Université de Liège
Faculté des Sciences

Physique Théorique Fondamentale

Versions généralisées du modèle de Nambu - Jona-Lasinio appliquées à l'étude des désintégrations fortes et électromagnétiques du glueball scalaire

Thèse présentée par
Michel Mathot
pour l'obtention du grade de
Docteur en Sciences Physiques

2002

Le plus beau souvenir ne m'apparaît que comme une épave du bonheur.

André Gide

Remerciements

Ce travail n'aurait pu voir le jour sans la participation active de Madame M. Jaminon, qui au cours de ces quatre dernières années (et quelques mois) n'a jamais été avare de conseils judicieux et de suggestions pertinentes quand il m'a fallu surmonter différents obstacles, ou lorsqu'il fallait définir un canevas à mon travail. Ses nombreuses et indispensables remarques ont permis de garantir une certaine cohérence à l'exposé, après plusieurs remaniements et retouches. C'est également elle qui a pris en charge la relecture de cette thèse, tâche souvent fastidieuse mais qui était nécessaire au vu des innombrables coquilles et approximations qui la parsemaient. Malgré son implication dans diverses collaborations, et malgré un emploi du temps souvent très chargé en raison notamment de ses nouvelles fonctions à la direction de la Maison de la Science, elle a toujours été disponible pour m'aider à surmonter les innombrables écueils qui ont jalonné mon travail de recherche. Je la remercie également de m'avoir permis de présenter un exposé à l'Université de Coimbra, dans le cadre de l' “International Workshop on Hadron Physics”, et de m'avoir accueilli dans son bureau de l'Université Autonome de Madrid.

Je ne peux omettre de joindre à ces remerciements Bruno Van den Bossche, qui m'a prodigué maints conseils pour mener à bien de multiples calculs numériques, et qui lors de discussions improvisées a donné de nombreuses idées fructueuses sur la direction à suivre. Il est celui vers qui je me tournais quand je ne voulais pas abuser de la disponibilité de Madame Jaminon, et je le remercie pour son accueil, tout comme je regrette la façon dont je l'ai malmené sur un terrain de tennis.

Je n'aurais pu mener à bien ce travail sans le soutien financier de l'Institut Interuniversitaire des Sciences Nucléaires (I.I.S.N.) de Belgique, soutien qui me fut accessible grâce à l'intervention de Monsieur le Professeur J. Cugnon. Ce dernier m'a permis de travailler au sein de son service dans les meilleures conditions, dans une atmosphère sereine et en accordant une autonomie totale dans mon travail sous la supervision de Madame Jaminon. Il m'a également permis de participer à l' “Ecole Internationale Joliot-Curie” à Maubuisson, et ne m'a jamais refusé un crédit financier nécessité par un séjour scientifique ou un déplacement.

J'associe à ces remerciements tous les membres du service, personnel scientifique ou administratif, pour l'aide logistique qu'ils m'ont procurée et pour les conseils qu'ils m'ont donnés en diverses occasions.

Je remercie aussi et surtout mes parents, qui m'ont permis de mener à bien des études supérieures dans les meilleures conditions, et qui ont accepté mon envahissante présence chez eux.

Enfin, il m'est impossible de ne pas finir par un clin d'oeil à toutes celles et ceux, jeunes chercheurs et assistants, qui m'ont accompagné et parfois supporté tout au long de ces années, que ce soit en partageant mon bureau ou en bavardant autour d'une tasse de café. Un salut tout particulier à Daniel Bartz, que j'ai dérangé presque quotidiennement dans son bureau, à Jean-Philippe Lansberg, qui a dû cohabiter avec moi dès son arrivée dans le service, à Pierre Henrotte, pour nos rituelles discussions de fin d'après-midi, à Pascal Fontaine, Isablle Letawe, Gregory Soyez, sans oublier tous les autres, extérieurs au service, dont certains sont devenus des amis, et qui ont contribué à tous ces excellents souvenirs que je conserverai de mon doctorat à l'Université de Liège.

Table des matières

Introduction

Depuis de nombreuses années, la chromo-dynamique quantique (ou QCD) s'est imposée comme la théorie des interactions fortes. Il s'agit d'une théorie de jauge non-abélienne de groupe de jauge $SU(3)_C$, fondée sur une symétrie interne locale appelée symétrie de couleur. Cette théorie décrit les interactions entre les quarks (fermions) et les gluons (bosons de jauge non massifs qui génèrent l'interaction entre les quarks). Les quarks appartiennent à la représentation fondamentale du groupe de jauge $SU(3)_C$, et chaque quark (chaque saveur de quark) existe donc en trois couleurs. Les gluons se trouvent quant à eux dans la représentation adjointe et sont au nombre de huit. La structure non-abélienne de QCD est due aux gluons qui interagissent entre eux car ils portent une charge de couleur. Cette structure rend particulièrement complexe l'étude des interactions quarks-gluons, spécialement à basse énergie où intervient la propriété très importante appelée *confinement*. Cette propriété se manifeste par le fait que les degrés de liberté adéquats ne sont plus alors les quarks et les gluons comme à haute énergie, mais bien les hadrons, parmi lesquels on distingue les baryons et les mésons (qui nous intéresseront plus particulièrement dans ce travail). Les baryons sont formés de trois quarks, tandis que les mésons sont constitués d'une paire quark-antiquark, et tous deux possèdent une fonction d'onde singulet de couleur, c'est-à-dire appartenant à la représentation de dimension 1 de $SU(3)_C$. On dit que les hadrons sont des singulets de couleur, ou qu'ils constituent des objets non colorés. Les quarks quant à eux sont dits *confinés*.

