs. Nous trouvons pour le terme cinétique des mésons

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\operatorname{tr}(\partial_\mu W^\dagger \partial^\mu W) &= \frac{1}{4}\operatorname{tr}\left[((v+S)\partial_\mu\Sigma^\dagger + \Sigma^\dagger\partial_\mu S)(\Sigma\partial^\mu S + (v+S)\partial^\mu\Sigma)\right] \\ &= \frac{1}{4}\operatorname{tr}\left[(\partial_\mu S)^2 + (v+S)^2\partial_\mu\Sigma^\dagger\partial^\mu\Sigma + (v+S)\partial_\mu S(\Sigma\partial^\mu\Sigma^\dagger + \Sigma^\dagger\partial^\mu\Sigma)\right] \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu S)^2 + \frac{(v+S)^2}{4}\operatorname{tr}(\partial_\mu\Sigma^\dagger\partial^\mu\Sigma) + (v+S)\partial_\mu S\,\partial^\mu(\Sigma^\dagger\Sigma) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu S)^2 + \frac{(v+S)^2}{4}\operatorname{tr}(\partial_\mu\Sigma^\dagger\partial^\mu\Sigma). \end{aligned} \tag{3.70}$$

Le potentiel, quant à lui, s'écrit

$$\begin{aligned}-\frac{\mu^2}{4}\operatorname{tr}(W^\dagger W) - \frac{\lambda}{16}\left[\operatorname{tr}(W^\dagger W)\right]^2 &= -\frac{\mu^2}{4}(v^2+S^2+2vS)\operatorname{tr}(\Sigma^\dagger\Sigma) \\ &\quad -\frac{\lambda}{16}(v^4+S^4+4vS^3+4v^3S+6v^2S^2)\left[\operatorname{tr}(\Sigma^\dagger\Sigma)\right]^2 \\ &= -\frac{1}{2}\mu^2S^2 - \mu^2vS - \frac{\lambda}{4}S^4 - \lambda vS^3 - \lambda v^3S - \frac{3\lambda}{2}v^2S^2 + \text{const} \\ &= \mu^2S^2 - \lambda vS^3 - \frac{\lambda}{4}S^4 + \text{const}. \end{aligned} \tag{3.71}$$

On rassemble alors le tout pour obtenir finalement le lagrangien

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \bar{N}i\gamma_\mu\partial^\mu N + \frac{(v+S)^2}{4}\,\mathrm{tr}(\partial_\mu\Sigma^\dagger\partial^\mu\Sigma) + \frac{1}{2}\,\left[(\partial_\mu S)^2 + 2\mu^2 S^2\right] \\ & -g(v+S)(\bar{N}_R\Sigma^\dagger N_L + \bar{N}_L\Sigma N_R) - \lambda v S^3 - \frac{\lambda}{4}\,S^4 \end{aligned} \tag{3.72}$$

où on a laissé tomber la constante. Le champ S possède une masse $m_S = \sqrt{-2\mu^2}$ et les nucléons une masse $m_N = gv$. Par contre, il n'y a aucun terme de masse pour Σ. Ceci est normal vu que nous n'avons fait que réécrire le lagrangien en termes du champ massif S, qui se comporte au premier ordre comme σ', et du champ $Sigma$, qui au premier ordre donne $\boldsymbol{\pi}$. Si on impose maintenant $S = 0$, on obtient le lagrangien de ce qu'on appelle le modèle σ non linéaire, qui ne fait plus intervenir que des mésons non massifs

$$\mathcal{L} = \bar{N}(i\gamma_\mu\partial^\mu - gv\Sigma)N + \frac{v^2}{4}\,\mathrm{tr}(\partial_\mu\Sigma^\dagger\partial^\mu\Sigma). \tag{3.73}$$

Terminons cette section sur les représentations du modèle σ en assurant l'indépendance de la physique vis-à-vis de la représentation utilisée. Un théorème prouvé d'abord par Haag [19], [20] et [21] garantit que si deux champs sont reliés de manière non linéaire, par exemple $\rho = \chi F(\chi)$ avec $F(0) = 1$, alors on obtient les mêmes observables lorsqu'on utilise $\mathcal{L}(\rho)$ ou $\mathcal{L}(\chi F(\chi))$. Ainsi, la physique ne dépend pas de la manière dont le théoricien choisit ses champs. Ce résultat est fort utile car il autorise un changement de représentation qui permet dans certains cas de simplifier les calculs.

3.3.3 Lagrangien effectif

Le modèle σ non linéaire a été obtenu en supprimant de façon brutale le champ S. La méthode des lagrangiens effectifs permet de supprimer un champ de manière moins radicale, tout en gardant un contrôle sur ses effets dans la théorie. Si on néglige les interactions en S^2, il est clair qu'on peut effectuer l'identification

$$\Phi \to S \qquad \text{et} \qquad J \to \frac{v}{2}\mathrm{tr}(\partial_\mu\Sigma^\dagger\partial^\mu\Sigma). \tag{3.74}$$

Dans ce cas, on obtient par (3.66) le lagrangien effectif pour la partie purement mésonique

$$\mathcal{L}_{m,eff} = \frac{v^2}{4}\,\mathrm{tr}(\partial_\mu\Sigma^\dagger\partial^\mu\Sigma) + \frac{v^2}{8m_S^2}\,\left[\mathrm{tr}(\partial_\mu\Sigma^\dagger\partial^\mu\Sigma)\right]^2 + \ldots \tag{3.75}$$

À énergie suffisamment faible, les termes inversement proportionnels à une puissance de m_S seront négligeables. Le modèle σ non linéaire apparaît alors comme l'approximation aux basses énergies du modèle σ.

3.3.4 Brisure explicite de la symétrie chirale dans le lagrangien effectif

Les lagrangiens effectifs peuvent aussi se révéler utiles pour analyser l'effet d'une petite brisure de symétrie. Comme dans le modèle σ linéaire, on rend le potentiel V légèrement dissymétrique en y ajoutant un terme de brisure explicite

$$\mathcal{L}' = a\sigma = \frac{a}{4}\mathrm{tr}(W^\dagger + W) \qquad (a > 0). \tag{3.76}$$

On avait montré que les pions obtenaient une masse $m_\pi = \sqrt{\frac{a}{v}}$. En utilisant la représentation exponentielle, ce résultat peut se trouver immédiatement

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= \frac{a}{4}(v+S)\,\mathrm{tr}(\Sigma^\dagger + \Sigma)\\ &= \frac{a}{4}(v+S)\,\mathrm{tr}\left[2 - \left(\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}}{v}\right)^2 + \dots\right]\\ &= a(v+S) - \frac{a}{2v}\,\boldsymbol{\pi}^2 + \dots\end{aligned}$$

Il est de nouveau possible d'éliminer le champ S par la méthode des lagrangiens effectifs vu que $\mathcal{L}'$ contient un terme linéaire en ce champ. Nous aurons donc l'identification

$$J \to \frac{v}{2}\,\mathrm{tr}(\partial_\mu\Sigma^\dagger\partial^\mu\Sigma) + \frac{a}{4}\,\mathrm{tr}(\Sigma^\dagger + \Sigma). \tag{3.77}$$

Le modèle σ non linéaire, quant à lui, s'obtient en posant $S = 0$, Il vient dans ce cas

$$\mathcal{L} = \bar{N}(i\gamma_\mu\partial^\mu - gv\Sigma)N + \frac{v^2}{4}\,\mathrm{tr}(\partial_\mu\Sigma^\dagger\partial^\mu\Sigma) + \frac{m_\pi^2}{4}\,v^2\,\mathrm{tr}(\Sigma^\dagger + \Sigma). \tag{3.78}$$

3.3.5 Autre approche du modèle σ non linéaire

Nous pouvons voir le modèle σ non linéaire de manière plus géométrique. Repartons du potentiel

$$V(\sigma,\boldsymbol{\pi}) = \frac{1}{4}\,\lambda(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2 - v^2) + \mathrm{const} \tag{3.79}$$

où nous allons fixer v et faire croître la valeur du paramètre λ. Dans ce cas, les champs σ et $\boldsymbol{\pi}$ sont de plus en plus forcés à se trouver aux alentours du "cercle chiral" de rayon v. Par la même occasion, pour que v reste constant, il faut aussi que le paramètre $-\mu^2$ croisse, ce qui implique que la masse du méson σ croît aussi. Le lagrangien du modèle σ non linéaire s'obtient dans la limite[6] où $\lambda \to \infty$. La partie purement mésonique se réduit à

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\sigma)^2 + (\partial_\mu\boldsymbol{\pi})^2\right] \tag{3.80}$$

avec la condition[7]

$$\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2 = v^2 = \mathrm{const}. \tag{3.81}$$

On peut exprimer les champs σ et $\boldsymbol{\pi}$ à l'aide d'un angle chiral θ et d'un vecteur unitaire $\hat{\boldsymbol{\pi}}$ dans l'espace d'isospin

$$\begin{cases}\sigma(x) = v\cos\theta(x)\\ \boldsymbol{\pi}(x) = v\hat{\boldsymbol{\pi}}(x)\sin\theta(x)\end{cases}. \tag{3.82}$$

Ces champs peuvent être combinés en un champ chiral U

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{v}\left[\sigma + i\gamma_5\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}\right]\\ &= \cos\theta + i\gamma_5\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{\pi}}\sin\theta,\end{aligned}$$

6. Lorsque $\lambda \to \infty$, la masse du méson σ fait de même. Ainsi, dans le lagrangien effectif, tous les termes en puissances inverses de m_S s'annulent. Le terme de masse devient une constante infinie qu'on élimine du lagrangien (car n'apporte plus rien à la dynamique du système).

7. Jusqu'à présent, pour passer au modèle σ non linéaire, nous imposions $S = 0$. Ceci revient, en fait, exactement à la condition (3.81) vu la définition du champ S.

qui peut également s'écrire

$$U = e^{i\gamma_5\theta\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{\pi}}}. \tag{3.83}$$

En effet, en développant l'exponentielle, nous trouvons

$$\begin{aligned} e^{i\gamma_5\theta\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{\pi}}} &= 1 + i\gamma_5\theta\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{\pi}} - \frac{1}{2}\,\theta^2 - \frac{i}{6}\,\gamma_5\theta\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{\pi}} + \ldots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\,\theta^2 + \ldots\right) + i\gamma_5\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{\pi}}\left(\theta - \frac{1}{6}\,\theta^3 + \ldots\right) \\ &= \cos\theta + i\gamma_5\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{\pi}}\sin\theta. \end{aligned}$$

Le facteur γ_5 a été ajouté par rapport à la définition de W à cause du caractère pseudoscalaire des pions. Ainsi alors que W n'agit que dans l'espace d'isospin, U agit en plus dans l'espace des spineurs de Dirac.

A l'aide de (3.82), la partie purement mésonique du lagrangien (3.80) peut se réécrire

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m &= \frac{1}{2}\left[(-v\sin\theta\partial_\mu\theta)^2 + (v\sin\theta\partial_\mu\hat{\boldsymbol{\pi}} + v\cos\theta\partial_\mu\theta)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}v^2\left[(\partial_\mu\theta) + (\partial_\mu\hat{\boldsymbol{\pi}})^2\sin^2\theta\right] \end{aligned} \tag{3.84}$$

car $\hat{\boldsymbol{\pi}}\cdot\partial_\mu\hat{\boldsymbol{\pi}} = 0$. Nous pouvons aussi écrire $\mathcal{L}_m$ à l'aide du champ chiral U, ce qui donne

$$\mathcal{L}_m = \frac{v^2}{16}\,\mathrm{tr}(\partial_\mu U^\dagger\partial^\mu U). \tag{3.85}$$

Le lagrangien complet du modèle σ non linéaire est donc

$$\mathcal{L} = \bar{N}(i\gamma_\mu\partial^\mu - gvU)N + \frac{v^2}{16}\,\mathrm{tr}(\partial_\mu U^\dagger\partial^\mu U). \tag{3.86}$$

Comparé à (3.73), nous avons un facteur $\frac{1}{16}$ contre $\frac{1}{4}$ dans le second terme car la trace porte aussi bien sur les matrices d'isospin que sur les matrices γ.

3.4 Modèle de Nambu-Jona-Lasinio

Jusqu'à présent, tous les mécanismes de brisure spontanée de symétrie que nous avons étudié ne faisaient intervenir que des bosons ou bien des bosons en interaction avec des fermions. Dès 1961, Nambu et Jona-Lasinio ont proposé un modèle qui ne fait intervenir que des fermions [22] et qui exhibe les mêmes effets qu'une brisure spontanée de symétrie. Nous allons exposer ce modèle en termes de quarks et dans une version à deux saveurs [8]. Le lagrangien du modèle NJL est le suivant :

$$\mathcal{L} = \bar{q}i\gamma_\mu\partial^\mu q + G\left[(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}q)^2\right]. \tag{3.87}$$

Ce lagrangien décrit un système de fermions sans masse qui interagissent localement. Comme les champs fermioniques ont la dimension $[\mathrm{masse}]^{3/2}$, la constante de couplage G de l'interaction ponctuelle doit avoir la dimension $[\mathrm{masse}]^{-2}$. On supposera cette constante positive afin que l'interaction soit attractive.

8. Au départ, ce modèle était formulé en termes des nucléons, les quarks n'étant pas encore connus à l'époque.

Le lagrangien (3.87) est invariant sous les transformations de $SU(2)_V$. Cette invariance est évidente pour le terme cinétique et le terme en $(\bar{q}q)^2$. Il nous suffit alors de vérifier cette invariance pour le terme en $(\bar{q}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}q)^2$. En utilisant une transformation infinitésimale, nous obtenons

$$\begin{aligned}(\bar{q}'i\gamma_5\boldsymbol{\tau}q')^2 &= \left[\bar{q}\left(1+i\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\right)i\gamma_5\boldsymbol{\tau}\left(1-i\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\right)q\right]^2\\ &= \left(\bar{q}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}q-\bar{q}\gamma_5\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\boldsymbol{\tau}q+\bar{q}\gamma_5\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}q+\mathcal{O}(2)\right)^2\\ &= (\bar{q}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}q)^2+2(\bar{q}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}^k q)\left(\bar{q}\gamma_5\varepsilon^m\left[\boldsymbol{\tau}^l,\frac{\boldsymbol{\tau}^m}{2}\right]q\right)+\mathcal{O}(2)\\ &= (\bar{q}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}q)^2+2\epsilon^{klm}(\bar{q}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}^k q)(\bar{q}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}^l q)\varepsilon^m+\mathcal{O}(2)\\ &= (\bar{q}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}q)^2+\mathcal{O}(2),\end{aligned}$$

ce qui suffit. Le lagrangien est également invariant sous les transformations de $SU(2)_A$. Seul le terme d'interaction doit encore être vérifié. De nouveau, pour une transformation infinitésimale, nous trouvons

$$\begin{aligned}(\bar{q}'q')^2 &= \left[q^\dagger\left(1+i\boldsymbol{\eta}\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\gamma_5\right)\gamma_0\left(1-i\boldsymbol{\eta}\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\gamma_5\right)q\right]^2\\ &= (\bar{q}q-\bar{q}i\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\tau}\gamma_5 q+\mathcal{O}(2))^2\\ &= (\bar{q}q)^2-2\bar{q}q\bar{q}i\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\tau}\gamma_5 q+\mathcal{O}(2)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(\bar{q}'i\gamma_5\boldsymbol{\tau}q')^2 &= \left[q^\dagger\left(1+i\boldsymbol{\eta}\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\gamma_5\right)\gamma_0 i\gamma_5\boldsymbol{\tau}\left(1-i\boldsymbol{\eta}\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\gamma_5\right)q\right]^2\\ &= \left(\bar{q}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}q+\bar{q}\boldsymbol{\eta}\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\boldsymbol{\tau}q+\bar{q}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\eta}\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}q+\mathcal{O}(2)\right)^2\\ &= (\bar{q}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}q)^2+2(\bar{q}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}^k q)\left(\bar{q}\eta^l\left\{\frac{\boldsymbol{\tau}^l}{2},\boldsymbol{\tau}^k\right\}q\right)+\mathcal{O}(2)\\ &= (\bar{q}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}q)^2+2(\bar{q}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}^k q)(\bar{q}\eta^l\delta^{kl}q)+\mathcal{O}(2)\\ &= (\bar{q}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}q)^2+2(\bar{q}i\gamma_5\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\tau}q)\bar{q}q+\mathcal{O}(2).\end{aligned}$$

Donc en rassemblant, on a

$$(\bar{q}'q')^2+(\bar{q}'i\gamma_5\boldsymbol{\tau}q')^2=(\bar{q}q)^2+(\bar{q}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}q)^2+\mathcal{O}(2).$$

Nous sommes ainsi assurés de l'invariance chirale $SU(2)_L\times SU(2)_R$ du lagrangien (3.87).

Afin d'avoir une idée de la structure du modèle, on introduit des champs auxiliaires complexes σ et $\boldsymbol{\pi}$ et on réécrit le lagrangien sous la forme [23]

$$\mathcal{L}=\bar{q}\left(i\gamma_\mu\partial^\mu-\tilde{G}(\sigma+i\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{\tau}\gamma_5)\right)q-\frac{1}{2}\mu^2(\sigma^2+\boldsymbol{\pi}^2)+\mathcal{L}_{\text{rés}} \tag{3.88}$$

avec

$$\mathcal{L}_{\text{rés}}=G\left[\left(\bar{q}q+\frac{\mu^2}{\tilde{G}}\sigma\right)^2+\left(\bar{q}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}q+\frac{\mu^2}{\tilde{G}}\boldsymbol{\pi}\right)^2\right] \tag{3.89}$$

et

$$\tilde{G}^2=2G\mu^2. \tag{3.90}$$

Nous pouvons vérifier que le lagrangien (3.88) n'est rien d'autre que (3.87). En effet, en développant (3.89), il vient

$$\mathcal{L}_{\text{rés}} = G\left[(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}q)^2 + \frac{\mu^4}{\tilde{G}^2}(\sigma^2+\boldsymbol{\pi}^2) + 2\bar{q}\,\frac{\mu^2}{\tilde{G}}\,\sigma q + 2\bar{q}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}\,\frac{\mu^2}{\tilde{G}}\,q\right].$$

En utilisant (3.90) et insérant le tout dans (3.88), nous retombons effectivement sur le lagrangien (3.87). La constante μ^2 introduite possède la dimension $[\text{masse}]^2$.

Mis à part $\mathcal{L}_{\text{rés}}$, le lagrangien (3.88) ressemble à celui du modèle σ linéaire excepté le terme cinétique des mésons et un potentiel qui brise explicitement la symétrie. Il nous montre que les fermions acquerront une masse *via* leur couplage avec les champs auxiliaires. On a intentionnellement scindé le lagrangien en deux parties $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{MF} + \mathcal{L}_{\text{rés}}$ afin de rendre plus apparente sa structure. Nous voyons que $\mathcal{L}_{MF}$ a la forme d'un opérateur à un corps tandis que $\mathcal{L}_{\text{rés}}$ ne contient qu'une interaction résiduelle. Nous pouvons choisir les champs auxiliaires de telle façon que le terme $\mathcal{L}_{\text{rés}}$ s'annule au vide de $\mathcal{L}_{MF}$. Il faut pour cela que

$$\langle 0|\,\bar{q}q\,|0\rangle + \frac{\mu^2}{\tilde{G}}\,\sigma_0 = 0 \tag{3.91}$$

et que

$$\langle 0|\,\bar{q}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}q\,|0\rangle + \frac{\mu^2}{\tilde{G}}\,\boldsymbol{\pi}_0 = 0. \tag{3.92}$$

Il apparaît ainsi que $\mathcal{L}_{MF}$ décrit un champ moyen (Mean Field) au sens d'Hartree-Fock et que les champs σ et $\boldsymbol{\pi}$ sont reliés aux condensats scalaire et pseudoscalaire de quarks.