Cette propriété du confinement peut s'illustrer à l'aide de la constante de couplage fort $\alpha_s(Q^2)$ dépendant du quadri-moment de transfert Q^μ. A grand Q^2, la constante de couplage tend vers 0, et il est alors possible de recourir à une étude perturbative utilisant des séries de puissance de α_s. Cette propriété est appelée *liberté asymptotique*. A l'inverse, lorsque Q^2 diminue et tend vers 0, $\alpha_s(Q^2)$ augmente, rendant impossible un calcul perturbatif. Cette propriété est le confinement, qui se traduit par le fait que les particules observées dans la nature sont les baryons et les mésons.

Nous pouvons ici aborder une autre propriété essentielle de QCD, à savoir le phénomène de *brisure spontanée de la symétrie chirale*, qui est brièvement décrit à la fin de la section 1.1. Dans le cadre de ce travail, où nous travaillons à température et potentiel chimique nuls, QCD est réalisée dans la phase de *Goldstone* de brisure spontanée de symétrie chirale, les pions constituant les bosons de Goldstone de masse nulle dans la limite chirale (c'est-à-dire dans la limite des masses courantes des quarks nulles). Lorsque la température augmente, on observe une *restauration de la symétrie chirale*, phénomène qui semble lié à celui de *déconfinement*, ce dernier marquant le passage de la phase hadronique à la phase de *plasma* quarks-gluons.

Différentes propriétés de symétries caractérisent QCD. On parle de symétrie chaque fois qu'un changement affectant les variables du système laisse inchangée la physique. Nous discutons succinctement certaines de ces symétries à la fin de la section 1.1, dans le cadre plus particulier du modèle de Nambu - Jona-Lasinio. La symétrie peut également être affectée d'une anomalie, telle l'anomalie axiale $U(1)_A$ observée dans les identités de Ward anomales. Nous reviendrons sur ces propriétés dans la suite.

Le but principal de ce travail est de vérifier à l'aide de notre modèle décrit ci-dessous nos hypothèses sur la nature de la résonance $f_0(1500)$, qui est assimilée par de nombreux auteurs au plus léger glueball scalaire, particule hybride constituée à la fois de quarks et de glu. Nous adoptons ce point de vue et calculons dans le cadre de notre formalisme les rapports de branchement des amplitudes de désintégration forte du $f_0(1500)$ afin de les comparer aux résultats expérimentaux. L'intérêt de ce travail réside dans l'extrême complexité de l'identification et de l'étude des mésons dans le secteur scalaire isoscalaire, qui constitue encore actuellement un domaine sujet à controverse, en raison du fort recouvrement des résonances et de la présence pressentie d'une particule hybride couplée aux mésons scalaires isoscalaires. La section 1.2 est entièrement consacrée à la description de ces glueballs (ou boules de glu) et de leur interaction avec les champs mésoniques composés de quarks confinés. Au cours de notre cheminement vers cette détermination des largeurs de désintégration forte d'un méson scalaire en deux mésons pseudo-scalaires, nous sommes amenés à étudier les caractéristiques des nonets de mésons scalaires et pseudo-scalaires, c'est-à-dire essentiellement leur masse et leur couplage aux quarks.

Signalons que de nombreux groupes recourent aux calculs sur réseau pour étudier les propriétés de ces particules à basse énergie. Ces calculs constituent un outil performant pour obtenir de nouveaux résultats et enseignements sur QCD, au prix cependant d'importants efforts numériques.

Toutefois, il est utile d'étudier QCD à l'aide de modèles simplifiés, dits modèles *effectifs*, qui bien exploités peuvent apporter beaucoup d'informations sur QCD à basse énergie. Ces modèles effectifs font l'objet de nombreuses applications. Parmi ceux-ci, celui développé par Nambu et Jona-Lasinio (NJL) [97] a été fréquemment utilisé pour étudier les propriétés dynamiques du vide ou d'un milieu dense [79] et chaud [59] avec ou sans mésons vecteurs. Le modèle NJL est un cas limite des modèles à symétrie globale de couleur, dans lequel l'élimination des champs de gluons conduit à une interaction effective ponctuelle à quatre quarks. Il a été intensivement exploité (voir la thèse [83]) afin d'étudier les phénomènes de restauration de la symétrie chirale et de déconfinement. Toutefois, ce modèle ne rend pas compte de l'anomalie de trace de QCD, ainsi d'ailleurs que la plupart des modèles de QCD à basse énergie, tels les modèles de sac [52, 53], de skyrmions [123, 130], les modèles diélectriques de couleur [105] et les modèles σ linéaires et non linéaires [25, 87]. Cette anomalie de trace, aussi appelée anomalie d'échelle de QCD, a été depuis modélisée de façon récurrente par l'introduction d'un champ de dilaton scalaire représentant les fluctuations du vide du champ de gluons. Par exemple, ce champ a été introduit par le groupe de Syracuse [77, 78, 92] pour l'étude des mésons scalaires et des solitons chiraux.

Afin de réaliser cette étude des nonets scalaires et pseudo-scalaires, nous allons utiliser deux versions d'un modèle effectif basé sur le modèle NJL pour calculer les masses et les largeurs de désintégration de certains mésons, avec une attention centrée sur la résonance $f_0(1500)$. Nous prenons ici le parti pris, partagé par divers auteurs (voir la section 1.2.1), d'assimiler le glueball scalaire à cette résonance $f_0(1500)$. Nous étudions sa masse et les rapports de branchement relatifs à ses amplitudes de désintégration, afin de confronter nos résultats avec l'expérience et de vérifier le pouvoir prédictif de notre modèle.