Si comme à l'accoutumée on suppose que $\boldsymbol{\pi}_0 = 0$ [9], le terme de masse pour les quarks vaudra

$$M = \tilde{G}\sigma_0. \tag{3.93}$$

En utilisant (3.90) et (3.91), nous avons en fait

$$M = 2G\,\frac{\mu^2}{\tilde{G}}\,\sigma_0 = -2G\,\langle 0|\,\bar{q}q\,|0\rangle\,. \tag{3.94}$$

Autrement dit, c'est le condensat de quarks qui génère la masse. Ainsi l'équation du mouvement pour un champ sans interaction est

$$(i\gamma_\mu\partial^\mu - M)q(x) = 0. \tag{3.95}$$

Étant donné que $M \neq 0$, l'équation de mouvement n'est plus un invariant chiral. Il s'agit donc ici d'une brisure dynamique de la symétrie chirale. Le système (3.94) et (3.95) est autoconsistant vu que la masse M dépend de la valeur moyenne au vide du champ des quarks au vide qui elle-même dépend de la masse M.

Nous pouvons exprimer le condensat grâce aux spineurs des quarks. Nous avons pour un fermion de spin 1/2 enfermé dans un volume V la décomposition

$$\psi(\vec{x},t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{p},s}\sqrt{\frac{m}{E_p}}\left(a_{\mathbf{p}s}u(p,s)e^{-ip\cdot x} + b^\dagger_{\mathbf{p}s}v(p,s)e^{ip\cdot x}\right) \tag{3.96}$$

avec les relations d'anticommutation

$$\{a_{\mathbf{p}s},a^\dagger_{\mathbf{p}'s'}\} = \{b_{\mathbf{p}s},b^\dagger_{\mathbf{p}'s'}\} = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}\delta_{ss'} \qquad \text{et 0 pour toutes les autres.} \tag{3.97}$$

9. Sinon, le vide possèderait une parité négative.

Nous obtenons ainsi

$$
\begin{aligned}
M &= -2G\,\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{p}s\mathbf{p}'s'}\frac{M}{\sqrt{E_pE_{p'}}}\,\langle 0|\,(a^\dagger_{\mathbf{p}s}u^\dagger(p,s)e^{ip\cdot x}+b_{\mathbf{p}s}v^\dagger(p,s)e^{-ip\cdot x})\gamma_0 \\
&\qquad\qquad (a_{\mathbf{p}'s'}u(p',s')e^{-ip'\cdot x}+b^\dagger_{\mathbf{p}'s'}v(p',s')e^{ip'\cdot x})\,|0\rangle \\
&= -2G\,\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{p}s\mathbf{p}'s'}\frac{M}{\sqrt{E_pE_{p'}}}\,\langle 0|\,b_{\mathbf{p}s}b^\dagger_{\mathbf{p}'s'}\,|0\rangle\,v^\dagger(p,s)\gamma_0 v(p',s')e^{i(p'-p)\cdot x}
\end{aligned}
\tag{3.98}
$$

Comme $\langle 0|\,b^\dagger_{\mathbf{p}'s'}b_{\mathbf{p}s}\,|0\rangle = 0$, il vient

$$
\langle 0|\,b_{\mathbf{p}s}b^\dagger_{\mathbf{p}'s'}\,|0\rangle = \langle 0|\,\{b_{\mathbf{p}s},b^\dagger_{\mathbf{p}'s'}\}\,|0\rangle = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}\delta_{ss'},
\tag{3.99}
$$

ce qui donne

$$
\begin{aligned}
M &= -2G\,\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{p}s}\frac{M}{E_p}\bar{v}(p,s)v(p,s) \\
&= 2G\,\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{p}s}\frac{M}{\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2}}.
\end{aligned}
\tag{3.100}
$$

La sommation sur les états de spin nous donne un facteur 2. Nous effectuons également la transition du discret au continu habituelle

$$
\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{p}} \to \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}.
\tag{3.101}
$$

Cependant, vu que la somme sur tous les états de la mer de Dirac diverge, nous la régularisons en introduisant une coupure Λ. On trouve ainsi l'équation intégrale pour la masse des quarks

$$
M = 4G\int_{|\mathbf{p}|<\Lambda}\frac{M}{\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2}}\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}.
\tag{3.102}
$$

Cette équation est bien entendu vérifiée pour $M = 0$ qui correspond à l'équation du mouvement pour une particule chirale. Cependant, lorsque la constante de couplage G est suffisamment grande, il existe une autre solution [42] pour M correspondant à un condensat de quarks non nul et donc à une situation où la symétrie chirale est cachée. Ainsi le modèle NJL est capable de décrire la transition de champs de quarks dans un état de vide symétrique chiralement vers un autre où cette symétrie est cachée quand la force de l'autocouplage est augmentée. Et donc, le condensat chiral est une mesure directe de la brisure de symétrie chirale.

Chapitre 4

Théories de jauge et brisure spontanée de symétrie

Depuis les années 80, les théoriciens pensent que les interactions fondamentales sont particulièrement bien décrites par des théories de jauge. Le problème de ces théories est que les bosons de jauge, les “messagers” de l’interaction, sont sans masse. L’adjonction *ad hoc* d’un terme de masse ne permet pas à la théorie d’être renormalisable. Ceci n’est pas gênant pour l’électrodynamique quantique (QED en anglais) vu que la particule messagère, le photon, n’a justement pas de masse. Par contre, en ce qui concerne l’interaction faible, ce n’est pas le cas pour les bosons de jauge W^+, W^- et Z. La question toute naturelle qui vient alors en tête est la suivante : “Vu qu’un mécanisme de brisure spontanée de symétrie permet de générer une masse, est-il possible de trouver un mécanisme qui en générerait une pour les bosons de jauge et qui conserverait suffisamment de symétries pour assurer la renormalisabilité de la théorie ?”. Higgs a répondu par l’affirmative à cette question. Nous développerons ce mécanisme dans ce chapitre et l’appliquerons dans plusieurs exemples.

4.1 Qu’est-ce qu’une théorie de jauge ?

Avant de s’attaquer au mécanisme de Higgs, il convient de bien de comprendre ce qu’est une théorie de jauge. C’est en électrodynamique (classique) qu’on entend parler pour la première fois d’une symétrie de jauge. On y apprend que les équations de Maxwell sont invariantes si on effectue un certain type de transformation sur les potentiels. Cette transformation est la suivante

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial t}, \tag{4.1}$$

$$\mathbf{A}(x) \to \mathbf{A}'(x) = \mathbf{A}(x) - \vec{\nabla} f(x) \tag{4.2}$$

où $f(x)$ est une fonction continue quelconque et suffisamment dérivable. En relativité, on peut regrouper le potentiel scalaire et le potentiel vecteur en un potentiel quadrivecteur $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$, ce qui permet de réécrire la transformation de jauge des potentiels

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu f(x) \tag{4.3}$$

Jusqu’ici, la symétrie de jauge semble n’être qu’une remarque, très utile lors des calculs, mais sans raison physique profonde évidente.

Les transformations de jauge font leur réapparition en mécanique quantique. On y apprend l'existence de deux types de transformation de jauge. Le premier signifie simplement que la fonction d'onde implique la même physique si on lui fait subir un changement de phase *global* (voir figure 4.1), c'est-à-dire que les équations sont invariantes sous la transformation

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\alpha}\psi(x) \tag{4.4}$$

où α est une phase quelconque. Cette propriété est centrale dans les développements de la

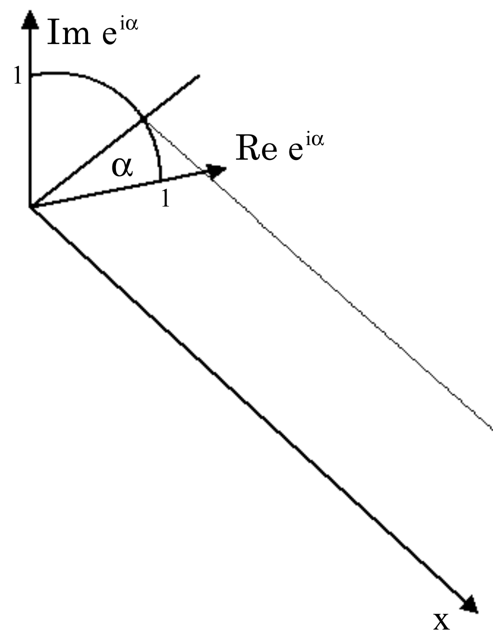


FIG. 4.1 – *Changement de phase globale. Le champ est basculé globalement d'un angle α dans le plan complexe.*

mécanique quantique[1]. Le second type affirme que la physique ne change pas si on fait subir à la fonction d'onde un changement de phase *local*, c'est-à-dire que les équations sont invariantes sous la transformation

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x) \tag{4.5}$$

où $\alpha(x)$ est une fonction réelle continue quelconque suffisamment dérivable.

4.1.1 Invariance de jauge abélienne

La situation est identique en théorie des champs, où il ne faut plus voir $\psi(x)$ comme une fonction d'onde mais comme un champ de Dirac, un spineur. Considérons le lagrangien libre de Dirac

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}\,(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\psi \tag{4.6}$$

1. Voilà pourquoi on entend toujours que la phase *globale* de la fonction d'onde n'a aucun intérêt physique. Il faut cependant faire attention à ne pas confondre une phase *globale* avec une phase *relative* sans quoi, il ne serait plus possible de décrire les phénomènes d'interférences quantiques et de diffusion. Cette erreur courante provient de l'abus de langage suivant : la phase n'a pas d'importance en mécanique quantique.

où comme d'habitude, $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$. Il est clair que ce lagrangien est invariant sous une transformation de jauge globale (4.4). Par contre, une transformation de jauge locale ne laisserait pas le lagrangien de Dirac $\mathcal{L}_D$ invariant à cause de la dérivée qui engendrerait un terme en $\partial_\mu\alpha(x)$. Pour résoudre ce petit problème, regardons ce que signifie une transformation de jauge locale. Si on part d'un champ constant et qu'on lui fait subir une telle transformation, cela signifie qu'on "tord" le champ comme le montre le figure 4.2. Ainsi, la définition habituelle d'une

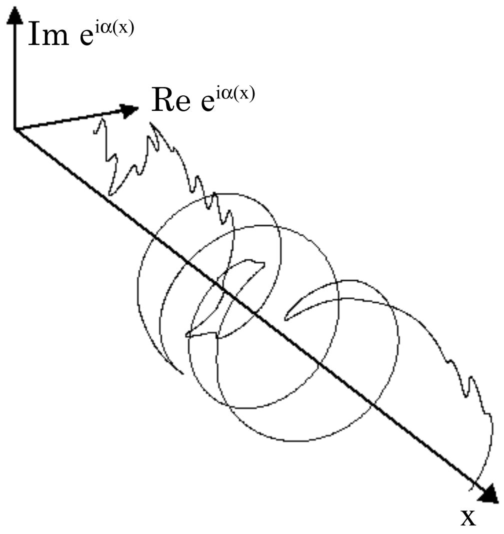


FIG. 4.2 – *Changement de phase locale. Le champ est basculé localement d'un angle $\alpha(x)$ dans le plan complexe.*

dérivée dans une direction n

$$n^\mu\partial_\mu\psi(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\psi(x+hn)-\psi(x)}{h} \tag{4.7}$$

ne convient pas à une invariance de jauge locale vu que le champ est pris en des points différents. Nous sommes dans une situation analogue à la relativité générale, vu qu'il s'agit d'un problème de transport parallèle. Il faut s'arranger d'une manière ou d'une autre pour compenser la différence de changement de phase entre deux points x et y afin de pouvoir comparer le champ en ces points et ainsi définir une dérivée qui ait un sens. La manière la plus simple est d'introduire une quantité scalaire $U(y,x)$, un comparateur, qui ne dépend que des deux points x et y et qui se transforme de la manière suivante :

$$U(y,x) \to U'(y,x) = e^{i\alpha(y)}U(y,x)e^{-i\alpha(x)} \tag{4.8}$$

avec la condition naturelle que si $x = y$, alors $U(y,y) = 1$. De plus, on peut aussi exiger que $U(y,x)$ soit une phase pure $U(y,x) = e^{i\phi(y,x)}$. De cette manière, nous sommes assurés que $\psi(y)$ et $U(y,x)\psi(x)$ se transforment de la même manière. Nous sommes maintenant en mesure de définir une dérivée qui ait un sens, la *dérivée covariante* dans la direction n

$$n^\mu D_\mu\psi(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\psi(x+hn)-U(x+hn,x)\psi(x)}{h}. \tag{4.9}$$

Il est possible de rendre cette expression plus explicite. Si le comparateur $U(y,x)$ est une fonction continue en x et en y, on peut le développer au premier ordre

$$U(x+hn,x) = U(x,x) + hn^\mu \left(\frac{\partial U}{\partial y^\mu}\right)_{h=0} + \mathcal{O}(h^2). \tag{4.10}$$

En définissant le nouveau champ (quadri)vectoriel A_μ

$$-ieA_\mu(x) = \left(\frac{\partial U}{\partial y^\mu}\right)_{h=0} \tag{4.11}$$

qu'on appelle *connexion*, et en insérant (4.11) et (4.10) dans (4.9), on trouve

$$\begin{aligned} n^\mu D_\mu \psi(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\psi(x+hn) - \psi(x) + iehn^\mu A_\mu \psi(x)}{h} \\ &= n^\mu \partial_\mu \psi(x) + ien^\mu A_\mu \psi(x). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Autrement dit, il suffira de remplacer la dérivée partielle ∂_μ dans le lagrangien de Dirac (4.6) par la dérivée covariante partielle D_μ

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu. \tag{4.13}$$

Nous donnerons la signification de l'introduction du facteur e dans (4.11) un peu plus tard. Pour trouver la loi de transformation de jauge locale du champ vectoriel A_μ, il suffit d'introduire (4.11) et (4.10) dans la loi de transformation du comparateur (4.8). Nous trouvons ainsi

$$\begin{aligned} 1 - iehn^\mu A_\mu(x) + \mathcal{O}(h^2) \to\ & 1 - iehn^\mu A'_\mu(x) + \mathcal{O}(h^2) \\ &= e^{i\alpha(x+hn)} \left(1 - iehn^\mu A_\mu(x) + \mathcal{O}(h^2)\right) e^{-i\alpha(x)} \\ &= e^{i\left[\alpha(x) + hn^\mu \partial_\mu \alpha(x) + \mathcal{O}(h^2)\right] - i\alpha(x)} \left(1 - iehn^\mu A_\mu(x) + \mathcal{O}(h^2)\right) \\ &= \left(1 + ihn^\mu \partial_\mu \alpha(x) + \mathcal{O}(h^2)\right)\left(1 - iehn^\mu A_\mu(x) + \mathcal{O}(h^2)\right) \\ &= 1 + ihn^\mu \partial_\mu \alpha(x) - iehn^\mu A_\mu(x) + \mathcal{O}(h^2) \\ &= 1 - iehn^\mu \left[A_\mu(x) - \frac{1}{e}\,\partial_\mu \alpha(x)\right] + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

et donc finalement la loi de transformation recherchée est

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\,\partial_\mu \alpha(x). \tag{4.14}$$

Nous pouvons vérifier que tout est bien construit en vérifiant que la dérivée covariante du champ se transforme de la même manière que le champ lui-même

$$\begin{aligned} D_\mu \psi(x) \to\ & \left[\partial_\mu + ie\left(A_\mu(x) - \frac{1}{e}\,\partial_\mu \alpha(x)\right)\right] e^{i\alpha(x)}\,\psi(x) \\ =\ & e^{i\alpha(x)} \left[\partial_\mu + i\partial_\mu \alpha(x) + ie\left(A_\mu(x) - \frac{1}{e}\,\partial_\mu \alpha(x)\right)\right] \psi(x) \\ =\ & e^{i\alpha(x)} \left[\partial_\mu + ieA_\mu(x)\right] \psi(x) \\ =\ & e^{i\alpha(x)}\, D_\mu \psi(x). \end{aligned}$$

comme le faisait la dérivée partielle habituelle dans le cas d'une transformation de jauge globale.

On a donc introduit dans le lagrangien de Dirac un champ A_μ par l'intermédiaire de la dérivée covariante afin d'assurer l'invariance de jauge locale

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu D_\mu - m\right)\psi = \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m\right)\psi \tag{4.15}$$

où nous remarquons que la constante e introduite dans (4.11) est en fait une constante de couplage entre le champ A_μ et le champ ψ. Ce lagrangien est incomplet car il ne contient pas de terme cinétique pour le champ A_μ. Il faudra faire attention à ce que ce terme cinétique soit aussi invariant de jauge locale. Voici un moyen de le construire : vu que la dérivée covariante d'un champ se transforme de la même manière que le champ lui même, nous avons

$$\begin{aligned} D_\nu D_\mu \psi(x) &\to e^{i\alpha(x)}\, D_\nu D_\mu \psi(x) \\ \Rightarrow [D_\mu, D_\nu]\,\psi(x) &\to e^{i\alpha(x)}\,[D_\mu, D_\nu]\,\psi(x). \end{aligned}$$

Cependant, ce commutateur n'est pas une dérivée en soi

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu]\,\psi(x) &= [\partial_\mu, \partial_\nu]\,\psi(x) + ie\left([\partial_\mu, A_\nu] - [\partial_\nu, A_\mu]\right)\psi(x) - e^2\,[A_\mu, A_\nu]\,\psi(x) \\ &= ie\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)\psi(x) \end{aligned}$$

vu que les dérivées partielles traditionnelles commutent tout comme les composantes du quadrivecteur A_μ. On définit le tenseur $F_{\mu\nu}$ comme suit

$$[D_\mu, D_\nu] = ieF_{\mu\nu}. \tag{4.16}$$

Nous pouvons vérifier de deux manières que ce tenseur est un invariant de jauge local. D'une part, comme le tenseur $F_{\mu\nu}$ ne contient pas de dérivée agissant sur le champ ψ, seul ce dernier est responsable de l'apparition de l'exponentielle qui commute sans encombre avec le tenseur, ce qui implique que $F_{\mu\nu}$ est bien un invariant de jauge local. D'autre part, nous pouvons le vérifier directement en appliquant une transformation explicite des A_μ. Une fois de plus, comme les dérivées partielles traditionnelles commutent, les $\partial_\mu \partial_\nu \alpha(x)$ se simplifient et il ne reste que l'expression de départ. Le terme cinétique devant être aussi invariant de Lorentz, il faut s'arranger pour contracter les indices. Si on ne se limite qu'à des combinaisons de champs[2] dont la dimension vaut au plus 4, il n'existe que deux termes cinétiques possibles

$$-\frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}\right)^2 \qquad \text{et} \qquad -ic\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \tag{4.17}$$

où les coefficients ont été introduits pour obtenir la forme standard du terme cinétique. La seconde possibilité brise les symétries discrètes P et T. Comme souvent on suppose l'existence

2. *A priori*, nous pourrions imaginer des termes d'interaction avec un nombre arbitraire de champs. Cependant, la théorie des perturbations fait intervenir des intégrales sur la quadri-impulsion de particules intermédiaires (dites aussi "virtuelles"). La plupart du temps, ces intégrales divergent, c'est pourquoi on est amené à introduire formellement une coupure (ou cut-off en anglais) à une certaine valeur Λ du module de la quadri-impulsion. A la fin des calculs, on impose qu'en passant à la limite $\Lambda \to \infty$, les quantités physiques soient indépendantes de Λ. Une telle théorie sera alors dite *renormalisable*. Si jamais une théorie possède une constante de couplage ayant la dimension d'une masse avec un exposant négatif, pour que l'amplitude de diffusion soit sans dimension, il faudra que cette constante soit multipliée par un quantité ayant la dimension d'une masse. Il se trouve que cette quantité est justement le paramètre de coupure Λ, ce qui fait diverger l'amplitude de diffusion pour la limite $\Lambda \to \infty$. La théorie est dite alors *non renormalisable*. Il semblerait que la nature soit décrite par des théories renormalisables, mais ceci ne reste toujours qu'une hypothèse de travail.

de ces symétries, on omet le second terme. On obtient ainsi le lagrangien de Dirac-Maxwell qui est à la base de l'électrodynamique quantique

$$\mathcal{L}_{D-M} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m)\psi. \tag{4.18}$$

Ce lagrangien est invariant sous une transformation de jauge abélienne globale

$$\psi \to \psi' = e^{-i\alpha e}\psi. \tag{4.19}$$

En comparant avec (1.53), on obtient $q_{ij} = e\delta_{ij}$. Le courant conservé (1.54) vaut alors

$$j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \tag{4.20}$$

qui est exactement la quantité qui se couple avec le champ A_μ. La charge, quant à elle, vaut

$$Q = e\int \bar{\psi}\gamma^0\psi \mathrm{d}^3x = e\int \psi^\dagger\psi \mathrm{d}^3x \tag{4.21}$$

De plus, nous observons qu'il n'y pas de terme de masse[3] pour le champ A_μ. Il semble alors assez naturel d'interpréter la charge Q comme la charge électrique du champ et le courant j^μ comme le courant électromagnétique associé qui se couple au champ sans masse A_μ, le photon. Enfin, le tenseur $F_{\mu\nu}$ n'est donc rien d'autre que le tenseur de Maxwell de l'électrodynamique classique.

4.1.2 Invariance de jauge non-abélienne

Yang et Mills [24] ont proposé de généraliser l'invariance locale de la phase à l'invariance locale d'une symétrie continue. Nous n'allons pas réexposer toute la théorie mais juste rappeler les résultats. La démarche est analogue au cas abélien. Il suffit de faire attention au fait que les générateurs de la symétrie ne commutent pas.

Considérons n'importe quel groupe de symétrie représenté par un ensemble de matrices $n \times n$ unitaires V. Alors, les champs de base $\phi(x)$ forment un n-uplet et se transforment donc comme suit

$$\phi(x) \to \phi'(x) = V(x)\phi(x) \tag{4.22}$$

où la dépendance de V par rapport à x rend la symétrie locale. Sous forme infinitésimale, la matrice $V(x)$ peut être développée en termes des générateurs du groupe de symétrie représentés par des matrices hermitiennes t^a

$$V(x) = 1 + i\alpha^a(x)t^a + \mathcal{O}(\alpha^2). \tag{4.23}$$

Ces générateurs vérifient les relations de commutation

$$\left[t^a, t^b\right] = if^{abc}t^c \tag{4.24}$$

où les nombres f^{abc} sont les constantes de structure propres au groupe en question. Il est toujours possible de définir les générateurs d'un groupe afin que f^{abc} soit totalement antisymétrique. On trouve alors que la dérivée ayant un vrai sens physique, la dérivée covariante, s'exprime par

$$D_\mu = \partial_\mu - igA^a_\mu t^a, \tag{4.25}$$

3. Un tel terme violerait l'invariance de jauge locale comme on peut s'en rendre compte directement par une transformation explicite.

qui fait apparaître un champ vectoriel A^a_μ pour chaque générateur du groupe. Ces champs vectoriels se transforment de manière infinitésimale comme suit :

$$A^a_\mu \to A'^a_\mu = A^a_\mu + \frac{1}{g}\,\partial_\mu \alpha^a + f^{abc} A^b_\mu \alpha^c. \tag{4.26}$$

Pour une transformation finie, on a

$$A^a_\mu t^a \to V(x) \left(A^a_\mu t^a + \frac{i}{g}\,\partial_\mu \right) V^\dagger(x), \tag{4.27}$$

ce qui implique de nouveau que la dérivée covariante d'un champ se transforme exactement comme le champ lui-même. Le tenseur de champ est définit par

$$[D_\mu, D_\nu] = -ig F^a_{\mu\nu} t^a, \tag{4.28}$$

c'est-à-dire

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu. \tag{4.29}$$

Enfin, le seul terme renormalisable qui respecte les symétries discrètes P et T est $-\frac{1}{4}\left(F^i_{\mu\nu}\right)^2$. Les champs vectoriels A^a_μ seront les bosons de jauge de la théorie et g sera la charge liée à l'interaction qu'on veut modéliser. Si on choisit le groupe $U(1)$, les matrices se réduisent à de simples phases et on retrouve alors le cas abélien. De plus en prenant $g = |e| = -e$ où e est la charge électrique de l'électron, on retrouve tout ce qui a été développé dans la section précédente pour le lagrangien de Dirac.

4.2 Mécanisme de Higgs

Comme il a déjà été mentionné plus haut, les physiciens pensent que les théories de jauge sont de bonnes descriptions des interactions fondamentales. Nous avons vu dans la section précédente que si on impose une invariance de jauge locale à une théorie, il apparaît tout naturellement de nouvelles particules sans masse, les bosons de jauge. La théorie des perturbations montre que les interactions fondamentales agissent par l'échange permanent de bosons de jauge entre les particules dites en interaction. Les bosons de jauge sont en quelque sorte des particules messagères de l'interaction. La phénoménologie nous apprend que les interactions fondamentales n'ont pas toutes la même portée. L'électromagnétisme et la gravitation sont apparemment de portée infinie, ce qui se traduit pas le fait que les bosons de jauge correspondant (le photon et l'hypothétique graviton) n'ont pas de masse propre. Par contre, les interactions faibles et fortes n'agissent qu'à courte portée. Dans le cas des interactions faibles, ceci est dû au fait que les bosons de jauge possèdent une masse. Pour les interactions fortes au niveau le plus fondamental connu à ce jour, les gluons n'ont pas de masse *stricto sensu* et devraient *a priori* permettre à l'interaction forte d'agir à n'importe quelle distance. Seulement, il existe un phénomène de confinement. Cela signifie que comme la force entre deux quarks augmente avec la distance, à un moment donné, il est préférable d'un point de vue énergétique de créer une nouvelle paire particule-antiparticule à partir du vide. Ce problème reste encore assez mystérieux en physique théorique. En physique nucléaire par contre, on considère que l'interaction forte est due à l'échange de pions qui serait l'équivalent des forces de Van der Waals. Comme ces pions possèdent une masse, ils limitent alors la portée de cette interaction.

Si on veut construire une théorie de jauge qui décrive les interactions faibles, il faut pouvoir faire apparaître d'une manière ou d'une autre un terme de masse pour des bosons de jauge. Si nous introduisons directement un tel terme dans le lagrangien de la théorie, la renormalisabilité de cette dernière sera alors perdue. Une brisure spontanée de symétrie semble par contre être un bon candidat. Mais il y a encore un souci car selon le théorème de Goldstone, il doit exister une particule sans masse pour chaque symétrie continue brisée. Il semblerait que nous soyons contraints à travailler inévitablement avec des particules sans masse. En réalité, tel n'est pas le cas car, en toute rigueur, le théorème de Goldstone ne peut s'appliquer aux théories de jauge. En effet, pour ce théorème, il faut que les axiomes de la théorie des champs traditionnelle soient vérifiés comme par exemple l'invariance de Lorentz explicite et la positivité de la norme. Il n'existe pas de condition fixant la jauge qui permette de vérifier tous ces axiomes à la fois. Dans les jauges covariantes, il existe des états de norme négative (mode longitudinal). Dans les jauges radiative ($\nabla \cdot \mathbf{A}(x) = 0$) ou axiale ($A_3(x) = 0$), nous n'avons plus l'invariance de Lorentz manifeste.

Une chose assez extraordinaire se produit alors. Les maladies de la théorie se soignent mutuellement. Nous verrons ci-dessous que les champs de jauge sans masse se combinent aux bosons de Goldstone également sans masse pour former des particules vectorielles massives. Ce phénomène a d'abord été suggéré par Anderson [25] qui a remarqué que plusieurs situations en physique de la matière condensée non relativiste pouvaient être expliquées par des photons massifs. En particulier, nous avons en supraconductivité un phénomène d'exclusion du flux magnétique (effet Meissner) qui correspond à un champ électromagnétique de portée finie, c'est-à-dire à un photon massif. Un photon habituel, non massif, ne possède que deux modes transverses. S'il devient massif, il possède alors un troisième mode, le mode longitudinal. Ce mode longitudinal supplémentaire est en fait couplé aux fluctuations collectives de la densité électronique du système, l'oscillation plasma. La généralisation à la théorie relativiste des champs a été menée par Brout et Englert [26], [27], par Guralnik *et al.* [28] et enfin plus complètement par Higgs [29]. Le mécanisme de brisure de symétrie dans les théories de jauge est connu sous le nom de mécanisme de Higgs. La brisure spontanée de symétrie génère une masse pour les bosons de jauge. Cependant les interactions entre ces bosons restent contraintes par la symétrie de jauge originelle ce qui provoque des conséquences observables. De plus, 't Hooft [30] a montré que la théorie de jauge reste renormalisable après la brisure spontanée de symétrie. Ce mécanisme a permis à Glashow, Salam et Weinberg de construire une théorie électrofaible qui unifie les descriptions des interactions faibles et des interactions électromagnétiques.

Ainsi, selon le Modèle Standard, le vide dans lequel toutes les interactions entre particules ont lieu n'est pas vide en réalité mais rempli d'un condensat de bosons de Higgs. Les quarks, les leptons et les bosons de jauge W et Z entrent continuellement en collision avec ces bosons de Higgs quand ils voyagent dans ce vide. Le condensat de Higgs agit comme une mélasse et ralentit de cette façon toutes les particules en interaction avec elle. Plus cette interaction sera forte, plus la masse de la particule considérée sera grande. Les bosons de Higgs sont eux-même en interaction avec la mélasse. Ils obtiennent par conséquent également une masse.

4.2.1 Cas abélien

Considérons pour commencer un champ scalaire complexe ϕ couplé à lui-même et au champ électromagnétique intervenant dans le lagrangien

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}\right)^2 + |D_\mu \phi|^2 - \mu^2 \phi^* \phi - \frac{\lambda}{2}\left(\phi^* \phi\right)^2 . \tag{4.30}$$

Ce lagrangien est manifestement invariant sous une transformation $U(1)$ locale

$$\phi(x) \to \phi'(x) = e^{i\alpha(x)}\,\phi(x), \qquad A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\,\partial_\mu\alpha(x). \tag{4.31}$$

Comme nous l'avons vu dans les exemples développés dans la section (2.3), il faut que le paramètre μ^2 soit négatif pour provoquer une brisure spontanée de symétrie. Nous obtenons directement de la minimisation du potentiel

$$\phi^*\phi = \frac{-\mu^2}{\lambda}. \tag{4.32}$$

Nous choisirons pour minimum

$$\langle\phi\rangle = \phi_0 = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} = v. \tag{4.33}$$

Les autres vides sont atteints par une transformation de symétrie brisée, une transformation $U(1)$, autrement dit en effectuant une rotation dans le plan complexe. Développons le champ ϕ au voisinage de ce minimum

$$\phi(x) = v + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1(x) + i\phi_2(x)\right), \tag{4.34}$$

ce qui permet de réécrire le potentiel

$$\begin{aligned}
V(\phi) &= \mu^2\phi^*\phi + \frac{\lambda}{2}\,(\phi^*\phi)^2 \\
&= \mu^2\left[v^2 + \frac{1}{2}\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right) + \sqrt{2}v\phi_1\right] + \frac{\lambda}{2}\left[v^2 + \frac{1}{2}\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right) + \sqrt{2}v\phi_1\right]^2 \\
&= \mu^2v^2 + \frac{\mu^2}{2}\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right) + \mu^2\sqrt{2}v\phi_1 + \frac{\lambda}{2}\Bigg[v^4 + \frac{1}{4}\left(\phi_1^4+\phi_2^4+2\phi_1^2\phi_2^2\right) \\
&\qquad +2v^2\phi_1^2 + v^2\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right) + 2\sqrt{2}v^3\phi_1 + \sqrt{2}v\phi_1\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right)\Bigg].
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Il est temps de remplacer v par $\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}$. On trouve ainsi

$$\begin{aligned}
V(\phi) = {} & \frac{\mu^4}{\lambda} + \frac{\mu^2}{2}\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right) + \mu^2\sqrt{2}\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}\,\phi_1 + \frac{\lambda}{2}\Bigg[\frac{\mu^4}{\lambda^2} + \frac{1}{4}\left(\phi_1^4+\phi_2^4+2\phi_1^2\phi_2^2\right) \\
& -2\,\frac{\mu^2}{\lambda}\,\phi_1^2 - \frac{\mu^2}{\lambda}\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right) - 2\sqrt{2}\,\frac{\mu^2}{\lambda}\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}\,\phi_1 + \sqrt{2}\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}\,\phi_1\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right)\Bigg]
\end{aligned} \tag{4.36}$$

où il ne reste plus qu'à réduire les termes semblables pour trouver le résultat final

$$V(\phi) = \frac{-\mu^4}{2\lambda} + \frac{1}{2}(-2\mu^2)\phi_1^2 - \frac{\mu^2\lambda}{2}\,\phi_1\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right) + \frac{\lambda}{4}\,\phi_1^2\phi_2^2 + \frac{\lambda}{8}\left(\phi_1^4+\phi_2^4\right). \tag{4.37}$$

En n'oubliant pas que le lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}\right)^2 + |D_\mu\phi|^2 - V(\phi), \tag{4.38}$$

nous voyons directement que le champ ϕ_1 acquiert une masse $m = \sqrt{-2\mu^2}$ tandis que le champ ϕ_2 reste sans masse : il n'est rien d'autre que le BNG. Ce boson est important du point de vue formel mais ne correspond pas à une particule physique indépendante. Pour le voir, il suffit de choisir la jauge appropriée qui dans ce cas est appelée *jauge unitaire*. Vu que nous avons affaire à une symétrie de jauge locale $U(1)$, nous pouvons choisir la fonction $\alpha(x)$ qui fasse en sorte que le champ $\phi(x)$ soit réel en tout point. Ainsi, le champ ϕ_2 disparaît formellement de la théorie. Remarquons que les termes linéaires en les champs disparaissent [4] et que des termes d'interaction à trois champs apparaissent de nouveau. Il n'y a pas réellement de nouvelle constante de couplage vu qu'à cause de la symétrie de jauge locale sous-jacente, elle dépend que de μ^2 et λ.

Regardons à présent ce qui se passe pour le champ de jauge A_μ. Comme le champ ϕ apparaît aussi dans le terme cinétique, il faut également le réécrire en terme des champs ϕ_1 et ϕ_2. Nous avons donc

$$\begin{aligned}
|D_\mu\phi|^2 &= \left[(\partial_\mu + ieA_\mu)\,\phi\right]^* \left[(\partial^\mu + ieA^\mu)\,\phi\right] \\
&= \left[(\partial_\mu - ieA_\mu)\,\phi^*\right] \left[(\partial^\mu + ieA^\mu)\,\phi\right] \\
&= (\partial_\mu\phi)^2 - ieA_\mu\phi^*\partial^\mu\phi + ieA^\mu\phi\partial_\mu\phi^* + e^2A_\mu A^\mu\phi^*\phi \\
&= \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 - ieA_\mu\left[v + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2)\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\partial^\mu(\phi_1 + i\phi_2) \\
&\quad + ieA_\mu\left[v + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\partial^\mu(\phi_1 - i\phi_2) + e^2A_\mu A^\mu\left[v^2 + \frac{1}{2}\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) + \sqrt{2}v\phi_1\right] \\
&= \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 + \sqrt{2}eA_\mu\left(v + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_1\right)\partial^\mu\phi_2 - eA_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_1 \\
&\qquad + e^2A_\mu A^\mu\left[v^2 + \frac{1}{2}\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) + \sqrt{2}v\phi_1\right].
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Laissons v tel quel car il ne se trouve jamais en compagnie de μ^2 ou de λ. Le remplacer par sa valeur ne ferait qu'alourdir inutilement l'expression. Penchons-nous quelques instants sur les termes quadratiques en les champs. Nous avons ainsi

$$|D_\mu\phi|^2 = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 + \sqrt{2}evA_\mu\partial^\mu\phi_2 + \frac{1}{2}\left(2e^2v^2\right)A_\mu A^\mu + \mathcal{O}(3) \tag{4.40}$$

où $\mathcal{O}(3)$ signifie que les termes non écrits sont d'ordre au moins trois en les champs. Il apparaît que le champ de jauge A_μ a acquis une masse $m_A = \sqrt{2}ev$ simplement par le fait que la valeur moyenne au vide du champ ϕ est non nulle. Remarquons que le signe du terme de masse pour le champ de jauge est correct car pour les composantes spatiales physiques de A_μ, nous avons un $-$ qui vient de notre métrique.

Nous avons vu un peu plus haut que nous pouvions faire disparaître formellement le boson de Goldstone en fixant la jauge de manière appropriée. Il est cependant choquant qu'en travaillant dans une jauge particulière, un champ disparaisse. Tel n'est pas le cas en réalité. En effet, les champs vectoriels massifs sont décrits par l'équation de Proca

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2A^\nu = j^\nu. \tag{4.41}$$

Si nous calculons la quadridivergence de cette équation, nous obtenons

$$m^2\partial_\nu A^\nu = \partial_\nu j^\nu \tag{4.42}$$

4. Ceci est tout-à-fait prévisible vu que nous avons développé le champ autour d'un minimum. La dérivée par rapport à ϕ_1 ou ϕ_2 du potentiel exprimé en ces champs et évaluée en $\phi_1 = \phi_2 = 0$ doit donner zéro et non une constante.

grâce à l'antisymétrie de $F^{\mu\nu}$. Si nous supposons que le courant est conservé, l'équation de Proca se réduit à

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right) A^\nu = j^\nu \tag{4.43}$$

avec la condition

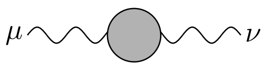
$$\partial_\nu A^\nu = 0. \tag{4.44}$$

Cette condition est la seule que nous puissions imposer aux champs vectoriels massifs car, pour ces derniers, nous n'avons pas la symétrie de jauge à cause du terme de masse. Les champs vectoriels massifs possèdent donc trois degrés de liberté (deux modes transverses et un mode longitudinal). Par contre, pour les champs vectoriels non massifs, rien n'impose *a priori* la condition (4.44). Cependant, comme le terme de masse est absent dans ce cas, la théorie est invariante de jauge. Pour connaître le nombre réel de degrés de liberté, il faut fixer la jauge afin d'éviter des redondances. Nous choisirons la condition de jauge radiative

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \qquad \text{avec} \qquad A_0 = 0, \tag{4.45}$$

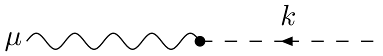
qui montre qu'un champ vectoriel non massif ne peut posséder en fait que deux degrés de liberté (les deux modes transverses[5]). Ainsi, lorsque nous brisons la symétrie de jauge, le boson vectoriel acquiert un nouveau degré de liberté tandis qu'on perd le BNG. On dit souvent que le BNG est *mangé* par le boson de jauge. Il est assez étonnant de voir que toutes les particules sans masse disparaissent spontanément de la théorie.