Dans la première partie de ce travail, nous exploitons une version modifiée du modèle NJL qui prend en compte l'anomalie de trace de QCD, via l'introduction au niveau de l'action bosonisée du champ de dilaton scalaire χ identifié avec le condensat de gluons [110]. Nous supposons ainsi que le confinement des gluons est lié au condensat χ_s (partie stationnaire du champ χ). Même si ce dernier n'est jamais nul, comme on peut le voir dans [83], la phase où il présente sa valeur minimale est appelée *plasma de gluons*. L'action initiale est tout d'abord rendue invariante d'échelle, c'est-à-dire invariante sous l'effet d'une dilatation d'échelle sur l'espace-temps, via le couplage de ce champ de dilaton χ avec les termes de masse du Lagrangien, et l'utilisation d'un cut-off dans la boucle de quarks proportionnel à ce champ χ. Ce cut-off noté $\Lambda\chi$ sera à la base d'un couplage indirect mais non négligeable entre les champs de quarks et le champ χ, couplage caractéristique de notre formalisme. L'anomalie axiale $U(1)_A$ empêchant le méson η' d'être un boson de Goldstone est introduite via un terme de masse pour le champ π_0 à l'aide d'un paramètre phénoménologique ξ. L'anomalie de trace quant à elle est implémentée à l'aide d'un potentiel $V(\chi)$ rajouté à la main au niveau du Lagrangien. Ce modèle de Lagrangien effectif, baptisé *modèle A* par G. Ripka et M. Jaminon, a été appliqué dans sa version $SU(2)_F$ à l'étude du comportement en densité [80, 110] et en température [81, 82] des condensats de quarks et de gluons, respectivement représentés par les champs scalaires $\varphi \sim <\bar{q}q>^{1/3}$ et $\chi \sim <F^2_{\mu\nu}>^{1/4}$ [110], où $F^a_{\mu\nu}$ est le tenseur champ de gluons. Notons que le champ de dilaton a été considéré comme un paramètre d'ordre associé au confinement des gluons [30], bien que cette proposition ait été remise en question [91]. Quant au champ associé au condensat de quarks, il constitue un paramètre d'ordre associé à la brisure de la symétrie chirale.

Dans le cadre de ce travail, nous nous limitons à une étude à température et densité de quarks nulles, faisant intervenir uniquement des champs mésoniques scalaires et pseudo-scalaires. Nous nous concentrons par ailleurs sur la version $SU(3)_F$ de notre modèle dans l'espace des saveurs [83], avec ponctuellement une référence à la version $SU(2)_F$, qui peut s'obtenir à partir de la version à trois saveurs en prenant la limite $m_s \to \infty$. On est alors en présence d'un état triplet et d'un état singulet, et non plus d'un état octet et d'un état singulet. Le nombre des saveurs considérées dans ces modèles effectifs est généralement limité à trois, en raison de la nette rupture de symétrie occasionnée par la masse comparativement élevée du quatrième quark, le quark *charme* (voir table B.1 en annexe).

Dans la continuité des travaux exposés dans [83], nous calculons les largeurs de désintégration du glueball scalaire couplé aux deux mésons scalaires isoscalaires, nous limitant à la désintégration électromagnétique [85] ainsi qu'aux désintégrations fortes en deux mésons pseudo-scalaires, du type $\pi\pi$, $\eta\eta$, $\eta\eta'$ et $K\bar{K}$. Le glueball est associé au $f_0(1500)$ [9, 10] et couplé aux quarks via le couplage indirect résultant du cut-off invariant d'échelle. Par ailleurs, le couplage entre les trois mésons scalaires isoscalaires, qui sont des hybrides constitués d'un mélange de glu et d'excitations $u\bar{u}$ et $s\bar{s}$, est fixé par la valeur de χ_s, valeur du condensat de gluons dans le vide : plus χ_s est faible, et plus le couplage est important. Donc, en gardant à l'esprit les limitations du modèle utilisé, telle la non-renormalisabilité et le non-confinement, il offre la possibilité d'attribuer une composante en quarks $q\bar{q}$ au glueball et ainsi de décrire des processus dans lesquels ce dernier se désintègre via des diagrammes de Feynman composés de boucles de quarks. A cette contribution aux amplitudes de désintégration, contribution baptisée *directe*, s'ajoute celle résultant de l'introduction du champ χ au niveau du Lagrangien, de manière à garantir l'invariance d'échelle, et baptisée contribution *locale*. Ces considérations sont reprises en détail dans [86] et seront exposées plus loin.

Toutefois, comme mentionné ci-dessus, le modèle NJL modifié présente les mêmes lacunes que le modèle NJL usuel. D'une part, il ne confine pas les quarks, générant des largeurs non physiques $\Gamma_{q\bar{q}}$ dès que la masse des mésons étudiés se situe au-delà du seuil en énergie correspondant à la somme des masses des quarks composant le méson. Pour des énergies supérieures à ce seuil, les différents diagrammes présentent une partie imaginaire, croissante à mesure que l'on s'éloigne du seuil, ce qui rend les résultats numériques de moins en moins fiables. D'autre part, le modèle n'est pas renormalisable, ce qui nécessite l'introduction d'un cut-off pour régulariser les boucles de quarks présentant une divergence ultraviolette, ce cut-off devenant une grandeur intrinsèque du modèle.