Regardons du côté de l'amplitude de polarisation du vide[6]. L'identité de Ward-Takahashi contraint cette amplitude à être transverse, autrement dit à avoir la forme



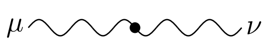
$$= \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right) \Pi(k^2). \tag{4.46}$$

Nous avons vu dans la section 2.2 que le BNG possédait les bons nombres quantiques pour intervenir comme état intermédiaire. Le troisième terme de (4.40) couple directement le boson de jauge au BNG. De ce terme d'interaction, nous pouvons tirer immédiatement le vertex



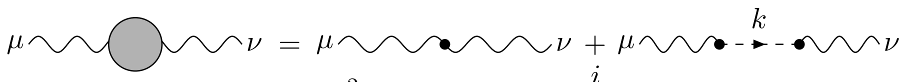
$$= i\sqrt{2} e \phi_0 \left(-ik^\mu\right) = m_A k^\mu. \tag{4.47}$$

De même, nous pouvons traiter le terme de masse comme un vertex dans la théorie des perturbations, ce qui donne



$$= i m_A^2 g^{\mu\nu}. \tag{4.48}$$

Nous pouvons ainsi facilement calculer les contributions principales à l'amplitude de polarisation du vide



$$\begin{aligned} &= i m_A^2 g^{\mu\nu} + \left(-i m_A k^\mu\right) \frac{i}{k^2} \left(i m_A k^\nu\right) \\ &= i m_A^2 \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right), \end{aligned}$$

5. Nous pouvons comprendre ceci d'une autre manière. Lorsque le boson de jauge est massif, nous pouvons toujours nous placer dans le référentiel comobile. Le boson de jauge massif est une particule de spin 1 dans son référentiel au repos. Il ne fait donc aucune différence entre les modes transverses et le mode longitudinal. Par contre, lorsque le boson de jauge ne possède pas de masse, il voyage à la vitesse de la lumière. Le mode longitudinal n'a alors aucun sens.

6. On appelle aussi cette amplitude self-énergie du boson de jauge.

qui est effectivement transverse.

Nous avons a présent terminé la discussion du mécanisme de Higgs dans le cas abélien. Le mécanisme que nous venons d'étudier a été appliqué la première fois dans la théorie de la supraconductivité. Comme le boson de jauge acquiert une masse non nulle, le champ électromagnétique externe ne peut pénétrer dans un matériau supraconducteur qu'à une profondeur m_A^{-1}. Ceci explique l'effet Meissner, l'exclusion macroscopique du champ magnétique dans un supraconducteur.

4.2.2 Cas non-abélien

Il est assez facile d'étendre le mécanisme de Higgs aux systèmes possédant une symétrie de jauge non-abélienne. La seule petite difficulté opérationnelle vient du fait qu'on manipule maintenant des matrices et non plus des nombres.

Considérons un système de N champs scalaires complexes ϕ_i qui apparaissent dans un lagrangien

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left(F^a_{\mu\nu}\right)^2 + |D_\mu\phi|^2 - V(\phi) \tag{4.49}$$

invariant sous les transformations de jauge locale d'un groupe G

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\alpha^a(x)t^a}\phi(x) \tag{4.50}$$

$$A^a_\mu(x) \rightarrow A'^a_\mu(x) = A^a_\mu(x) + \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha^a(x) + f^{abc}A^b_\mu(x)\alpha^c(x) \tag{4.51}$$

où les t^a sont les matrices représentant les générateurs de G. Développons d'abord le terme cinétique des champs ϕ_i avant de l'évaluer au vide

$$\begin{aligned} |D_\mu\phi|^2 &= \left[\left(\partial_\mu - igA^a_\mu t^a\right)\phi\right]^\dagger \left[\left(\partial^\mu - igA^{b\mu}t^b\right)\phi\right] \\ &= |\partial_\mu\phi_i|^2 + igA^a_\mu\phi^\dagger t^a(\partial^\mu\phi) - igA^{a\mu}(\partial_\mu\phi^\dagger)t^a\phi + g^2(\phi^\dagger t^a t^b\phi)A^a_\mu A^{b\mu} \\ &= |\partial_\mu\phi_i|^2 + igA^a_\mu\phi^\dagger t^a(\partial^\mu\phi) - igA^{a\mu}(\partial_\mu\phi^\dagger)t^a\phi + \frac{1}{2}\left[g^2(\phi^\dagger\{t^a,t^b\}\phi)\right]A^a_\mu A^{b\mu}. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Supposons que les champs ϕ_i acquièrent les valeurs moyennes au vide

$$\langle\phi_i\rangle = (\phi_0)_i \tag{4.53}$$

Le développement des champs autour de ce vide inséré dans le terme cinétique va générer *via* le dernier terme une masse pour les champs de jauge vu la structure

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{1}{2}m^2_{ab}A^a_\mu A^{b\mu} \tag{4.54}$$

avec la matrice de masse

$$m^2_{ab} = g^2(\phi_0^\dagger\{t^a,t^b\}\phi_0). \tag{4.55}$$

Cette matrice est semi-définie positive vu que les éléments diagonaux sont (sans somme ici)

$$m^2_{aa} = 2g^2\left|t^a\phi_0\right|^2 \geq 0.$$

Il faudra diagonaliser cette matrice pour obtenir les masses des champs de jauge (états propres). Cependant, il se peut qu'un générateur t^a laisse le vide invariant, c'est-à-dire

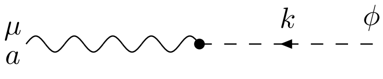
$$t^a\phi_0 = 0. \tag{4.56}$$

Dans ce cas, le boson de jauge correspondant restera sans masse.

Comme dans le cas abélien, les bosons de jauge qui acquièrent une masse gagnent le degré de liberté manquant en absorbant les BNG. Ces derniers assurent encore la bonne forme de l'amplitude de polarisation du vide comme nous allons le montrer. Pour évaluer cette amplitude, nous avons besoin de connaître l'expression du vertex qui couple les bosons de jauge aux BNG. Pour ce faire, nous ne garderons que les termes à deux champs dans la partie cinétique du lagrangien. Nous trouvons immédiatement

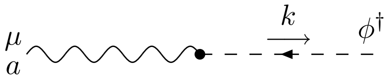
$$\Delta\mathcal{L} = igA^a_\mu \phi_0^\dagger t^a (\partial^\mu \phi) - igA^{a\mu}(\partial_\mu \phi^\dagger) t^a \phi_0 \tag{4.57}$$

où le BNG relatif au générateur brisé t^a est la composante de ϕ parallèle à $\phi_0^\dagger t^a$. Nous tirons les vertex



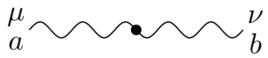
$$= i^2 g(-ik^\mu)\phi_0^\dagger t^a = igk^\mu \phi_0^\dagger t^a \tag{4.58}$$

et



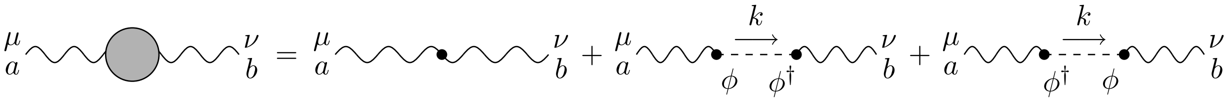
$$= i(-i)g(ik^\mu)t^a\phi_0 = igk^\mu t^a \phi_0. \tag{4.59}$$

Nous traitons également le terme (4.54) comme un vertex, ce qui donne



$$= im^2_{ab} g^{\mu\nu} = ig^2(\phi_0^\dagger \{t^a, t^b\} \phi_0). \tag{4.60}$$

Comme dans le cas abélien, nous pouvons facilement calculer les contributions principales à l'amplitude de polarisation du vide



$$\begin{aligned} &= im^2_{ab} g^{\mu\nu} + (-igk^\mu \phi_0^\dagger t^a)\frac{i}{k^2}(-igk^\nu t^b \phi_0) + (igk^\nu \phi_0^\dagger t^b)\frac{i}{k^2}(igk^\mu t^a \phi_0) \\ &= im^2_{ab}\left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right), \end{aligned}$$

qui possède, comme il se doit, la structure transverse.

4.2.3 Exemples de mécanismes de Higgs dans le cas non-abélien

Nous pouvons à présent nous faire la main sur deux exercices pour voir concrètement et explicitement ce qui arrive dans un mécanisme de Higgs. La structure de départ est bien entendu analogue à la situation abstraite décrite dans la section précédente. Nous ne ferons que particulariser le groupe de symétrie de jauge G.

Brisure du groupe $SO(3)$

Le groupe $SO(3)$ possède trois générateurs hermitiens. Ils répondent à l'algèbre

$$[t^a, t^b] = i\epsilon^{abc} t^c. \tag{4.61}$$

Nous prendrons pour les représenter les matrices [31]

$$t^1 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad t^2 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad t^3 = i\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.62}$$

Considérons une théorie se basant sur trois champs scalaires réels ϕ_i intervenant dans le lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi_i\right)^2 - \frac{1}{2}\mu^2 \phi_i^2 - \frac{\lambda}{4}\left(\phi_i^2\right)^2. \tag{4.63}$$

Ce lagrangien est manifestement invariant sous une transformation de $SO(3)$

$$\phi(x) \to \phi'(x) = e^{-i\theta^a t^a}\phi(x). \tag{4.64}$$

Nous promouvons $SO(3)$ en un groupe de symétrie de jauge locale. Il nous faut opérer la substitution

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a t^a = \partial_\mu + gA_\mu^a T^a \tag{4.65}$$

où $t^a = iT^a$ permettant ainsi de ne travailler qu'avec des nombres réels. Le terme cinétique nous donne

$$\frac{1}{2}\left(D_\mu \phi_i\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi_i\right)^2 + gA_\mu^a \phi^T T^a \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} g^2 \phi^T T^a T^b \phi. \tag{4.66}$$

Grâce à la liberté que nous octroie le groupe $SO(3)$, nous pouvons choisir comme vide

$$\phi_0 = (0, 0, v) \tag{4.67}$$

où $v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}$. Il est inutile de refaire le calcul du potentiel en les nouveaux champs, car nous sommes dans le même cas que dans le modèle σ linéaire. Le potentiel est alors identique à celui du lagrangien (2.49) où $k = 1{,}2$. Nous avons donc deux BNG. Par conséquent, seuls deux champs de jauge pourront acquérir une masse. Ceci se vérifie très rapidement en calculant la matrice de masse

$$m_{ab}^2 = g^2 \phi_0^T T_a T_b \phi_0. \tag{4.68}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
T_1\phi_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -v \\ 0 \end{pmatrix}, \\
T_2\phi_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
T_3\phi_0 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} = 0.
\end{aligned}$$

La matrice de masse est donc

$$m_{ab}^2 = g^2 \begin{pmatrix} v^2 & & \\ & v^2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.69}$$

La matrice étant déjà sous forme diagonale, nous pouvons dire que les champs de jauge A_μ^1 et A_μ^2 acquièrent une masse $m = gv$ alors que A_μ^3 reste non massif. La figure 4.3 illustre l'action des générateurs sur le vide. Vu que seul T_3 conserve le vide, il n'y a que le boson de jauge A_μ^3 qui n'obtient pas de masse.

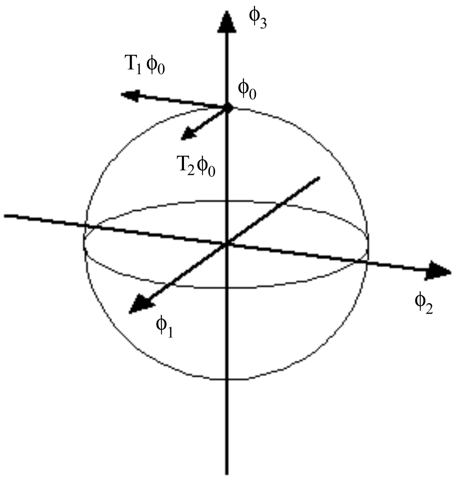


FIG. 4.3 – *Lorsque le vide est aligné suivant la direction de ϕ_3, le générateur T_3 le laisse invariant. Les générateurs T_1 et T_2 le font tourner dans les directions indiquées.*

Brisures du groupe $SU(3)$

Le groupe $SU(3)$ possède huit générateurs hermitiens. Ils répondent à l'algèbre

$$[^a, t^b] = if^{abc}t^c \tag{4.70}$$

où les f_{abc} sont les constantes de structure totalement antisymétriques. Nous choisissons de travailler dans la représentation adjointe. Dans ce cas, les éléments des matrices de cette représentation ne sont rien d'autres que les constantes de structure [40]

$$(t^b)_{ac} = if^{abc}. \tag{4.71}$$

On vérifie très rapidement grâce à l'identité de Jacobi que ce sont bien des générateurs de l'algèbre. Comme les constantes de structure sont réelles et antisymétriques, la représentation adjointe sera toujours une représentation réelle. Considérons alors un lagrangien faisant intervenir huit champs scalaires réels ϕ_i

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_i\right)^2 - V(\phi) \tag{4.72}$$

invariant sous les transformations de $SU(3)$. Rendons maintenant la symétrie de jauge locale et regardons ce qu'il advient de la dérivée covariante

$$\begin{aligned}(D_\mu\phi)_a &= \partial_\mu\phi_a - igA^b_\mu(t^b)_{ac}\phi_c \\ &= \partial_\mu\phi_a + gf^{abc}A^b_\mu\phi_c.\end{aligned} \tag{4.73}$$

Les masses des champs de jauge viendront du terme

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{g^2}{2}\left(f^{abc}A^b_\mu\phi_c\right)^2, \tag{4.74}$$

obtenu directement du terme cinétique $\frac{1}{2}\left(D_\mu\phi_i\right)^2$. Une manière plus claire d'écrire ce terme s'obtient en introduisant la quantité

$$\mathbf{\Phi} = \phi_c t^c \tag{4.75}$$

où les t^c sont les matrices représentant les générateurs dans la représentation fondamentale. Avec cette quantité, nous allons montrer que (4.74) peut se réécrire comme suit

$$\Delta\mathcal{L} = -g^2 \operatorname{tr}\left([t^a,\mathbf{\Phi}][t^b,\mathbf{\Phi}]\right) A^a_\mu A^{b\mu} \tag{4.76}$$

Il est plus naturel de partir de cette dernière expression et de vérifier qu'elle redonne bien (4.74). Commençons par développer les commutateurs intervenant dans la trace

$$[t^a,\mathbf{\Phi}] = [t^a,\phi_c t^c] = \phi_c[t^a,t^c] = if^{acd}\phi_c t^d. \tag{4.77}$$

En réinjectant cette expression dans (4.76) et en faisant attention à la collision d'indices, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{L} &= g^2 f^{acd} f^{bef} \operatorname{tr}(t^d t^f)\phi_c\phi_e A^a_\mu A^{b\mu} \\
&= g^2 f^{acd} f^{bef}\, \frac{1}{2}\,\delta^{df}\,\phi_c\phi_e A^a_\mu A^{b\mu} \\
&= \frac{g^2}{2}\left(f^{acd} A^a_\mu \phi_c\right)\left(f^{bed} A^{b\mu}\phi_e\right) \\
&= \frac{g^2}{2}\left(f^{dac} A^a_\mu \phi_c\right)\left(f^{dbe} A^{b\mu}\phi_e\right) \\
&= \frac{g^2}{2}\left(f^{abc} A^a_\mu \phi_c\right)^2
\end{aligned}$$

ce qui est bien le terme (4.74). Supposons que $\mathbf{\Phi}$ acquière une valeur moyenne non nulle au vide

$$\langle\mathbf{\Phi}\rangle = \mathbf{\Phi}_0 \tag{4.78}$$

où $\mathbf{\Phi}_0$ est une matrice hermitienne 3×3 de trace nulle vu que $\mathbf{\Phi}$ est une combinaison linéaire des t^c. Par conséquent, nous devrions, en principe, diagonaliser $\mathbf{\Phi}_0$ pour voir ses effets. Nous avons toute liberté de choisir le vide en fixant les valeurs propres à condition que leur somme reste nulle. Nous envisagerons deux orientations.

Supposons d'une part que $\mathbf{\Phi}_0$ possède l'orientation

$$\mathbf{\Phi}_0 = v\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix} \tag{4.79}$$

où v est un nombre réel. Nous remarquons rapidement que cette matrice commute avec quatre des huit générateurs t^c

$$t^a = \begin{pmatrix} \tau^a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad t^8 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix} \tag{4.80}$$

où $\tau^a = \frac{\sigma^a}{2}$. Ce vide brise spontanément le groupe $SU(3)$ en $SU(2)\times U(1)$. Les bosons de jauge correspondant à ces générateurs resteront donc sans masse comme l'indique (4.76). Par contre, les quatre bosons de jauge restant correspondant aux générateurs brisés

$$t^4 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} & & 1 \\ & & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad t^5 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} & & i \\ & & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$t^6 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} & & 0 \\ & & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad t^7 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} & & 0 \\ & & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \tag{4.81}$$

devront probablement acquérir une masse. Pour vérifier cette assertion, nous calculons la matrice de masse pour ensuite la diagonaliser si besoin est. Nous obtenons les commutateurs suivants :

$$\begin{aligned}
[t^4, \mathbf{\Phi}_0] &= \frac{v}{2}\left[\begin{pmatrix} & & 1 \\ & & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & 1 \\ & & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{v}{2}\left[\begin{pmatrix} & & -2 \\ & & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & & 1 \\ & & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{v}{2}\begin{pmatrix} & & -3 \\ & & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ainsi que

$$[t^5, \mathbf{\Phi}_0] = \frac{v}{2}\begin{pmatrix} & & -3i \\ & & 0 \\ -3i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [t^6, \mathbf{\Phi}_0] = \frac{v}{2}\begin{pmatrix} & & 0 \\ & & -3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad [t^7, \mathbf{\Phi}_0] = \frac{v}{2}\begin{pmatrix} & & 0 \\ & & 3i \\ 0 & 3i & 0 \end{pmatrix}.$$

De nouveau, la matrice de masse est déjà sous forme diagonale

$$m_{ab}^2 = 2g^2 \operatorname{tr}\Big([t^a, \mathbf{\Phi}][t^b, \mathbf{\Phi}]\Big) A_\mu^a A^{b\mu} = g^2 v^2 \operatorname{diag}(0, 0, 0, 9, 9, 9, 9, 0). \tag{4.82}$$

Comme annoncé, les bosons de jauge A_μ^1, A_μ^2, A_μ^3 et A_μ^8 restent sans masse puisqu'ils sont associés à des générateurs qui préservent le vide. Les autres bosons de jauge acquièrent tous une même masse $m = 3gv$.

Supposons d'autre part que $\mathbf{\Phi}_0$ possède l'orientation

$$\mathbf{\Phi}_0 = v\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.83}$$

Nous remarquons tout aussi rapidement qu'il n'y a que les deux générateurs

$$t^3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \qquad t^8 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix} \tag{4.84}$$

qui commutent avec $\mathbf{\Phi}_0$. La symétrie $SU(3)$ de départ est brisée en $U(1) \times U(1)$. Nous nous attendons ainsi à trouver au plus 6 masses. Les commutateurs donnent

$$[t^1, \mathbf{\Phi}_0] = \frac{v}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & & \\ 0 & & \end{pmatrix}, \quad [t^2, \mathbf{\Phi}_0] = \frac{v}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2i & 0 \\ 2i & & \\ 0 & & \end{pmatrix}, \quad [t^4, \mathbf{\Phi}_0] = \frac{v}{2}\begin{pmatrix} & & -1 \\ & & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$[t^5,\mathbf{\Phi}_0] = \frac{v}{2}\begin{pmatrix} & & -i \\ & & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [t^6,\mathbf{\Phi}_0] = \frac{v}{2}\begin{pmatrix} & & 0 \\ & & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [t^7,\mathbf{\Phi}_0] = \frac{v}{2}\begin{pmatrix} & & 0 \\ & & -i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de masse vaut

$$m^2_{ab} = g^2 v^2 \,\mathrm{diag}(4,4,0,1,1,1,1,0). \tag{4.85}$$

Le fait d'avoir choisi un vide différent a provoqué une autre brisure spontanée de symétrie. Ici, les bosons de jauge massifs n'ont pas tous la même masse. A^1_μ et A^2_μ acquièrent une masse $m_1 = 2gv$ alors que A^4_μ, A^5_μ, A^6_μ et A^7_μ n'obtiennent qu'une masse $m_2 = gv$. Les générateurs associés à ces deux groupes de bosons de jauge massifs n'ont donc pas le même effet sur le vide.

Pour construire une théorie, il faut donc spécifier le vide. Notons tout de même que deux vides reliés par une transformation du groupe ne provoquent pas deux mécanismes de Higgs différents à cause de la diagonalisation de la matrice de masse. Si nous faisons tourner le vide, il suffit de faire tourner les champs (changement de base) pour revenir à la situation de départ.

Chapitre 5

Le petit Higgs

Le Modèle Standard est une excellente théorie effective qui permet de décrire presque toutes les expériences de la physique des particules. Mais jusqu'à quelle échelle Λ cette théorie effective est-elle valide? Le Modèle Standard s'accorde avec les données à haute énergie. Les prédictions incluant les corrections à une boucle sont bien vérifiées par les expériences de précision. Ceci suggère que le Modèle Standard reste une description valide de la Nature jusqu'à une énergie de l'ordre du TeV avec une masse pour le Higgs $\lesssim$ 200 GeV [32].

Cependant, un des problèmes majeurs du Modèle Standard est le problème de hiérarchie, c'est-à-dire l'énorme différence existant entre l'échelle de Planck et l'échelle électrofaible. Les expériences à basse énergie ont clairement montré que la physique derrière le Modèle Standard est perturbative, ceci signifie que la masse du Higgs ne peut pas être très grande et comme le Higgs reçoit des contributions quadratiquement divergentes à sa masse (voir figure 5.1), il demande donc un ajustement fin de l'échelle de Planck à l'échelle électrofaible. La situation n'est pas fort satisfaisante, aussi la solution à ce problème semble être l'existence d'une nouvelle physique couplée faiblement aux alentours du TeV qui permettrait de supprimer les divergences quadratiques. Plusieurs voies sont actuellement explorées, dont la supersymétrie.

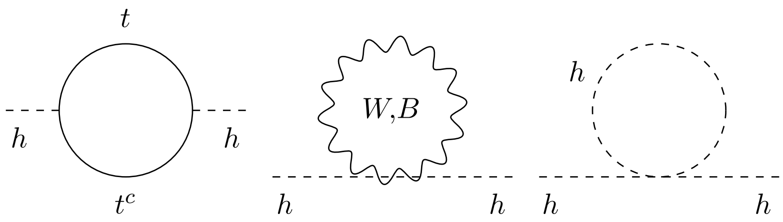


FIG. 5.1 – *Contributions quadratiquement divergentes à la masse du Higgs dans le Modèle Standard : boucle du top, boucles des bosons de jauge $SU(2) \times U(1)$ et boucle du Higgs.*

Dans les modèles supersymétriques (où la supersymétrie est brisée aux alentours du TeV), les contributions quadratiquement divergentes du Modèle Standard sont compensées par celles apportées par les boucles de superpartenaires. La caractéristique la plus attrayante du modèle standard supersymétrique minimal est qu'il suggère une unification des constantes de couplage. L'ennui est que ce modèle fait appel à plus de 100 nouveaux paramètres et que la masse du Higgs demande un ajustement fin des paramètres pour que la brisure électrofaible soit correcte. Il existe malgré tout des modèles supersymétriques qui améliorent la situation, c'est pourquoi des superpartenaires faiblement couplés restent une option intéressante.

Récemment, une nouvelle classe de modèles, appelés théories du petit Higgs [33] à [36], permettent d'obtenir un boson de Higgs léger avec une physique couplée faiblement jusqu'à une dizaine de TeV. Le boson de Higgs y est décrit comme un pseudo-boson de Nambu-Goldstone (PBNG) ce qui le rend non massif au niveau arbre. Sa masse est protégée par une symétrie globale qui est spontanément brisée. Cette symétrie est explicitement brisée par des opérateurs couplés faiblement qui deviennent les couplages normaux du Modèle Standard en-dessous du TeV. Le "truc" du petit Higgs est qu'aucun opérateur ne peut explicitement briser seul la symétrie globale protégeant la masse du Higgs et donc aucune contribution quadratique n'existe à une boucle.

Nous exposerons, en partie, deux de ces modèles et nous développerons en détails ce qui concerne les brisures spontanées de symétrie. Mais avant cela, nous allons rappeler ce qu'est un pseudo-boson de Nambu-Goldstone.

5.1 Les pseudo-bosons de Nambu-Goldstone

Jusqu'à présent, nous n'avons étudié que des lagrangiens où le groupe de symétrie du terme potentiel était le même que celui du reste du lagrangien. Imaginons, à présent, un certain lagrangien où le terme potentiel est invariant sous les transformations d'un groupe de pseudosymétries G' contenant le groupe de symétrie du lagrangien G [37]. Supposons que le vide que nous obtenons soit invariant sous les transformations du sous-groupe S de G'. Comme le vide n'est déterminé que par le potentiel, il n'y a aucune raison pour que S soit contenu dans G. Seules les transformations appartenant aussi bien à S qu'à G seront les vraies symétries non brisées de la théorie. Le reste des transformations de S sont des symétries du vide au niveau arbre mais pas du reste de la théorie.

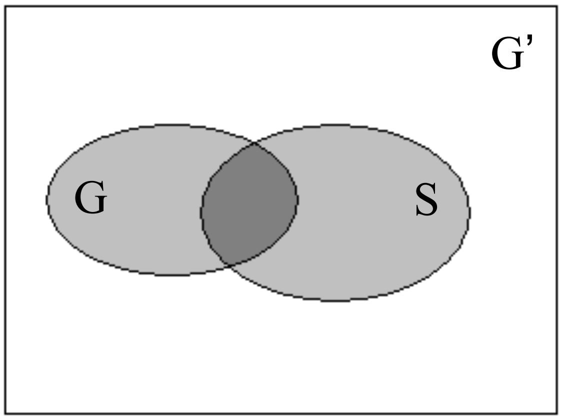


FIG. 5.2 – *La partie légèrement grisée de G correspond aux BNG. Celle de S correspond aux PBNG vu qu'elle n'appartient pas à G. L'intersection grisée contient toutes les symétries non brisées du lagrangien par le vide.*

En vertu du théorème de Goldstone la brisure spontanée de pseudosymétrie $G' \to S$ génère des bosons de spin 0 sans masse, un pour chaque générateur brisé. Seuls les générateurs brisés appartenant à G vont apporter les vrais BNG, ceux qui sont éliminés par le mécanisme de Higgs. Les bosons correspondant aux autres générateurs brisés sont sans masse au niveau arbre, mais en acquièrent une grâce aux corrections quantiques. Ce sont les pseudo-bosons de Nambu-Goldstone.

Les PBNG possèdent une petite masse vu qu'elle n'est due qu'aux corrections apportées par le calcul des boucles. Aussi, les pseudosymétries peuvent servir de modèle pour les symétries approchées observées dans la nature. Cette masse naturellement petite permet de voir le Higgs comme faisant partie d'un multiplet de PBNG dans les modèles à petit Higgs.

5.2 Premier modèle : Le plus petit Higgs

Nous commençons par le modèle proposé par Arkani-Hamed, Cohen, Katz et Nelson [33]. La structure du modèle est la suivante. Le modèle du plus petit Higgs part d'une symétrie globale $SU(5)$ ainsi que d'un sous-groupe jaugé localement $G_1 \times G_2 = [SU(2)_1 \times U(1)_1] \times [SU(2)_2 \times U(1)_2]$. La symétrie globale $SU(5)$ est brisée en son sous-groupe $SO(5)$ par une valeur moyenne au vide f des bosons. Le vide brise en même temps le groupe de jauge $G_1 \times G_2$ en son sous-groupe diagonal $SU(2) \times U(1)$ qui sera identifié au groupe de jauge du Modèle Standard $SU(2)_L \times U(1)_Y$. La brisure de symétrie globale $SU(5) \to SO(5)$ engendre 14 BNG qui se transforment sous le sous groupe de jauge diagonal $SU(2) \times U(1)$ comme un singulet réel (1 BNG), un triplet réel (3 BNG), un doublet complexe (4 PBNG) qui sera identifié au doublet du Higgs et un triplet complexe (6 PBNG). Le singulet réel et le triplet réel sont absorbés par le mécanisme de Higgs pour donner une masse aux bosons de jauge associés. Le doublet complexe et le triplet complexe restent sans masse à ce niveau. Les corrections quantiques faisant intervenir les couplages de jauge et de Yukawa du modèle brisent la symétrie globale $SO(5)$. Ils engendrent une masse au triplet complexe et une valeur moyenne au vide non nulle à la composante neutre du doublet de Higgs, ce qui aura pour effet de déclencher la brisure spontanée de la symétrie électrofaible $SU(2)_L \times U(1)_Y$.

Nous allons tenter de détailler quelque peu ce modèle. Il est basé sur un modèle σ non linéaire $SU(5)/SO(5)$. Les auteurs considèrent une matrice symétrique Φ qui se transforme sous $SU(5)$ comme suit :

$$\Phi \to \Phi' = V\Phi V^T, \qquad V = e^{i\alpha_a t_a}. \tag{5.1}$$

Ils choisissent ensuite le vide de telle sorte qu'il pointe dans la direction Σ_0

$$\Sigma_0 = \begin{pmatrix} & & \mathbf{1}_{2\times 2} \\ & 1 & \\ \mathbf{1}_{2\times 2} & & \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Pour déterminer quels sont les BNG et les PBNG du modèle, nous avons besoin de connaître les générateurs de $SU(5)$ qui laissent ou non le vide invariant. Une transformation de symétrie infinitésimale va nous permettre de trouver la condition à laquelle doit satisfaire les générateurs non brisés. Nous trouvons ainsi

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= (1 + i\alpha_a t_a)\Sigma_0(1 + i\alpha_b t_b^T) \\ &= \Sigma_0 + i\alpha_a(t_a\Sigma_0 + \Sigma_0 t_a^T) + \mathcal{O}(2). \end{aligned}$$

Les générateurs non brisés T_a vérifient par conséquent

$$T_a\Sigma_0 + \Sigma_0 T_a^T = 0. \tag{5.3}$$

Or comme

$$(t_a\Sigma_0)^T = \Sigma_0 t_a^T, \tag{5.4}$$

l'identité (5.3) revient à dire que $T_a\Sigma_0$ est une matrice antisymétrique. En partant avec un ensemble de générateurs de $SU(5)$, il y a moyen de trouver les combinaisons linéaires de ces derniers qui rendent la matrice $t_a\Sigma_0$ soit symétriques, soit antisymétriques. Comme les générateurs non brisés doivent rendre la matrice $t_a\Sigma_0$ antisymétrique, les générateurs brisés la rendent symétrique. Ainsi, les générateurs brisés X_a satisfont à

$$X_a\Sigma_0 - \Sigma_0 X_a^T = 0. \tag{5.5}$$

Vu que la brisure spontanée de symétrie est $SU(5) \to SO(5)$, nous nous attendons à obtenir $24 - 10$ générateurs brisés. En partant d'une base de $SU(5)$ et en utilisant les critères (5.3) et (5.5), nous avons pu construire les générateurs (non normalisés) du modèle et les classer suivant qu'ils laissent ou non le vide Σ_0 invariant. Nous avons alors obtenu les 10 générateurs non brisés T_a

$$\begin{gathered}
\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & -1 \\ & & & -1 & 0 \end{pmatrix},
\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & & & \\ i & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & -i \\ & & & i & 0 \end{pmatrix},
\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ 0 & -1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & -1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} -5 & & & & \\ & -5 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 5 & \\ & & & & 5 \end{pmatrix}, \\
\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} & & 0 & & \\ & & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ & & 0 & & \\ & & -1 & & \end{pmatrix},
\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} & & 1 & & \\ & & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & -1 & & \\ & & 0 & & \end{pmatrix},
\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} & & 0 & & \\ & & -i & & \\ 0 & i & 0 & 0 & i \\ & & 0 & & \\ & & -i & & \end{pmatrix},
\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} & & -i & & \\ & & 0 & & \\ i & 0 & 0 & i & 0 \\ & & -i & & \\ & & 0 & & \end{pmatrix}, \\
\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & -1 & \\ & & 0 & & \\ & -1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix},
\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} & & & & -i \\ & & & i & \\ & & 0 & & \\ & -i & & & \\ i & & & & \end{pmatrix},
\end{gathered} \tag{5.6}$$

ainsi que les 14 générateurs brisés X_a

$$\begin{gathered}
\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix},
\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & & & \\ i & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & i \\ & & & -i & 0 \end{pmatrix},
\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ 0 & -1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & 0 \\ & & & 0 & -1 \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 4 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}, \\
\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} & & 0 & & \\ & & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & & \\ & & 1 & & \end{pmatrix},
\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} & & 1 & & \\ & & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & 1 & & \\ & & 0 & & \end{pmatrix},
\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} & & 0 & & \\ & & -i & & \\ 0 & i & 0 & 0 & -i \\ & & 0 & & \\ & & i & & \end{pmatrix},
\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} & & -i & & \\ & & 0 & & \\ i & 0 & 0 & -i & 0 \\ & & i & & \\ & & 0 & & \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} & & & & 0 \\ & & & & 1 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ i & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} & & & & 0 \\ & & & & -i \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{gathered}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} &&&&1\\ &&&1&\\ &&0&&\\ &1&&&\\ 1&&&& \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} &&&&-i\\ &&&-i&\\ &&0&&\\ &i&&&\\ i&&&& \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

Les BNG sont associés aux générateurs qui font tourner le vide dans les directions brisées. Les auteurs du modèle paramétrisent ces fluctuations dans les directions brisées par le champ Σ d'un modèle σ non linéaire

$$\Sigma = e^{-i\frac{\Pi}{f}}\,\Sigma_0\,e^{i\frac{\Pi^T}{f}} = e^{2i\frac{\Pi}{f}}\,\Sigma_0 \tag{5.8}$$

où Π est la matrice des BNG

$$\Pi = \pi_a X_a, \tag{5.9}$$

ce qui a permis d'écrire la dernière égalité de (5.8) grâce à (5.5).

Il faut encore jauger le sous-groupe $G_1 \times G_2$ de $SU(5)$. Les générateurs de G_1 sont incorporés dans $SU(5)$ comme suit :

$$Q_1^a = \begin{pmatrix} \sigma^a/2 & \\ & \mathbf{0}_{3\times 3} \end{pmatrix}, \qquad Y_1 = \frac{1}{10}\,\mathrm{diag}(-3,\,-3,2,2,2) \tag{5.10}$$

et ceux de G_2 comme suit :

$$Q_2^a = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3\times 3} & \\ & -\sigma^{a*}/2 \end{pmatrix}, \qquad Y_2 = \frac{1}{10}\,\mathrm{diag}(-2,\,-2,\,-2,3,3). \tag{5.11}$$

En comparant ces générateurs avec ceux que nous avons trouvé, nous voyons qu'ils sont combinaisons linéaires de générateurs brisés et non brisés. Le vide Σ_0 qui brise $SU(5)$ en $SO(5)$ brise également le groupe de jauge $G_1 \times G_2$ en $SU(2) \times U(1)$ diagonal identifié avec le groupe de jauge du Modèle Standard $SU(2)_L \times U(1)_Y$ et dont les générateurs sont T_1, T_2, T_3 et T_4. Les champs scalaires se transforment sous le groupe de jauge suivant la loi

$$\Sigma \to \Sigma' = U\Sigma U^T. \tag{5.12}$$

où U est un élément du groupe de jauge. Les quatres BNG sont donc associés aux générateurs brisés X_1, X_2, X_3 et X_4. Dans ce cas, en les éliminant de la matrice Π, cette dernière ne contient plus que les PBNG et s'écrit alors explicitement

$$\Pi = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2\times 2} & \frac{h^\dagger}{\sqrt{2}} & \phi^\dagger \\ \frac{h}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{h^*}{\sqrt{2}} \\ \phi & \frac{h^T}{\sqrt{2}} & \mathbf{0}_{2\times 2} \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

avec

$$h = (h^+, h^0) \qquad \text{et} \qquad \phi = \begin{pmatrix} \phi^{++} & \frac{\phi^+}{\sqrt{2}} \\ \frac{\phi^+}{\sqrt{2}} & \phi^0 \end{pmatrix}. \tag{5.14}$$

où h se transforme comme un doublet complexe sous les transformations de jauge non brisées $SU(2)\times U(1)$ diagonal et ϕ se transforme comme un triplet complexe. Le doublet h est identifié au doublet de Higgs du Modèle Standard.