Dans la deuxième partie, nous remédions au problème de non-confinement du modèle par l'introduction au niveau du Lagrangien effectif d'une partie confinante, extraite des travaux du groupe de C.M. Shakin. Une première approche de ces travaux se trouve dans [37, 39]. Comme nous le verrons, l'introduction du confinement selon ce schéma permettra de considérer une masse constituante M_u plus petite que celle que nous devions utiliser pour reproduire le nonet scalaire, et qui était égale à 725 MeV, moitié de la masse du $a_0(1450)$ [86]. L'ampleur de cette réduction des masses constituantes dépendra des paramètres de confinement choisis, au nombre de deux. Par exemple, avec les paramètres fréquemment utilisés par C.M. Shakin, la masse M_u devient égale à 605 MeV pour reproduire le même nonet scalaire. Le formalisme de ce modèle de confinement est basé sur la définition de fonctions vertex, calculées à partir d'équations intégrales représentant une somme d'échelles d'interactions confinantes. Ces fonctions vertex s'annulent aux pôles, ce qui supprime le seuil non physique $q\bar{q}$ et rend les diagrammes de polarisation réels. A l'aide de ce modèle confinant, nous suivons le même canevas que dans le formalisme sans confinement, et calculons les masses, les constantes de couplage et les largeurs des différents mésons. Enfin, nous comparons les résultats des différents schémas adoptés.

Chapitre 1

Brève présentation du modèle de Nambu - Jona-Lasinio. La notion de glueball.

1.1 Le modèle de Nambu - Jona-Lasinio

Nous introduisons brièvement le modèle de Nambu - Jona-Lasinio (NJL), qui sert de base au modèle [83, 110] exploité dans la première partie de ce travail (chapitre 2), ainsi qu'au modèle généralisé intégrant le confinement [37] qui fait l'objet de la deuxième partie (chapitre 3). Des références intéressantes dédiées à ce modèle NJL sont citées dans la thèse [83]. Citons en particulier [88], qui passe en revue le modèle dans ses versions à deux et trois saveurs et étudie les effets de la température et du potentiel chimique.

Le modèle NJL, construit à l'origine sur la base d'une analogie avec la supraconductivité [97, 98], peut s'obtenir comme une limite ponctuelle du modèle à symétrie globale de couleur, noté modèle GCM. Ce modèle GCM modélise l'interaction effective de QCD entre singulets de couleur à l'aide de la technique des intégrales fonctionnelles. Selon la prescription de Feynman, résoudre la théorie quantique consiste à rechercher l'amplitude de transition vide-vide définie par l'intégrale fonctionnelle suivante, dans l'espace de Minkowski :

$$\mathcal{Z}_{QCD} = \int \mathcal{D}q\mathcal{D}\bar{q}\mathcal{D}A^a_\mu \exp\left(i\int d^4x\ \mathcal{L}_{QCD}\right). \tag{1.1}$$

Le Lagrangien de QCD s'écrit :

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{q}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m^0\right)q - \frac{1}{4}\left(F^a_{\mu\nu}\right)^2 + g\bar{q}\gamma^\mu A_\mu q, \tag{1.2}$$

où q est le champ de quarks et g la constante de couplage renormalisée définie par rapport à la constante de couplage fort $\alpha_s(Q^2)$ dépendant du quadri-moment de transfert Q :

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{g^2(Q^2)}{4\pi}. \tag{1.3}$$

Comme indiqué dans l'introduction, la constante de couplage tend vers 0 à grand Q^2, et nous pouvons alors recourir à une étude perturbative utilisant des séries de puissance de α_s. Cette propriété est la *liberté asymptotique*.
Dans (1.2), m^0 désigne la matrice diagonale des masses courantes des quarks dans l'espace des saveurs, $A_\mu = A_\mu^a \lambda^a/2$ représente les champs de gluons avec λ^a désignant les matrices de couleur de Gell-Mann ($a = 1, \ldots, 8$). Le deuxième terme de (1.2) est le Lagrangien de Yang-Mills, exprimé à l'aide du tenseur champ de gluons :

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \tag{1.4}$$

où le dernier terme est le terme d'interaction entre gluons (structure non-abélienne de la théorie) et fait intervenir les coefficients totalement antisymétriques f^{abc}, constantes de structure de $SU(3)$ (annexe A.3).
Enfin, le dernier terme de (1.2) représente le couplage entre les gluons et les courants colorés dus aux quarks, qui s'écrivent

$$j_a^\mu = \bar{q}\frac{\lambda^a}{2}\gamma^\mu q. \tag{1.5}$$

Le Lagrangien de QCD (1.2) se rapporte à une théorie de groupe de jauge $SU(3)_C$ dans l'espace des couleurs, et est invariant sous la transformation de jauge

$$q(x) \to e^{-ig\theta_a(x)\lambda_a/2} q(x), \tag{1.6}$$

où les $\theta_a(x)$ sont les paramètres du groupe de jauge. Il y a invariance à condition de substituer à la dérivée simple la dérivée covariante définie comme suit :

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu - ig\frac{A_\mu^a(x)\lambda_a}{2}. \tag{1.7}$$

Cette propriété d'invariance de jauge est nécessaire pour assurer la renormalisabilité de la théorie non-abélienne.