Sans entrer dans les détails, le lagrangien effectif du modèle, invariant sous le groupe de jauge $G_1 \times G_2$, peut s'écrire

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_\Sigma + \mathcal{L}_Y \tag{5.15}$$

où $\mathcal{L}_G$ consiste en les termes purement de jauge, $\mathcal{L}_F$ en les termes cinétiques fermioniques, $\mathcal{L}_\Sigma$ en les termes du modèle σ du plus petit Higgs et $\mathcal{L}_Y$ en des couplages de Yukawa entre les fermions et les PBNG. Le terme du secteur scalaire dans le modèle σ non linéaire s'écrit

$$\mathcal{L}_\Sigma = \frac{1}{2}\frac{f^2}{4}\,\mathrm{tr}\left[|D_\mu\Sigma|^2\right] \tag{5.16}$$

où le facteur $\frac{1}{2}$ supplémentaire a été introduit pour tenir compte du fait que nous avons affaire à deux répliques de $SU(2) \times U(1)$. Pour obtenir le lagrangien effectif en termes des champs physiques, il faut le linéariser. En développant en puissance de $\frac{1}{f}$ l'expression (5.8), on obtient alors

$$\Sigma = \Sigma_0 + \frac{2i}{f}\begin{pmatrix} \phi & \frac{h^T}{\sqrt{2}} & \mathbf{0}_{2\times 2} \\ \frac{h}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{h^*}{\sqrt{2}} \\ \mathbf{0}_{2\times 2} & \frac{h^\dagger}{\sqrt{2}} & \phi^\dagger \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\frac{1}{f^2}). \tag{5.17}$$

Le secteur scalaire (5.16) du lagrangien possède des dérivées covariantes. La dérivée covariante est ici donnée par

$$D_\mu\Sigma = \partial_\mu\Sigma - i(A_\mu\Sigma + \Sigma A_\mu^T) \tag{5.18}$$

où

$$A_\mu = \sum_{j=1}^{2}\left(g_j W_{j\mu}^a Q_j^a + g_j' B_{j\mu} Y_j\right). \tag{5.19}$$

Comme la valeur moyenne au vide de Σ brise la symétrie de jauge $G_1 \times G_2$ en son sous-groupe diagonal $SU(2)_L \times U(1)_Y$, de (5.6), (5.10) et (5.11), nous tirons directement que les combinaisons

$$Q^a = (Q_1^a + Q_2^a) \qquad \text{et} \qquad Y = Y_1 + Y_2 \tag{5.20}$$

ne seront pas brisées. Cependant, dans (5.19), les générateurs des deux copies $SU(2) \times U(1)$ ne possèdent *a priori* pas les mêmes constantes de couplage ($g_1 \neq g_2$). On effectue donc, comme dans la brisure électrofaible, une rotation des champs de jauge. Nous avons ainsi en omettant les indices μ et a par commodité d'écriture

$$\begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W \\ W' \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c' & -s' \\ s' & c' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B \\ B' \end{pmatrix}. \tag{5.21}$$

Nous réécrivons ainsi (5.19) comme suit :

$$\begin{aligned} A &= g_1(cW - sW')Q_1 + g_2(sW + cW')Q_2 + g_1'(c'B - s'B')Y_1 + g_2'(s'B + c'B')Y_2 \\ &= W(g_1cQ_1 + g_2sQ_2) + W'(-g_1sQ_1 + g_2cQ_2) + B(g_1'c'Y_1 + g_2's'Y_2) + B'(-g_1's'Y_1 + g_2'c'Y_2) \end{aligned}$$

Il nous faut alors imposer

$$g_1c = g_2s = g \qquad \text{et} \qquad g_1'c' = g_2's' = g' \tag{5.22}$$

pour que les champs W et B soient, par construction, associés aux générateurs non brisés. Vu que $c^2 + s^2 = 1$, nous tirons

$$\frac{1}{g^2} = \frac{1}{g_1^2} + \frac{1}{g_2^2} \tag{5.23}$$

et de même pour g'. Il vient alors

$$s = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}\,, \quad c = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \tag{5.24}$$

$$s' = \frac{g_1'}{\sqrt{g_1'^2 + g_2'^2}}\,, \quad c' = \frac{g_2'}{\sqrt{g_1'^2 + g_2'^2}}\,. \tag{5.25}$$

La brisure spontanée génère une masse pour les bosons de jauge W' et B' par le mécanisme de Higgs, vu qu'ils sont associés aux générateurs brisés. Comme d'habitude, ce terme de masse provient du développement du terme cinétique de ces bosons. Nous partons donc de (5.16) avec (5.18) et (5.19)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\Sigma,\text{masse}} = \frac{1}{2}\frac{f^2}{4}\,\mathrm{tr}\left[\left|\sum_{j=1}^{2} g_j W^a_{j\mu}(Q^a_j\Sigma_0 + \Sigma_0(Q^a_j)^T)\right|^2\right] + \frac{1}{2}\frac{f^2}{4}\,\mathrm{tr}\left[\left|\sum_{j=1}^{2} g_j B_{j\mu}(Y_j\Sigma_0 + \Sigma_0 Y_j^T)\right|^2\right] \\ + \frac{f^2}{4}\,\mathrm{tr}\left[\left(\sum_{j=1}^{2} g_j W^a_{j\mu}(Q^a_j\Sigma_0 + \Sigma_0(Q^a_j)^T)\right)\left(\sum_{k=1}^{2} g_k B_{k\mu}(Y_k\Sigma_0 + \Sigma_0 Y_k^T)\right)^\dagger\right].\end{aligned} \tag{5.26}$$

Pour calculer cette expression nous aurons besoin de connaître les valeurs des traces. Comme nous avons

$$Q^a_1\Sigma_0 + \Sigma_0(Q^a_1)^T = \begin{pmatrix} & & \frac{\sigma^a}{2} \\ & 0 & \\ \frac{(\sigma^a)^T}{2} & & \end{pmatrix}, \qquad Q^a_2\Sigma_0 + \Sigma_0(Q^a_2)^T = \begin{pmatrix} & & -\frac{\sigma^a}{2} \\ & 0 & \\ -\frac{(\sigma^a)^*}{2} & & \end{pmatrix} \tag{5.27}$$

et

$$Y_1\Sigma_0 + \Sigma_0 Y_1^T = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} & & & -1 & \\ & & & & -1 \\ & & 4 & & \\ -1 & & & & \\ & -1 & & & \end{pmatrix}, \qquad Y_2\Sigma_0 + \Sigma_0 Y_2^T = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ & & -4 & & \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \end{pmatrix}, \tag{5.28}$$

nous obtenons les traces

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\left[|Q^a_1\Sigma_0 + \Sigma_0(Q^a_1)^T|^2\right] &= \mathrm{tr}\left[|Q^a_2\Sigma_0 + \Sigma_0(Q^a_2)^T|^2\right] \\ &= -\mathrm{tr}\left[(Q^a_1\Sigma_0 + \Sigma_0(Q^a_1)^T)(Q^b_2\Sigma_0 + \Sigma_0(Q^b_2)^T)^\dagger\right] = \delta^{ab},\end{aligned} \tag{5.29}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\left[|Y_1\Sigma_0 + \Sigma_0 Y_1^T|^2\right] &= \mathrm{tr}\left[|Y_2\Sigma_0 + \Sigma_0 Y_2^T|^2\right] \\ &= -\mathrm{tr}\left[(Y_1\Sigma_0 + \Sigma_0 Y_1^T)(Y_2\Sigma_0 + \Sigma_0 Y_2^T)^\dagger\right] = \frac{1}{5}\,,\end{aligned} \tag{5.30}$$

et

$$\mathrm{tr}\left[(Y_j\Sigma_0 + \Sigma_0 Y_j^T)(Q^a_k\Sigma_0 + \Sigma_0(Q^a_k)^T)^\dagger\right] = 0. \tag{5.31}$$

Nous pouvons voir maintenant que (5.26) se réduit à

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\Sigma,\text{masse}} = \frac{1}{2}\frac{f^2}{4}\left[g_1^2 W^a_{1\mu}W^{a\mu}_1 + g_2^2 W^a_{2\mu}W^{a\mu}_2 - 2g_1g_2 W^a_{1\mu}W^{a\mu}_2\right] \\ + \frac{1}{2}\frac{f^2}{20}\left[g_1'^2 B_{1\mu}B_1^\mu + g_2'^2 B_{2\mu}B_2^\mu - 2g_1'g_2' B_{1\mu}B_2^\mu\right]\end{aligned} \tag{5.32}$$

comme annoncé dans [35]. En utilisant les relations (5.21) et (5.24), nous trouvons finalement pour les bosons W et W'

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\Sigma,\text{masse } W,W'} &= \frac{1}{2}\frac{f^2}{4}\left[g_1^2(c^2W^2 + s^2W'^2 - 2csWW') + g_2^2(s^2W^2 + c^2W'^2 + 2scWW')\right.\\ &\qquad\left. -2g_1g_2(csW^2 - scW'^2 + c^2WW' - s^2WW')\right]\\ &= \frac{1}{2}\frac{f^2}{4}(g_1^2 + g_2^2)W'^2. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Comme il se doit, seuls les boson W' acquièrent une masse. Cette dernière vaut

$$M_{W'} = \frac{f}{2}\sqrt{g_1^2 + g_2^2} = \frac{g}{2sc}f. \tag{5.34}$$

Il en va de même pour les bosons B et B'. Seul B' acquiert un masse, qui vaut

$$M_{B'} = \frac{f}{2\sqrt{5}}\sqrt{g_1'^2 + g_2'^2} = \frac{g'}{2\sqrt{5}s'c'}f. \tag{5.35}$$

Notre rotation des champs a eu le même effet qu'une diagonalisation de la matrice de masse. Après quelques fastidieux calculs, Han, Logan, McElrath et Wang [35] obtiennent les couplages entre les bosons W, W' et les scalaires

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\Sigma W\cdot W} &= \frac{g^2}{4}\left[W_\mu^a W^{b\mu} - \frac{(c^2 - s^2)}{sc}W_\mu^a W'^{b\mu}\right]\text{tr}\left[h^\dagger h\delta^{ab} + 2\phi^\dagger\phi\delta^{ab} + 2\sigma^a\phi^\dagger(\sigma^b)^T\phi\right]\\ &\quad -\frac{g^2}{4}\left[W_\mu'^a W'^{a\mu}\,\text{tr}\left[h^\dagger h + 2\phi^\dagger\phi\right] - \frac{(c^4 + s^4)}{2s^2c^2}W_\mu'^a W'^{b\mu}\,\text{tr}\left[2\sigma^a\phi^\dagger(\sigma^b)^T\phi\right]\right] \end{aligned} \tag{5.36}$$

Dans le Modèle Standard, les couplages de la forme $WWh^\dagger h$ apportaient des contributions quadratiquement divergentes à la masse du Higgs. Dans ce modèle du plus petit Higgs, les couplage $W'W'h^\dagger h$ servent à annuler exactement ces divergences quadratiques provenant du diagramme seagull (qui signifie mouette en français à cause de leur forme, voir figure 5.4) faisant intervenir une boucle de boson W. De même, les couplages entre les bosons B, B' et les scalaires sont

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\Sigma B\cdot B} &= g'^2\left[B_\mu B^\mu - \frac{(c'^2 - s'^2)}{s'c'}B_\mu B'^\mu\right]\text{tr}\left[\frac{1}{4}h^\dagger h + \phi^\dagger\phi\right]\\ &\quad -g'^2\left[B_\mu' B'^\mu\,\text{tr}\left[\frac{1}{4}h^\dagger h\right] - \frac{(c'^2 - s'^2)^2}{4s'^2c'^2}B_\mu' B'^\mu\,\text{tr}\left[\phi^\dagger\phi\right]\right]. \end{aligned} \tag{5.37}$$

De nouveau, les couplages $B'B'h^\dagger h$ servent à annuler exactement les divergences quadratiques à la masse du Higgs provenant du diagramme seagull faisant intervenir une boucle de boson B. Nous arrêtons ici le développement du modèle, à la fin du secteur scalaire.

5.3 Second modèle : Le petit Higgs à partir d'un groupe simple

Le second modèle se basant sur les idées du petit Higgs proposé par Kaplan et Schmaltz [34] se veut être une extension très simple du Modèle Standard. Sa structure est la suivante. Les interactions de jauge faibles $SU(2)$ sont étendues à $SU(3)$. Un groupe de jauge $SU(3)$ est spontanément brisé par une valeur au vide non nulle de deux triplets scalaires de $SU(3)$. Les valeurs au vide sont alignées de sorte qu'elles laissent le même $SU(2)$ non brisé. Si nous oublions momentanément les couplages de jauge, chaque scalaire brise un $SU(3)$ global en $SU(2)$ amenant ainsi 5 BNG chacun. Avec les interactions de jauge, les combinaisons linéaires diagonales sont absorbées par le mécanisme de Higgs comme dans le modèle précédent. Les combinaisons linéaires orthogonales restent sans masse au niveau arbre, ce sont les PBNG. Les corrections quantiques n'apporteront pas de divergence quadratique à une boucle faisant intervenir les deux triplets scalaires.

Plus concrètement, les auteurs considèrent une théorie de jauge $SU(3)$ avec deux champs scalaires Φ_j se transformant comme des triplets de $SU(3)$ dans le lagrangien

$$\mathcal{L} = |D_\mu \Phi_j|^2 - \frac{\lambda^2}{2}\left(\Phi_j^\dagger \Phi_j - f^2\right). \tag{5.38}$$

Par simplicité, ils ont supposé des couplages et des valeurs moyennes au vide identiques pour les deux triplets. Ceci défini un modèle σ linéaire avec deux symétries $SU(3)$ agissant sur les deux triplets. En clair, chaque $SU(3)$ ne fait "tourner" qu'un seul triplet à la fois. Ainsi, le potentiel possède une symétrie $SU(3)_1 \times SU(3)_2$ avec les lois de transformation pour les scalaires sous $SU(3)_1$

$$\Phi_1 \to \Phi_1' = e^{ig\alpha_1^a t_1^a}\Phi_1, \qquad \Phi_2 \to \Phi_2' = \Phi_2 \tag{5.39}$$

et sous $SU(3)_2$

$$\Phi_1 \to \Phi_1' = \Phi_1, \qquad \Phi_2 \to \Phi_2' = e^{ig\alpha_2^a t_2^a}\Phi_2. \tag{5.40}$$

On aligne les deux valeurs moyennes au vide

$$\Phi_{0,j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{pmatrix}, \tag{5.41}$$

ce qui a pour effet de provoquer la brisure spontanée de symétrie $SU(3)_1 \times SU(3)_2 \to SU(2)_1 \times SU(2)_2$ amenant au total 10 BNG. Si on jauge maintenant un $SU(3)$ de telle sorte que les deux scalaires se transforment comme des triplets sous la symétrie de jauge, la symétrie $SU(3)_1 \times SU(3)_2$ sera explicitement brisée en $SU(3)$ diagonal. Nous pouvons facilement obtenir cet $SU(3)$ diagonal. En effet, nous pouvons toujours voir deux rotations libres comme la superposition de deux rotations communes, l'une dans le même sens et l'autre en sens contraire. Formellement, cela revient à prendre les générateurs

$$t^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(t_1^a + t_2^a) \qquad \text{et} \qquad t'^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(t_1^a - t_2^a) \tag{5.42}$$

où t^a sont les générateurs du $SU(3)$ diagonal et t'^a, ceux du $SU(3)$ axial. Nous avons donc affaire à 5 vrais BNG et 5 PBNG.

Les auteurs paramétrisent les scalaires comme suit :

$$\Phi_1 = e^{i\Pi_1/f}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f+\rho_1 \end{pmatrix} = e^{i\Pi_{\mathrm{BNG}}/f}\, e^{i\Pi/f}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f+\rho_1 \end{pmatrix}, \tag{5.43}$$

$$\Phi_2 = e^{i\Pi_2/f}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f+\rho_2 \end{pmatrix} = e^{i\Pi_{\mathrm{BNG}}/f}\, e^{-i\Pi/f}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f+\rho_2 \end{pmatrix}. \tag{5.44}$$

où Π_{BNG} correspond aux modes absorbés par le mécanisme de Higgs, Π aux PBNG et où ρ_1, ρ_2 sont les modes radiaux (réels). Les générateurs brisés sont t'^4, t'^5, t'^6, t'^7 et t'^8 (générateurs habituels de $SU(3)$). Dès lors, la matrices des PBNG s'écrit

$$\Pi = \pi^a t'^a = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2\times 2} & h \\ h^\dagger & 0 \end{pmatrix} + \frac{\eta}{4} \mathrm{diag}(1,1,-2) \tag{5.45}$$

où $a = 4, \ldots, 8$ et où les coefficients ont été choisis afin que h et η aient des termes cinétiques canoniques. Sous les transformations de jauge non brisées $SU(2)$, h se comporte comme un doublet complexe, c'est-à-dire comme le fait le Higgs du Modèle Standard. Le champ η se comporte simplement comme un champ scalaire neutre.

Vu que les interactions de jauge brisent explicitement la symétrie $SU(3)$ axial, on s'attend à ce que les corrections quantiques provenant de ces interactions de jauge génèrent une masse aux PBNG. Rappelons-nous alors le développement (4.52)

$$|D_\mu \Phi_j|^2 = |\partial_\mu \Phi_j|^2 + igA^a_\mu \Phi^\dagger_j t^a (\partial^\mu \Phi_j) - igA^{a\mu}(\partial_\mu \Phi^\dagger_j) t^a \Phi_j + \frac{1}{2} g^2 (\Phi^\dagger_j \{t^a, t^b\} \Phi_j) A^a_\mu A^{b\mu}. \tag{5.46}$$

Il y a deux diagrammes contribuant à la masse des scalaires qui divergent quadratiquement (voir figure 5.3). Les auteurs choisissent de travailler dans la jauge de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$.

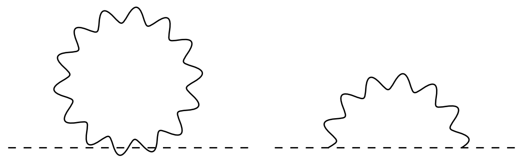
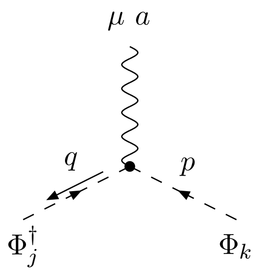


FIG. 5.3 – *Corrections à une boucle des bosons de jauge de $SU(3)$ de la masse des Φ_j.*

Ainsi, nous avons en se rappelant que les champs sont en fait des opérateurs

$$A^\mu \Phi^\dagger_j (\partial_\mu \Phi_j) = -(\partial_\mu (A^\mu \Phi^\dagger_j))\Phi_j = -A^\mu (\partial \Phi^\dagger_j)\Phi_j, \tag{5.47}$$

ce qui permet d'écrire au choix le vertex à trois champs



$$= 2iq^\mu t^a \delta^{jk} \quad \text{ou} \quad 2ip^\mu t^a \delta^{jk}. \tag{5.48}$$

Ainsi, les diagrammes faisant intervenir les couplages de jauge à trois champs ne peuvent contribuer au potentiel des scalaires (impulsion externe nulle au vide). Par conséquent, le second diagramme de la figure (5.3) est nul.