Le modèle NJL s'obtient dans notre approche en choisissant une distribution de Dirac pour le propagateur de gluons du modèle GCM :

$$\Gamma^{(2)}(x,y)_{\mu\nu}^{ab} = -i\varrho\delta(x-y)\delta^{ab} g_{\mu\nu}, \tag{1.8}$$

où $g_{\mu\nu}$ est le tenseur métrique (annexe A.2.1). La constante ϱ est reliée au condensat de gluons :

$$\varrho^2 \propto < F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} > . \tag{1.9}$$

Cette approximation fournit une nouvelle fonctionnelle génératrice, à la place de (1.1) :

$$\mathcal{Z}_{QFD} \approx \int \mathcal{D}q\mathcal{D}\bar{q} \exp\left(i\int d^4x \; \mathcal{L}_{QFD}\right), \tag{1.10}$$

avec le Lagrangien

$$\mathcal{L}_{QFD} = \bar{q}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m^0\right) q - \frac{\varrho g^2}{2} j_\mu^a(x) j_a^\mu(x). \tag{1.11}$$

Contrairement au Lagrangien de QCD (1.2), Le Lagrangien (1.11) n'est plus invariant sous la transformation de jauge (1.6), mais par contre il vérifie l'invariance globale, c'est-à-dire sous une transformation avec des paramètres θ_a indépendants des coordonnées spatio-temporelles. Par ailleurs, il est important de noter que le choix du propagateur (1.8) rend *locale* l'interaction entre les quarks, ce qui est illustré par le fait que les deux courants sont pris au même point x dans (1.11). Ce caractère local de l'interaction engendre deux conséquences importantes : on perd la renormalisabilité ainsi que le confinement [83, 88]. Ces inconvénients n'apparaissent pas dans le modèle GCM puisque la nature non locale de l'interaction implique une bosonisation basée sur des champs bilocaux, ce qui garantit le caractère fini des expressions. Par ailleurs, le confinement est inclus dans la forme choisie pour le propagateur de gluons. Dans le modèle NJL, les expressions divergentes doivent être régularisées, au moyen d'un cut-off par exemple, et le choix de la méthode de régularisation fait alors partie intégrante du modèle. Dans le cadre d'une théorie à température et densité nulles, les intégrales sont des grandeurs invariantes d'un point de vue relativiste. Leur divergence pourra donc être traitée au moyen d'un cut-off quadridimensionnel, contrairement aux intégrales évaluées à température et densité finies (que nous ne considérons pas dans ce travail). On peut opter également pour un cut-off tridimensionnel, en intégrant initialement sur la variable temporelle. Toutefois, ce schéma de régularisation ne conserve pas le caractère covariant des équations du vide. Quoiqu'il en soit, il est essentiel de rester cohérent, et de traiter toutes les expressions de la même manière.

Le Lagrangien (1.11) décrit la dynamique des saveurs et, en nous limitant à la description des mésons scalaires et pseudo-scalaires, l'utilisation des transformations de Fierz (annexe B.3) conduit, en négligeant le terme octet de couleur, à l'expression suivante du Lagrangien NJL :

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{q}\left(i\partial\!\!\!/ - m^0\right)q + G_s \sum_{i=0}^{8}\left[\left(\bar{q}\frac{(\lambda^i)_F}{\sqrt{2}}q\right)^2 + \left(\bar{q}i\gamma_5\frac{(\lambda^i)_F}{\sqrt{2}}q\right)^2\right], \tag{1.12}$$

avec $\lambda^0 = \sqrt{2/3}\mathbb{1}$, et $G_s \propto \varrho g^2$. Nous avons ici redéfini la grandeur G_s par rapport à l'annexe B.3, en considérant un G_s deux fois plus petit afin d'être en accord avec les notations des auteurs du modèle de confinement [37, 39] que nous adoptons dans la deuxième partie de ce travail. Le Lagrangien (1.12), à partir duquel a été dérivé le modèle étendu [83, 110], se limite aux trois premières saveurs des quarks, les quarks plus massifs étant découplés de la théorie.

Nous concluons cette section en passant en revue les principales propriétés de symétrie du Lagrangien NJL. Ces propriétés sont basées sur le théorème de Noether qui stipule que si l'action, intégrale sur l'espace-temps de la densité lagrangienne, est invariante sous une transformation continue des champs de quarks, il y a conservation d'un courant, conservation exprimée par l'annulation de la quadri-divergence du courant de Noether. Ce théorème s'applique à la fois aux symétries internes et d'espace-temps. Dans le cadre des symétries internes, portant sur les degrés de liberté internes comme la saveur et la couleur, nous pouvons travailler au niveau du Lagrangien, et nous constatons que dans la limite chirale où les masses courantes des quarks (contenues dans la matrice diagonale m^0) sont nulles, le

Lagrangien (1.12) est invariant sous les transformations vectorielles $SU(3)_V$ et $U(1)_V$ ainsi que sous les transformations axiales $SU(3)_A$ et $U(1)_A$. Ce sont les termes de masse qui peuvent briser ces symétries (la symétrie $U(1)_V$ est toujours vérifiée), et on parle alors de brisure explicite de la symétrie. La symétrie $U(1)_A$ est en plus brisée au niveau quantique : il s'agit de l'anomalie axiale, exprimée dans les identités de Ward anomales décrites en (1.20, 1.21). De multiples références traitant de ces développements peuvent être trouvées dans le chapitre 1 de la thèse [83].