Les diagrammes contribuant au potentiel des scalaires sont représentés sur la figure (5.4) Le premier diagramme diverge quadratiquement tandis que le second ne diverge que logarithmiquement. Calculons le premier diagramme. Nous avons, pour cela, besoin de connaître le

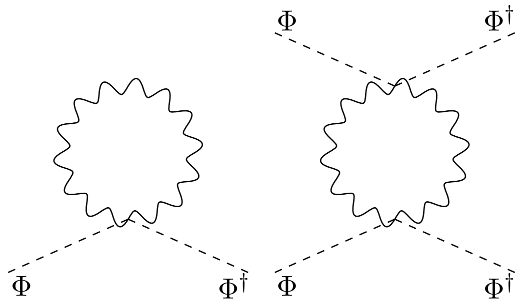
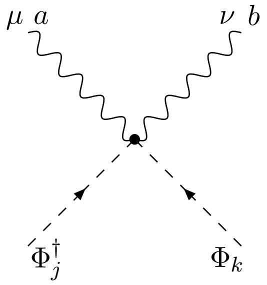


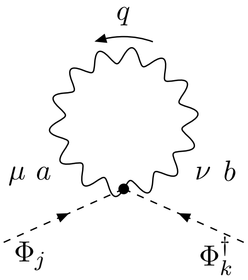
FIG. 5.4 – *Contributions des bosons de jauge au potentiel des Φ dans la jauge $\partial_\mu A^\mu = 0$.*

vertex à quatre champs



$$= \frac{i}{2} g^2 \left\{ t^a , t^b \right\} g^{\mu\nu} \delta^{jk}. \tag{5.49}$$

Nous obtenons alors



$$\begin{aligned} &\int \frac{\mathrm{d}^4 q}{(2\pi)^4} \Phi_k^\dagger \frac{i}{2} g^2 \left\{ t^a , t^b \right\} g^{\mu\nu} \delta^{jk} \Phi_j \frac{-i g_{\mu\nu} \delta^{ab}}{q^2} \\ &= \frac{4g^2}{(2\pi)^4} \Phi_j^\dagger \Phi_j \int \frac{\mathrm{d}^4 q}{q^2}. \end{aligned} \tag{5.50}$$

Pour résoudre cette intégrale, effectuons une rotation de Wick

$$q^0 \equiv i q_E^0, \qquad \mathbf{q} \equiv \mathbf{q}_E, \tag{5.51}$$

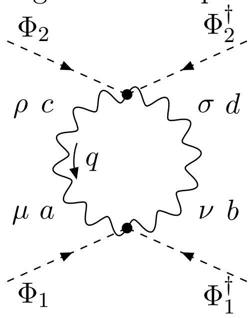
ce qui permet d'écrire l'intégrale de (5.50) dans un espace euclidien

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}^4 q}{q^2} &= -i \int \frac{\mathrm{d}^4 q_E}{q_E^2} \\ &= -i \int \mathrm{d}\Omega_4 \int_0^\Lambda \mathrm{d}q_E \frac{q_E^3}{q_E^2} \\ &= -2i\pi^2 \left[\frac{q_E^2}{2} \right]_0^\Lambda \\ &= -i\pi^2 \Lambda^2. \end{aligned} \tag{5.52}$$

Ce premier diagramme apporte donc une contribution au potentiel des scalaires de la forme

$$\Delta\mathcal{L} \sim -\frac{g^2 \Lambda^2}{16\pi^2} (\Phi_1^\dagger \Phi_1 + \Phi_2^\dagger \Phi_2). \tag{5.53}$$

Bien que cette contribution soit divergente quadratiquement, sa forme préserve les deux symétries $SU(3)$ de départ. Ce diagramme ne génère donc aucune masse pour les PBNG. Pour qu'une masse soit générée pour ces PBNG, il faut que la contribution au potentiel des scalaires brise la symétrie $SU(3)$ axial. Un tel terme demande, par conséquent, une interaction entre les deux scalaires de la forme $\Phi_1^\dagger \Phi_2$ et/ou $\Phi_2^\dagger \Phi_1$. Le second diagramme de la figure (5.4) produit un tel couplage par l'intermédiaire des bosons de jauge virtuels. Calculons ce diagramme à impulsion extérieure nulle



$$\begin{aligned}&\int \frac{\mathrm{d}^4 q}{(2\pi)^4} \Phi_1^\dagger \frac{i}{2} g^2 \left\{t^a, t^b\right\} g^{\mu\nu} \Phi_1 \frac{-ig_{\mu\rho}\delta^{ac}}{q^2} \Phi_2^\dagger \frac{i}{2} g^2 \left\{t^c, t^d\right\} g^{\rho\sigma} \Phi_2 \frac{-ig_{\sigma\nu}\delta^{db}}{q^2} \\ &= \frac{2g^4}{(2\pi)^4} \left[\Phi_1^\dagger t^a t^b \Phi_1 \Phi_2^\dagger t^a t^b \Phi_2 + \Phi_1^\dagger t^a t^b \Phi_1 \Phi_2^\dagger t^b t^a \Phi_2\right] \int \frac{\mathrm{d}^4 q}{q^4}. \end{aligned} \tag{5.54}$$

Occupons-nous, pour commencer, de l'intégrale. Nous trouvons de nouveau grâce à une rotation de Wick

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}^4 q}{q_E^4} &= i \int \frac{\mathrm{d}^4 q_E}{q_E^4} \\ &\sim i \int \mathrm{d}\Omega_4 \int_f^\Lambda \mathrm{d}q_E \frac{q_E^3}{q_E^4} \\ &= 2i\pi^2 \left[\ln(q_E)\right]_f^\Lambda \\ &= i\pi^2 \ln(\Lambda^2/f^2). \end{aligned} \tag{5.55}$$

La divergence de la contribution n'est que logarithmique. Il est également possible de résoudre analytiquement l'intégrale pour une impulsion extérieure non nulle. Il faut pour cela utiliser la méthode des paramètres de Feynman exposée et démontrée dans l'annexe B. Nous avons alors obtenu (à des constantes près)

$$i\pi^2 \ln\left(\frac{\Lambda^2 + 3p'^2/4}{p'^2}\right) \tag{5.56}$$

où p' est l'impulsion extérieure. Montrons maintenant que certaines contributions brisent la symétrie $SU(3)$ axial. Rappelons pour cela une identité utile qui concerne les générateurs de $SU(3)$

$$t^a_{ij} t^a_{kl} = \frac{1}{2}\left(\delta_{il}\delta_{jk} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right). \tag{5.57}$$

Il vient donc

$$\begin{aligned}\Phi_1^\dagger t^a t^b \Phi_1 \Phi_2^\dagger t^a t^b \Phi_2 &= \Phi_{1i}^\dagger t^a_{ij} t^b_{jk} \Phi_{1k} \Phi_{2l}^\dagger t^a_{lm} t^b_{mn} \Phi_{2n} \\ &= \frac{1}{4} \Phi_{1i}^\dagger \Phi_{1k} \Phi_{2l}^\dagger \Phi_{2n} \left(\delta_{im}\delta_{jl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{lm}\right)\left(\delta_{jn}\delta_{km} - \frac{1}{3}\delta_{jk}\delta_{mn}\right) \\ &= \frac{1}{4} \Phi_{1i}^\dagger \Phi_{1k} \Phi_{2l}^\dagger \Phi_{2n} \left(\frac{10}{9}\delta_{ik}\delta ln - \frac{2}{3}\delta_{in}\delta_{kl}\right) \\ &= \frac{5}{18} \Phi_1^\dagger \Phi_1 \Phi_2^\dagger \Phi_2 - \frac{1}{6}\left|\Phi_2^\dagger \Phi_1\right|^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\Phi_1^\dagger t^a t^b \Phi_1 \Phi_2^\dagger t^b t^a \Phi_2 &= \Phi_{1i}^\dagger t^a_{ij} t^b_{jk} \Phi_{1k} \Phi_{2l}^\dagger t^b_{lm} t^a_{mn} \Phi_{2n} \\
&= \frac{1}{4} \Phi_{1i}^\dagger \Phi_{1k} \Phi_{2l}^\dagger \Phi_{2n} \left(\delta_{in}\delta_{jm} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{mn} \right) \left(\delta_{jm}\delta_{kl} - \frac{1}{3}\delta_{jk}\delta_{lm} \right) \\
&= \frac{1}{4} \Phi_{1i}^\dagger \Phi_{1k} \Phi_{2l}^\dagger \Phi_{2n} \left(\frac{1}{9}\delta_{ik}\delta ln + \frac{7}{3}\delta_{in}\delta_{kl} \right) \\
&= \frac{1}{36} \Phi_1^\dagger \Phi_1 \Phi_2^\dagger \Phi_2 + \frac{7}{12} \left| \Phi_2^\dagger \Phi_1 \right|^2 .
\end{aligned}$$

Ce premier diagramme apporte donc notamment une contribution au potentiel des scalaires de la forme

$$\Delta \mathcal{L} \sim \frac{g^4}{16\pi^2} \left| \Phi_2^\dagger \Phi_1 \right|^2 \ln(\Lambda^2/f^2). \tag{5.58}$$

Montrons qu'un terme de la forme $\left| \Phi_2^\dagger \Phi_1 \right|^2$ génère effectivement une masse pour le doublet de Higgs. Nous avons

$$\Phi_2^\dagger \Phi_1 = (0,0,f)\, e^{2i\Pi/f} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{pmatrix} \sim (0,0,f) \left(1 + 2i\,\frac{\Pi}{f} - 4\,\frac{\Pi^2}{f^2} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{pmatrix}. \tag{5.59}$$

Or

$$\begin{gathered}
(0,0,f) \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2\times 2} & h \\ h^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{pmatrix} = 0 \\
(0,0,f) \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2\times 2} & h \\ h^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2\times 2} & h \\ h^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{pmatrix} = (0,0,f) \begin{pmatrix} hh^\dagger & \\ & h^\dagger h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{pmatrix} = f^2 h^\dagger h
\end{gathered}$$

et donc, il vient

$$\Delta \mathcal{L} \sim -\frac{f^2}{16\pi^2} \ln(\Lambda^2/f^2) h^\dagger h. \tag{5.60}$$

Le terme de masse est négatif, ce qui signifie que le vide est stabilisé. Dans le reste du modèle, les auteurs insèrent les fermions et les couplages de Yukawa. Ils trouvent alors que la boucle du quark top générera un terme de masse positif, qui aura pour effet de déclencher la brisure spontanée électrofaible.

5.4 Absence de divergence quadratique pour la masse du Higgs

Nous terminons sur une petite discussion qui permet de comprendre l'absence de divergence quadratique pour la masse du Higgs dans les modèles du petit Higgs.

Nous avons dit au début de ce chapitre que le "truc" du petit Higgs est qu'un couplage ne peut briser seul la symétrie du potentiel. En effet, dans les deux modèles que nous avons présentés, les couplages de jauge se trouvaient toujours à cheval sur deux symétries ce qui impliquait une brisure spontanée collective.

Pour le voir explicitement, repartons par exemple des interactions de jauge du second modèle

$$|(\partial_\mu - ig_1 A_\mu)\Phi_1|^2 + |(\partial_\mu - ig_2 A_\mu)\Phi_2| \tag{5.61}$$

où on a étiqueté les constantes de couplage pour pouvoir les suivre à la trace dans le raisonnement. Ces constantes restent évidemment égales vu l'invariance de jauge.

Il suffit de remarquer qui si une des deux constantes de couplage est mise à zéro, le lagrangien présente une symétrie $SU(3)_1 \times SU(3)_2$ exacte. Nous aurons donc deux jeux de vrais BNG. En effet, si $g_2 = 0$, alors nous avons deux symétries indépendantes

$$\Phi_1 \to \Phi_1' = U_1\Phi_1, \qquad A_\mu \to A_\mu' = U_1 A_\mu U_1^\dagger, \qquad \Phi_2 \to \Phi_2' = U_2\Phi_2, \tag{5.62}$$

tandis que pour $g_2 = 0$, les symétries indépendantes sont

$$\Phi_1 \to \Phi_1' = U_1\Phi_1, \qquad A_\mu \to A_\mu' = U_2 A_\mu U_2^\dagger, \qquad \Phi_2 \to \Phi_2' = U_2\Phi_2. \tag{5.63}$$

Il n'y a que quand les deux constantes de couplage sont non nulles que la symétrie est explicitement brisée en $SU(3)$ diagonal. Toute boucle de correction à la masse doit donc être proportionnelle à la fois à g_1 et g_2. Or, il n'existe pas de diagramme à une boucle quadratiquement divergent qui les fasse intervenir en même temps. Ceci explique l'absence de divergence quadratique dans la masse du Higgs dans les modèles du petit Higgs.

Annexe A

Caractère tensoriel des charges conservées

Dans la démonstration du théorème de Goldstone, on a pu déterminer que les BNG étaient de spin nul grâce au fait que les charges conservées étaient des scalaires. Nous proposons un démonstration qui assure le caractère tensoriel d'une charge conservée quelconque. Ainsi, le caractère scalaire d'une charge associée à un quadrivecteur conservé ne sera qu'un cas particulier de cette propriété.

Supposons que nous ayons une quantité tensorielle d'ordre n, $T^{\alpha\beta\ldots\mu\nu}$ conservée

$$\partial_\nu T^{\alpha\beta\ldots\mu\nu} = 0. \tag{A.1}$$

Si nous intégrons cette équation sur une région de l'espace-temps, il vient

$$\int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}^4x \, \partial_\nu T^{\alpha\beta\ldots\mu\nu} = \int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}\mathcal{S} \, T^{\alpha\beta\ldots\mu\nu} n_\nu = 0 \tag{A.2}$$

où $\mathcal{V}$ et $\mathcal{S}$ désignent respectivement l'hypervolume et l'hypersurface de cette région d'espace-temps. Comme, par définition, l'univers contient tout, il ne peut y avoir de flux au travers d'une hypersurface purement spatiale[1], autrement dit telle que son quadrivecteur normal ne possède aucune composante temporelle.

$$\int_{\mathcal{S},\text{pur. spat.}} \mathrm{d}\mathcal{S} \, T^{\alpha\beta\ldots\mu\nu} n_\nu = 0. \tag{A.3}$$

Toute la démonstration va s'articuler autour de flux au travers d'hypersurfaces.

Par définition, la charge associée au courant tensoriel conservé est donnée par

$$Q \equiv \int \mathrm{d}^3x \, T^{\alpha\beta\ldots\mu 0}. \tag{A.4}$$

Nous allons montrer que la charge conservée est également un quantité tensorielle mais d'ordre $n-1$.

La clé de notre démonstration réside dans le fait que nous pouvons écrire la charge de la manière suivante

$$Q \equiv \int \mathrm{d}^3x \, T^{\alpha\beta\ldots\mu 0} = \int \mathrm{d}^4x \, \delta(\eta \cdot x - \tau) T^{\alpha\beta\ldots\mu\nu} \eta_\nu \tag{A.5}$$

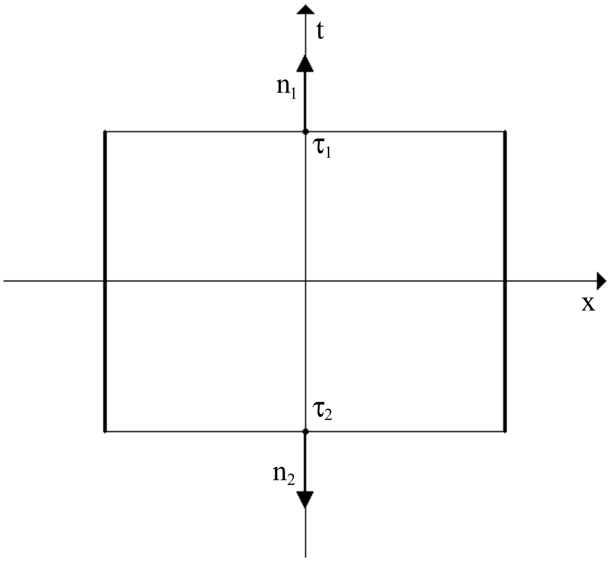


FIG. A.1 – *Hypervolume compris entre les deux hypersurfaces temporelles τ_1 et τ_2. Les traits plus épais indiquent l'"isolation" spatiale de l'univers.*

où τ est un temps propre quelconque et η le quadrivecteur temporel $(1,0,0,0)$. Ainsi, la charge peut être vue comme le flux du courant conservé au travers de l'hypersurface purement temporelle. Nous pouvons redémontrer rapidement que la charge est conservée. Si nous utilisons (A.2) sur tout l'espace entre deux hypersurfaces temporelles caractérisées par les temps propres τ_1 et τ_2, nous trouvons

$$0 = \int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}\mathcal{S}\, T^{\alpha\beta\ldots\mu\nu} n_\nu = \phi^{\tau_1} + \phi^{\tau_2} + \phi^{pur.spat.} \tag{A.6}$$

où ϕ^{τ_1}, ϕ^{τ_2} et $\phi^{pur.spat.}$ désignent les flux respectivement au travers des hypersurfaces temporelles τ_1 et τ_2 et de l'hypersurface purement spatiale (voir figure A.1). Il vient donc par (A.3)

$$\int \mathrm{d}^4x\, \delta(x^0 - \tau_1) T^{\alpha\beta\ldots\mu 0} = \int \mathrm{d}^4x\, \delta(x^0 - \tau_2) T^{\alpha\beta\ldots\mu 0}, \tag{A.7}$$

ce qui montre que la charge ne dépend pas du temps vu que τ_1 et τ_2 sont arbitraires. La charge est donc conservée.

Passons à la démonstration proprement dite. Effectuons une transformation de Lorentz

$$x^\mu \to \underline{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu. \tag{A.8}$$

Il vient

$$\underline{Q} \equiv \int \mathrm{d}^4\underline{x}\, \delta(\underline{\eta} \cdot \underline{x} - \tau) \underline{T}^{\alpha\beta\ldots\mu\nu} \underline{\eta}_\nu = \Lambda^\alpha{}_{\alpha'} \Lambda^\beta{}_{\beta'} \ldots \Lambda^\mu{}_{\mu'} \int \mathrm{d}^4x\, \delta(\eta \cdot x - \tau) T^{\alpha'\beta'\ldots\mu'\nu} \eta_\nu. \tag{A.9}$$

Si nous arrivons à démontrer que la dernière intégrale vaut justement Q, nous aurons terminé. Malheureusement cela ne semble pas évident vu que $\eta^\nu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_0$. Montrons alors que le flux au travers de l'hypersurface temporelle de quadrivecteur normal η ne dépend pas de ce dernier.

1. Comme toujours, nous imaginons que l'univers a un volume fini, ce qui permet de parler de son hypersurface. Nous renvoyons seulement après les frontières à l'infini en passant à la limite.

Considérons deux quadrivecteurs temporels η et η'. Vu que la charge provient d'une intégrale sur l'espace, cette dernière ne dépend pas de l'orientation des axes spatiaux. Il nous suffit alors d'envisager uniquement le cas des *boosts*. Nous nous retrouvons ainsi dans la situation dépeinte sur la figure A.2. Il ne nous reste plus qu'à prouver que le flux au travers du segment

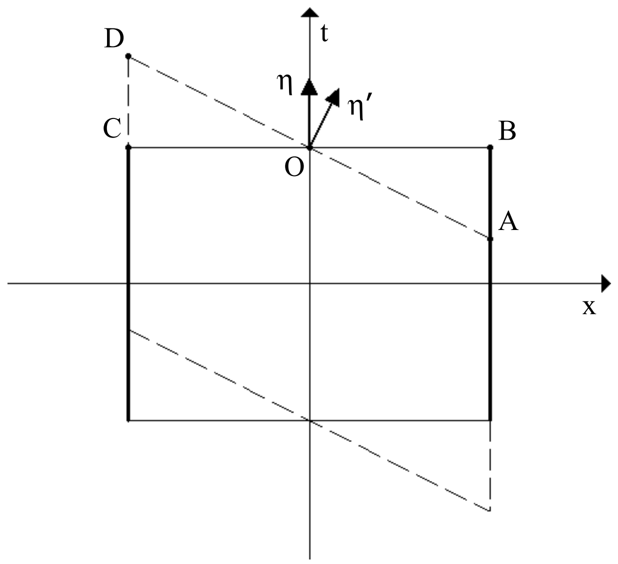


FIG. A.2 – *Hypersurfaces pour deux quadrivecteurs η et η'. Les traits plus épais indiquent l'"isolation" spatiale de l'univers.*

AD est le même que celui au travers du segment BC. Ceci est évident lorsque nous travaillons dans les triangles OAB et OCD en utilisant de nouveau (A.2) et (A.3).

Vu que la propriété est démontrée dans le cas général d'un tenseur d'ordre n, voyons le cas particulier où $n = 1$. La charge associée à un quadrivecteur courant conservé est un tenseur d'ordre 0, c'est-à-dire un scalaire.

Annexe B

Méthode des paramètres de Feynman

Dans cette dernière annexe, nous allons exposer et démontrer la méthode des paramètres de Feynman. Cette méthode est fort utile dans le calcul des diagrammes où apparaissent plusieurs dénominateurs. En effet, elle ramène un produit de dénominateurs en une puissance d'un polynôme, ce qui beaucoup plus simple à intégrer.

Lorsque nous avons affaire au produit de n dénominateurs, il convient de faire appel à l'identité suivante :

$$\frac{1}{A_1 A_2 \ldots A_n} = \int_0^1 \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\ldots\mathrm{d}x_n\,\delta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1\right)\frac{(n-1)!}{(x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_nA_n)^n}\,. \tag{B.1}$$

Sa démonstration se fait par récurrence. Vérifions le cas de base $n = 2$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\delta(x+y-1)\frac{1}{(xA+yB)^2} &= \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{1}{(x(A-B)+B))^2} \\
&= \left[\frac{-1}{x(A-B)+B}\right]_0^1 \frac{1}{A_B} \\
&= \left(\frac{-1}{A} + \frac{1}{B}\right)\frac{1}{A-B} \\
&= \frac{1}{AB}\,.
\end{aligned}$$

Avant de passer à la récurrence proprement dite, illustrons le cas $n = 2$ par un exemple. Imaginons que le calcul d'un diagramme nous amène à évaluer l'intégrale suivante :

$$\int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{(k-p)^2(k^2-m^2)}\,. \tag{B.2}$$

Le cas de base $n = 2$ nous permet de réécrire ce produit de deux dénominateurs de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(k-p)^2(k^2-m^2)} &= \int_0^1 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\delta(x+y-1)\frac{1}{\left(x(k-p)^2 + y(k^2-m^2)\right)^2} \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\delta(x+y-1)\frac{1}{(xp^2 - 2xk\cdot p + k^2 - ym^2)^2}\,.
\end{aligned}$$

Complétons le carré en k et introduisons la quantité $l \equiv k - xp$. Nous obtenons ainsi

$$\frac{1}{(k-p)^2(k^2-m^2)} = \int_0^1 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\delta(x+y-1)\frac{1}{(l^2+xp^2-x^2p^2-ym^2)^2}\,. \tag{B.3}$$

Le second membre ne fait plus intervenir k qu'au travers de l. Il est donc intéressant d'effectuer un vrai changement de variable $l = k - xp$ d'autant plus que $\mathrm{d}^4k = \mathrm{d}^4l$. Il vient

$$\int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{(k-p)^2(k^2-m^2)} = \int_0^1 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\delta(x+y-1)\int\frac{\mathrm{d}^4l}{(2\pi)^4}\frac{1}{(l^2+xp^2-x^2p^2-ym^2)^2}\,. \tag{B.4}$$

Nous sommes ainsi parvenu à écrire une intégrale à symétrie sphérique. Les paramètres x et y qui sont apparus sont appelés paramètres de Feynman.