Enfin, nous évoquons le phénomène de la brisure spontanée de symétrie chirale, qui intervient lorsqu'une symétrie du Lagrangien n'est pas une symétrie de l'état fondamental. Cette brisure spontanée intervient de façon essentielle dans l'évolution des caractéristiques de la matière en fonction de la température et de la densité (évolution que nous n'étudions pas dans ce travail, travaillant à température et densité nulles). A température nulle et potentiels chimiques de quarks nuls, QCD est réalisée dans la phase de *Goldstone* de brisure spontanée de symétrie chirale, avec les pions constituant les bosons de Goldstone, particules de masse nulle dans la limite chirale. Lorsque la température augmente, le système passe via une transition d'un certain type dans une phase de plasma quarks-gluons. Cette transition de phase déconfinante (les degrés de liberté ne sont plus les hadrons) est associée à une restauration de la symétrie chirale comme semblent l'indiquer les calculs sur réseau. Nous sommes passés dans le mode de *Wigner*, le condensat de quarks $< \bar{q}q >$ tend vers 0, entraînant l'annulation de la masse constituante des quarks, masse des quarks habillés de paires virtuelles quark-antiquark et de gluons.

1.2 Les boules de glu ou glueballs

L'identification des glueballs demeure toujours à l'heure actuelle un sujet épineux dans le cadre du modèle standard. Alors que les degrés de liberté gluoniques exprimés dans le Lagrangien de QCD ont été établis rigoureusement dans le domaine des hautes énergies, leur dynamique dans la limite d'interaction forte observée par la spectroscopie hadronique reste très obscure [9]. Cette situation est sur le point d'évoluer, car toute une série de candidats pour les hadrons gluoniques est proposée par diverses collaborations. Nous présentons dans les deux sections suivantes un récapitulatif des observations et hypothèses de divers auteurs ou collaborations qui se sont intéressés au sujet. Nous livrons les résultats de leur recherche de manière brute et succincte, le lecteur désireux d'approfondir certains points pouvant consulter les références répertoriées dans la bibliographie.

1.2.1 Propriétés du glueball scalaire. Interaction avec le nonet scalaire.

Dans [10], C. Amsler et F.E. Close avancent qu'un glueball scalaire existe dans la région de 1.5 GeV, probablement couplé avec les membres isoscalaires du nonet scalaire, à la lumière de la phénoménologie détaillée des résonances $f_0(1370)$ et $f_0(1500)$. D'après les auteurs, les propriétés de cette paire de mésons, découverts au LEAR (Low Energy

Antiproton Ring) installé au CERN, sont incompatibles avec une nature strictement $q\bar{q}$ de ces mésons. Ils montrent par contre que le $f_0(1500)$ est un candidat possible pour l'état fondamental du glueball attendu autour de 1500 MeV et couplé avec les états proches du nonet $q\bar{q}$ 0^{++}. Les tests qui appuient cette hypothèse conduisent à la prédiction d'un autre état scalaire fortement couplé aux résonances $K\bar{K}$, $\eta\eta$ et $\eta\eta'$, et situé dans la région entre 1500 MeV et 1800 MeV. Une description du LEAR et de ses applications est donnée dans [124]. Le LEAR abritait le détecteur Crystal Barrel, dont les données sont exploitées par la collaboration Crystal Barrel (CBC) dans de nombreuses publications, dont nous donnons un aperçu dans la suite. Dans cet anneau, des antiprotons avec une impulsion de 200 MeV/c sont arrêtés dans une cible d'hydrogène liquide, provoquant l'annihilation proton-antiproton. Une description plus détaillée et des exemples de données statistiques sont exposés dans [124].

En plus des données expérimentales, les études théoriques suggèrent qu'une activité gluonique pourrait se manifester dans la région en masses proche de 1.5 GeV. Les calculs de QCD sur réseaux constituent la meilleure simulation de la théorie et prédisent dans [16] que le plus léger glueball primitif ("quenched approximation") possède une masse de 1.55 $\pm$ 0.05 GeV avec $J^{PC} = 0^{++}$. D'autres calculs sur réseaux [128] placent le glueball légèrement plus haut, avec une masse de 1.74 $\pm$ 0.07 GeV, avec une valeur optimisée proposée dans [125] de 1.57 $\pm$ 0.09 GeV. Quelles que soient les interprétations adoptées pour tous ces résultats, ces derniers suggèrent que les mésons scalaires dans la région de 1.5 GeV méritent une attention spéciale. Par ailleurs, il est de plus en plus admis qu'un trop grand nombre de mésons 0^{++} ont été confirmés pour être tous des états $q\bar{q}$ [94].

D'autres travaux, dont [7, 12], placent également cette résonance 0^{++} en 1.5 GeV. L'article [7] conclut que le $f_0(1500)$ ne peut être identifié avec un méson $s\bar{s}$ car il aurait alors été observé lors de l'annihilation $p\bar{p}$ dans l'état final $K\bar{K}\pi$. Par contre, son identification avec le glueball est renforcée par le fait que sa production a lieu lors de mécanismes qui traditionnellement sont considérés comme favorisant les excitations gluoniques. Parmi ces processus, on peut signaler les suivants, en notant G la résonance observée :

1. La désintégration radiative du J/ψ : $J/\psi \to \gamma + G$.
2. Les collisions dans la région centrale loin des faisceaux de quarks et de la cible : $pp \to p_f(G)p_s$ [1].
3. L'annihilation proton-antiproton dans laquelle la destruction des quarks donne l'opportunité aux gluons de se manifester (CBC). Le $f_0(1500)$ a été observé comme se désintégrant vers $\pi^0\pi^0$, $\eta\eta$ et $\eta\eta'$ dans $\bar{p}p \to 3\pi^0$ [7, 12], $\bar{p}p \to \pi^0\eta\eta$ [4, 7] et $\bar{p}p \to \pi^0\eta\eta'$ [6].

Les signaux observés apparaissent dominants dans des canaux de désintégration tels que $\eta\eta$ et $\eta\eta'$, qui sont traditionnellement considérés comme des signatures du glueball. Cette résonance $f_0(1500)$ a été immédiatement considérée comme un candidat pour le plus léger glueball scalaire [12] par la CBC suite aux observations suivantes :
- Sa masse est très proche de la valeur prédite par les calculs de QCD sur réseau [16].
- Du point de vue de la systématique $q\bar{q}$, cette résonance apparaît comme excédentaire.

– Dans la réaction fortement gluonique $J/\psi \to \gamma + 4\pi$, un pic important est observé dans le spectre à quatre pions, qui est compatible en masse et en largeur avec $f_0(1500)$. Dans la suite, une analyse des données fournies par MARK-III confirma ses nombres quantiques comme étant 0^{++}.

La référence [13] regroupe ces observations et conclut que les données en production centrale à haute énergie mettent en évidence que les quarks légers dans les processus gluoniques mous sont produits avec violation de la symétrie de saveur : la production des quarks étranges est fortement supprimée. De même, les rapports des amplitudes de désintégration radiative $J/\psi \to \gamma\eta/\gamma\eta'$ et $J/\psi \to \gamma\phi\phi/\gamma\omega\omega$ montrent le même facteur de suppression. Par ailleurs, les constantes de couplage relatives à la désintégration du glueball en deux mésons $q\bar{q}$ sont en bon accord avec les données de CBC pour les ratios de désintégration du $f_0(1500)$ en deux mésons pseudo-scalaires, argument en faveur de la nature de glueball de cette résonance. Dans [14], le même auteur résume les résultats des recherches dans le secteur $IJ^{PC} = 00^{++}$. Il identifie cinq résonances scalaires dans la région 1000-1900 MeV et conclut d'après leur position que le glueball scalaire, particule n'appartenant pas aux états $q\bar{q}\ {}^3P_0$, doit être mélangé avec les états mésoniques $q\bar{q}$ voisins. Une analyse plus détaillée est exposée dans [15], et se base sur la technique de la matrice D ou matrice des propagateurs. Cette méthode a été développée par l'auteur sur base de la méthode de dispersion N/D afin d'étudier le spectre des hadrons dans le cas de recouvrement de résonances. Dans le cadre de cette technique, le couplage du glueball scalaire avec les états $q\bar{q}$ voisins est étudié avec un formalisme en quarks et gluons. Les résultats suggèrent que le plus léger glueball se disperse sur les résonances voisines, se mélangeant principalement avec les états $q\bar{q}\ 1\ {}^3P_0$ et $2\ {}^3P_0$. Via ce couplage, la particule se transformerait en une large résonance, $f_0\left(1530^{+90}_{-250}\right)$, qui se composerait de 40-50 % de glu.

Historiquement, la mise en évidence de cette résonance $f_0(1500)$, après 25 années durant lesquelles l'étude des glueballs a fait l'objet de relativement peu de publications, a été rendue possible par l'étude progressive de mécanismes avec des états finals neutres (comprenant π^0, η, η'), alors qu'auparavant les efforts restaient concentrés sur des états finals de pions chargés et de kaons [54]. Cette étude dédiée aux états neutres constitua une nouvelle direction initiée par la collaboration GAMS au CERN [2], recherchant de nouveaux états se désintégrant vers les paires $\eta\eta$ et $\eta\eta'$.

Dans [10], les auteurs montrent que les taux de désintégration du $f_0(1500)$ sont compatibles avec un état glueball dont la masse se situe entre les états scalaires de quarkonia $n\bar{n}$ et $s\bar{s}$, avec $n\bar{n} \equiv (u\bar{u} + d\bar{d})/\sqrt{2}$. Ces états scalaires voisins influencent les désintégrations du glueball. Les auteurs montrent également que la dynamique inspirée par les calculs sur réseau est cohérente avec les données expérimentales et qu'un nonet plausible peut être construit avec les mésons scalaires restants. D'autre part, les phénomènes indiquant la présence possible d'un glueball n'apparaissent pas dans le secteur $I = 1$ et dans le secteur étrange, ce qui conforte la position selon laquelle l'excitation glueball affecte le spectre $I = 0$. Après correction des effets d'espace de phase, les résultats de la collaboration Crystal Barrel fournissent les rapports de branchement appliqués aux amplitudes partielles suivants :

$$R_1 = \frac{\gamma^2 (f_0(1500) \to \eta\eta)}{\gamma^2 (f_0(1500) \to \pi\pi)} = 0.27 \pm 0.11, \tag{1.13}$$

$$R_2 = \frac{\gamma^2 (f_0(1500) \to \eta\eta')}{\gamma^2 (f_0(1500) \to \pi\pi)} = 0.19 \pm 0.08, \tag{1.14}$$

$$R_3 = \frac{\gamma^2 \left(f_0(1500) \to K\bar{K}\right)}{\gamma^2 (f_0(1500) \to \pi\pi)} \leq 0.1, \tag{1.15}$$

où a été utilisé le facteur de forme de la référence [67], qui s'écrit

$$|F_{ij}(q)|^2 = q^{2l} \exp\left(-q^2/8\beta^2\right).$$

La variable l est le moment angulaire de l'état final et on aura donc $l = 0$ dans le cas des désintégrations 0^{++} en deux mésons pseudo-scalaires. La largeur de désintégration partielle vers une paire de mésons $m_i m_j$ s'écrit dans [10] :