L'étape d'induction proposée par Peskin et Schroeder [40] demande d'utiliser l'identité suivante :

$$\frac{1}{AB^n} = \int_0^1 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\delta(x+y-1)\frac{ny^{n-1}}{(xA+yB)^{n+1}}\,. \tag{B.5}$$

qui se passe de démonstration tant cette dernière est triviale. Il suffit, en effet, de dériver $n-1$ fois le cas de base $n=2$ par rapport à B pour l'obtenir. Passons, à présent, à la récurrence proprement dite. Nous supposons que l'identité (B.1) est vérifiée jusque $n-1$. Montrons qu'il en est de même pour n. Partons du membre de gauche et utilisons l'hypothèse de récurrence

$$\frac{1}{A_1\ldots A_{n-1}A_n} = \int_0^1 \mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_{n-1}\,\delta\left(\sum_{i=1}^{n-1}x_i-1\right)\frac{(n-2)!}{(x_1A_1+\ldots+x_{n-1}A_{n-1})^{n-1}}\frac{1}{A_n}\,. \tag{B.6}$$

Par facilité d'écriture, introduisons la quantité $D \equiv x_1A_1+\ldots+x_{n-1}A_{n-1}$. Le dénominateur sous l'intégrale s'écrit alors grâce à l'identité (B.5)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A_nD^{n-1}} &= \int_0^1 \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\delta(u+v-1)\frac{(n-1)v^{n-2}}{(uA_n+vD)^n}\\
&= \int_0^1 \mathrm{d}v\frac{(n-1)v^{n-2}}{((1-v)A_n+vD)^n}\\
&= \int_0^1 \mathrm{d}v\frac{(n-1)v^{n-2}}{\left((1-v)A_n+v\sum_{i=1}^{n-1}x_iA_i\right)^n}\,.
\end{aligned}$$

Utilisons ce résultat dans (B.6) et effectuons les changements de variables suivants

$$vx_i = x'_i \qquad \text{et} \qquad 1-v = x'_n. \tag{B.7}$$

Nous trouvons ainsi

$$\frac{1}{A_1\ldots A_n} = \int_0^1 \mathrm{d}x'_n\int_0^{1-x'_n}\mathrm{d}x'_1\ldots\mathrm{d}x'_{n-1}\,\delta\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{x'_i}{v}-1\right)\frac{(n-1)!}{v(x'_1A_1+\ldots+x'_nA_n)^n}\,. \tag{B.8}$$

Développons la fonction de Dirac

$$\begin{aligned}
\delta\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{x'_i}{v}-1\right) &= v\delta\left(\sum_{i=1}^{n-1}x'_i-v\right)\\
&= v\delta\left(\sum_{i=1}^{n-1}x'_i+x'_n-1\right)\\
&= v\delta\left(\sum_{i=1}^{n}x'_i-1\right)\,.
\end{aligned}$$

De plus, grâce à la présence de la fonction de Dirac, nous pouvons pousser les domaines d'intégration

$$\int_0^{1-x_n'} \to \int_0^1 . \tag{B.9}$$

Le tout mis ensemble redonne bien (B.1), ce qui achève la démonstration par récurrence.

Juste pour le plaisir, notons qu'il existe un moyen de réaliser l'étape d'induction sans faire appel à l'identité (B.5). Cette seconde démonstration est proposée avec le concours de M. Polyakov, chargé de cours à l'ULg. Il faut alors se convaincre que

$$\int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int_0^1 \mathrm{d}x_2 \int_0^1 \mathrm{d}x_3\, \delta(x_1+x_2+x_3-1) = \int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int_0^{1-x_1} \mathrm{d}x_2 \Big|_{x_3=1-x_1-x_2} . \tag{B.10}$$

En effet, l'intégration sur x_3 impose la condition

$$0 < x_3 = 1 - x_1 - x_2 < 1. \tag{B.11}$$

Autrement dit, nous avons

$$0 < x_2 < 1 - x_1. \tag{B.12}$$

Cette seconde démonstration, un peu plus technique, de l'étape d'induction part du second membre de (B.1). Il vient

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n\, \delta\left(\sum_{i=1}^n x_i - 1\right) \frac{(n-1)!}{(x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_nA_n)^n} \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int_0^{1-x_1} \mathrm{d}x_2 \ldots \int_0^{1-\sum_{i=1}^{n-2}} \mathrm{d}x_{n-1} \frac{(n-1)!)}{\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_iA_i + (1-\sum_{i=1}^{n-1} x_i)A_n\right)^n} \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int_0^{1-x_1} \mathrm{d}x_2 \ldots \int_0^{1-\sum_{i=1}^{n-2}} \mathrm{d}x_{n-1} \frac{(n-1)!)}{\left(\sum_{i=1}^{n-2} x_iA_i + x_{n-1}(A_{n-1}-A_n) + (1-\sum_{i=1}^{n-2} x_i)A_n\right)^n} .
\end{aligned}$$

Si par facilité d'écriture nous posons $D = \sum_{i=1}^{n-2} x_iA_i + x_{n-1}(A_{n-1}-A_n) + (1-\sum_{i=1}^{n-2} x_i)A_n$, il vient par intégration sur x_{n-1}

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int_0^{1-x_1} \mathrm{d}x_2 \ldots \int_0^{1-\sum_{i=1}^{n-3}} \mathrm{d}x_{n-2} \frac{(n-2)!}{A_n - A_{n-1}} \left[\frac{1}{D^{n-1}}\right]_0^{1-\sum_{i=1}^{n-2}} \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int_0^{1-x_1} \mathrm{d}x_2 \ldots \int_0^{1-\sum_{i=1}^{n-3}} \mathrm{d}x_{n-2} \frac{(n-2)!}{A_n - A_{n-1}} \left[\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n-2} x_iA_i + (1-\sum_{i=1}^{n-2} x_i)A_{n-1}\right)^{n-1}} \right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n-2} x_iA_i + (1-\sum_{i=1}^{n-2} x_i)A_n\right)^{n-1)}}\right] .
\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence pour chaque terme, nous trouvons simplement

$$\frac{1}{A_n - A_{n-1}} \left(\frac{1}{A_1A_2\ldots A_{n-1}} - \frac{1}{A_1A_2\ldots A_{n-2}A_n} \right) = \frac{1}{A_1A_2\ldots A_n}, \tag{B.13}$$

ce qui achève l'étape d'induction.

Conclusion

Nous avons vu qu'il était possible qu'un système n'arbore apparemment pas les mêmes symétries que son lagrangien ou son hamiltonien. Tel est le cas d'un aimant à température inférieure à celle de Curie qui présente une directionalité en dépit de l'invariance par rotation des lois de l'électromagnétisme. Il n'est donc pas *a priori* déraisonnable de penser qu'un tel cas puisse se présenter au niveau des particules élémentaires.

Lorsque l'état fondamental d'une théorie ne possède pas les mêmes symétries que son lagrangien, on dit avoir affaire à une brisure spontanée de symétrie. Le terme "spontané" vient du fait qu'un système tend spontanément vers son état fondamental. Pour bien comprendre ce mécanisme, nous avons développé en détails plusieurs exemples. Nous avons alors bien vu que les minima d'une théorie ne sont pas nécessairement les points de plus hautes symétries du potentiel. La brisure spontanée de symétrie entraîne l'existence de plusieurs vides. On choisi alors un vide sur lequel on fonde la théorie et on identifie les différents états à des particules. Il est possible de passer du vide choisi à n'importe quel autre en lui appliquant une opération de symétrie brisée.

Dans le cas où la symétrie du lagrangien est continue, le théorème de Goldstone stipule que pour chaque symétrie brisée, il doit exister dans la théorie une particule sans masse (un boson de Nambu-Goldstone). Pour prouver que les BNG étaient de spin nul, il a fallu faire appel au fait que les charges conservées étaient des scalaires de Lorentz. Nous avons alors proposé une preuve de cette propriété dans l'annexe A. Lorsque les champs sont redéfinis à partir du vide de la théorie, on constate que les particules autres que BNG acquièrent naturellement une masse. La brisure spontanée de symétrie serait alors un moyen d'expliquer certaines relations entre les masses des particules d'une théorie. De nouveaux couplages apparaissent également, faisant en sorte que le lagrangien ne présente plus la symétrie de manière explicite. Elle n'a cependant pas disparu, elle est juste cachée et s'exprime par la relation entres les différentes constantes de couplage (il y a plus de couplages que de constantes de couplage).

Ensuite, nous nous sommes penchés sur la brisure de symétrie chirale. La symétrie chirale est réalisée lorsque la masse des fermions est nulle. Deux courants sont alors conservés : un courant vectoriel et un courant axial. Or, dans la Nature, la masse des fermions n'est pas nulle et, donc, la symétrie chirale ne semble pas présenter d'intérêt particulier. La phénoménologie montre que c'est le courant axial qui n'est pas conservé. Cependant, il est assez troublant que cette non conservation ne soit pas tellement marquée. L'idée a été de penser que cette observation était due à une symétrie approchée. Une brisure spontanée de la symétrie chirale a permis de générer une masse pour les fermions tout en gardant les pions non massifs. Pour que les pions obtiennent une masse, il a fallu ajouter un terme dans le lagrangien de la théorie qui brisait explicitement la symétrie chirale. Il est alors finalement apparu que la masse du pion était en quelque sorte une mesure de la brisure de la symétrie chirale. Étant donné que cette masse est petite comparée à celle des nucléons, ceci a permis d'expliquer la conservation partielle du courant axial observée expérimentalement. Deux représentations ont été utilisées :

la représentation linéaire et non linéaire (dans notre cas, exponentielle). Nous avons clôturé cette partie en étudiant le modèle NJL qui présente les mêmes effets qu'une brisure spontanée de symétrie sans l'intervention de bosons, grâce à un condensat non nul dans le vide et à une brisure dynamique de symétrie.

Par la suite, nous nous sommes intéressés aux théories de jauge. Il semble que ces théories soient des descriptions correctes des interactions fondamentales. Elles souffrent pourtant d'une maladie. Les particules messagères de l'interaction faible (identifiées aux bosons de jauge de la théorie) possèdent une masse. On ne peut cependant pas ajouter un terme de masse *ad hoc* aux bosons de jauge sans sacrifier la renormalisabilité de la théorie. La brisure spontanée d'une symétrie continue entraîne l'existence de particules sans masse. Or toutes les particules non messagères observées possèdent une masse. Nous ne pouvons évidemment pas ajouter un terme de masse pour ces BNG sans briser explicitement une symétrie du lagrangien. Ce qui est assez extraordinaire, c'est que ces deux problèmes s'éliminent mutuellement. Lorsqu'on effectue une brisure spontanée de symétrie dans une théorie de jauge, les degrés de liberté des BNG sont absorbés par les bosons de jauge qui acquièrent de cette manière une masse. Comme la symétrie est simplement cachée, elle permet la renormalisabilité de la théorie. Pour illustrer ce mécanisme de Higgs, nous avons explicité le cas $SU(3)$ et avons étudié le cas $SO(3)$.

Pour terminer, nous avons discuté d'une nouvelle famille de modèles qui décriraient la physique électrofaible au-delà du TeV tout en gardant un boson de Higgs léger. Les modèles du petit Higgs considèrent le boson de Higgs comme un pseudo-boson de Nambu-Goldstone, c'est-à-dire une particule associée à une symétrie respectée par le vide au niveau arbre mais pas par le lagrangien complet du modèle. Il s'ensuit que le boson de Higgs reste naturellement léger vu que sa masse n'apparaît que *via* les corrections quantiques. De plus, ces modèles sont construits de manière telle qu'il n'y ait pas de divergence quadratique à la masse du Higgs (et ils permettent donc de résoudre le problème de hiérarchie). Ce dernier point est le but avoué de ces modèles. Ils offrent ainsi une alternative aux modèles supersymétriques qui se servaient des boucles de superpartenaires pour annuler les divergences quadratiques. Nous avons, en partie, détaillé dans ce mémoire deux modèles se basant sur les idées du petit Higgs et vérifié certains résultats présentés par les auteurs. Nous avons profité de l'occasion pour apprendre la méthode des paramètres de Feynman et de la démontrer de deux manières dans l'annexe B.

Ce mémoire a été écrit dans le but d'étudier quelques mécanismes de brisures de symétrie et plus particulièrement la brisure spontanée. Nous avons alors essayé de présenter les idées maîtresses aussi clairement que possible et de les illustrer par des exemples explicites. Le sujet est si vaste que nous n'avons pu en traiter qu'une petite partie. Cependant, ce large horizon a permis de nous initier à différents problèmes de la théorie des champs et de la physique des particules et en approfondissant nos connaissances, d'acquérir de nouvelles compétences techniques et surtout de nous donner le goût d'aller voir plus loin. Nous espérons que vous avez pris autant de plaisir à lire ce mémoire que nous à l'écrire.

Bibliographie

[1] F. Guirand et J. Schmidt, Mythes et Mythologies, Larousse, Paris (1996) 594.

[2] R. Simon, Mécanique analytique (Deuxième partie), Derouaux, Liège (1988) 5.

[3] J. Surdej, cours de mécanique analytique de 2^{nde} candidature Sc. Phys. et Math., ULg (2001-2002).

[4] P.M. Fishbane, S. Gasiorowicz and S.T. Thornton, Physics for scientists and engineers, Prentice-Hall, inc., New Jersey (1996) 535.

[5] C.L. Cowan, Jr., F. Reines, F.B. Harrison, H.W. Kruse and A.D. McGuire, "Detection of the Free Neutrino: A Confirmation", Science **124** (1956) 103.

[6] E. Kartheuser, cours de mécanique quantique de $1^{\text{ère}}$ licence Sc. Phys., ULg (2002-2003).

[7] Y. de Rop, Introduction à la relativité générale, cours de 2^{nde} licence Sc. Phys., ULg (2003).

[8] R. Brout, "A Brief Course in Spontaneous Symmetry Breaking, I. The Paleolitic Age", Invited talk at Corfu Summer Institute on Elementary Particle Physics (Corfu 2001), Corfu, Greece, 31 Aug - 20 Sep 2001, arXiv:hep-ph/0203096.

[9] Y. Nambu, Phys. Rev. **117** (1960) 648.

[10] Y. Nambu, Phys. Rev. Lett. **4** (1960) 380.

[11] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122** (1961) 345; Phys. Rev. **124** (1961) 246.

[12] J. Goldstone, Il Nuovo Cimento **19** (1961)154.

[13] J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg, Phys. Rev. **127** (1962) 965.

[14] D.B. Kaplan, "Effective Field Theories", Lectures given at 7th Summer School in Nuclear Physics Symmetries, Seattle, WA, 18-30 Jun 1995, arXiv:hep-ph/9506035.

[15] A.V. Manohar, "Effective Field Theories", Lectures given at 35th Internationale Universitatswochen fuer Kern- und Teilchenphysik (International University School of Nuclear and Particle Physics): Perturbative and Nonperturbative Aspects of Quantum Field Theory, Schladming, Austria, 2-9 Mar 1996, arXiv:hep-ph/9606222.

[16] I.Z. Rothstein, "TASI Lectures on Effective Field Theories", Aug 2003, arXiv:hep-ph/0308266.

[17] T. Appelquist and J. Carrazone, Phys. Rev. **D11** (1975) 2856.

[18] B. Ovrut and H. Schnitzer, Phys. Rev. **D22** (1980) 2518.

[19] R. Haag, Phys. Rev. **112** (1958) 669.

[20] S. Coleman, J. Wess and B. Zumino, Phys. Rev. **177** (1969) 1251.

[21] C.G. Callen, S. Coleman, J. Wess and B. Zumino, Phys. Rev. **177** (1969) 2247.

[22] S.P. Klevanski, Rev. Mod. Phys. **64** (1992) 649.

[23] T. Kunihiro and T. Hatsuda, Progr. Theor. Phys. **71** (1984) 1332.

[24] C.N. Yang and R.L. Mills, Phys. Rev. **96** (1954) 191.

[25] P.W. Anderson, Phys. Rev. **112** (1958) 1900; Phys. Rev. **130** (1963) 439.

[26] F. Englert and R. Brout, Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 321.

[27] F. Englert, "A Brief Course in Spontaneous Symmetry Breaking, II. Modern Times: The BEH Mechanism", Presented at Corfu Summer Institute on Elementary Particle Physics (Corfu 2001), Corfu, Greece, 31 Aug - 20 Sep 2001, arXiv:hep-ph/0203097.

[28] G.S. Guralnik, C.R. Hagen and T.W.B. Kibble, Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 585.

[29] P.W. Higgs, Phys. Rev. Lett. **12** (1964a) 132; Phys. Rev. Lett. **145** (1966) 1156.

[30] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B35** (1971b) 167.

[31] F. Stancu, Group Theory in Subnuclear Physics, Clarendon Press, Oxford (1996) 226.

[32] The LEP Collaborations ALEPH, DELPHI, L3, OPAL and the LEP Electroweak Worrking Group and the SLD Heavy Flavor Group, "A combination of preliminary electroweak measurements and constraints on the standard model", arXiv:hep-ph/0212036.

[33] N. Arkani-Hamed, A.G. Cohen, E. Katz and A.E. Nelson, "The Littlest Higgs", JHEP **0207** (2002) 034, arXiv:hep-ph/0206021.

[34] D.E. Kaplan and M. Schmaltz, "The Little Higgs from a Simple Group", JHEP **0310** (2003) 039, arXiv:hep-ph/0302049.

[35] T. Han, H.E. Logan, B. McElrath and L.-T. Wang, "Phenomenology of the Little Higgs Model", Phys.Rev. **D67** (2003) 095004, arXiv:hep-ph/0301040.

[36] R. Casalbuoni, A. Deandrea and M. Oertel, "Little Higgs Models and Precision Electroweak Data", JHEP **0402** (2004) 032, arXiv:hep-ph/0311038.

[37] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **29** (1972) 1698.

Ouvrages consultés

[38] T.-P. Cheng and L.-F. Li, Gauge theory of elementary particle physics, Clarendon Press, Oxford (1984).

[39] J.F. Donoghue, E. Golowich and B.R. Holstein, Dynamics of the Standard Model, Cambridge University Press, Cambridge (1992).

[40] M.E. Peskin and D.V. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory, Addison-Wesley Publ. Co, New York (1995).

[41] E. Leader and E. Predazzi, An introduction to gauge theories and modern particle physics (Vol. 1), Cambridge University Press, Cambridge (1996).

[42] U. Mosel , Fields, Symmetries and Quarks, Springer, Berlin (1998).