$$\Gamma_{ij} = \gamma_{ij}^2 \times |F_{ij}(q)|^2 \times S_p(\vec{q}), \tag{1.16}$$

où $S_p(\vec{q})$ dénote l'espace de phase et $F_{ij}(q)$ est un facteur de forme dépendant du modèle. Les rapports de branchement (1.13-1.15) sont obtenus avec $\beta = 0.5$ GeV/c. Ce facteur de forme permet de bien reproduire les rapports de branchement pour les désintégrations de l'état fondamental 2^{++} si $\beta \geq 0.5$ GeV/c [10]. L'hypothèse d'une nature $q\bar{q}$ est possible si on ne veut reproduire que deux ratios, par contre elle est à rejeter si on veut reproduire les trois simultanément [10]. De plus, la grande largeur de désintégration du $f_0(1370)$ en deux pions suggère que cet état est fortement $n\bar{n}$, ce qui infirme encore plus une interprétation exclusivement $q\bar{q}$ pour le $f_0(1500)$ [9]. Claude Amsler regroupe dans [8] les conclusions de sept années de travaux de la CBC, collaboration qui a accumulé de très larges échantillons statistiques à partir essentiellement de processus d'annihilation $\bar{p}p$ au repos. Les masses et largeurs calculées pour les résonances $f_0(1370)$ et $f_0(1500)$ sont :

$$f_0(1370) \;:\; m = 1360 \pm 23 \text{ MeV},\ \Gamma = 351 \pm 41 \text{ MeV}, \tag{1.17}$$

$$f_0(1500) \;:\; m = 1505 \pm 9 \text{ MeV},\ \Gamma = 111 \pm 12 \text{ MeV}, \tag{1.18}$$

et les rapports de branchement du $f_0(1500)$ après correction des effets d'espace de phase et de facteur de forme ($|F_{ij}(q)|$ est alors posé à égal à 1) valent :

$$\begin{aligned}\gamma^2(\pi\pi) &: \gamma^2(\eta\eta) : \gamma^2(\eta\eta') : \gamma^2(K\overline{K}) \\ &= 1 : 0.195 \pm 0.075 : 0.320 \pm 0.114 : 0.138 \pm 0.038.\end{aligned} \tag{1.19}$$

et sont sensiblement différentes de (1.13-1.15) (voir aussi [86]).

Dans [55], les plus bas mésons 0^{++}, c'est-à-dire $f_0(980)$ ($I = 0$) et $a_0(980)$ ($I = 1$) sont identifiés à des molécules $K\bar{K}$, supposition basée sur leurs forts couplages au $K\bar{K}$ - en dépit de leur masse proche du seuil en $K\bar{K}$ - et sur leurs faibles largeurs partielles en $\gamma\gamma$. Par ailleurs, dans [10], il est montré que la résonance $a_0(1450)$ ($J^{PC} = 0^{++}$, $I^G = 1^-$), rapportée par la collaboration Crystal Barrel au LEAR [5], peut être identifiée avec le membre d'isospin 1 de l'état fondamental du nonet 0^{++}. Les auteurs de [10] proposent ainsi qu'un nonet $q\bar{q}$ peut-être construit de façon cohérente avec les résonances $a_0(1450)$, $f_0(1370)$, $K_0^*(1430)$ et un état $s\bar{s}$ au-delà de 1500 MeV, interprétant les états $f_0(980)$ et $f_0(1500)$ comme des états exotiques (pas simplement $q\bar{q}$). La nature hybride du $f_0(1500)$ est prouvée par les deux observations suivantes : Le système $f_0(1500)$-$f_0(1370)$ ne peut être décrit dans le cadre du nonet $q\bar{q}$, comme mentionné plus haut, et d'autre part les rapports de branchement du $f_0(1500)$ ne respectent pas la transparence de la glu par rapport à la saveur. Un couplage entre les champs de gluons G et les champs de quarks $q\bar{q}$ est donc attendu. Les conclusions de [10] posent donc le $f_0(1500)$ comme un état principalement glueball couplé à deux états de quarks pour constituer un système de trois particules hybrides. Les largeurs de désintégration partielles de l'état le plus bas en énergie, le $f_0(1370)$, sont consistantes avec un état principalement $n\bar{n}$, tandis que l'état principalement $s\bar{s}$ doit se situer dans la région de 1600-1700 MeV. Par ailleurs, l'importante réduction de la largeur du $f_0(1500)$ ($\Gamma_{\text{totale}} = 116 \pm 17$ MeV [6, 7]), très prononcée dans le canal $K\bar{K}$ ce qui suggère une interférence destructive entre les composantes $n\bar{n}$ et $s\bar{s}$, de même que la sensible réduction de la largeur du $f_0(1370)$ ($\Gamma_{\text{totale}} = 200 - 700$ MeV [7, 12]) par rapport aux autres éléments du nonet, sont en accord avec l'hypothèse que ces deux états sont partenaires dans un schéma de coulage glueball(G)-$q\bar{q}$. Enfin, un autre argument repose sur la dépendance en saveur des désintégrations du $f_0(1500)$, qui suggère qu'il ne peut être un pur glueball et qu'un couplage significatif entre les états G et $q\bar{q}$ oriente les rapports de branchement dans le secteur 0^{++}.

Dans une publication plus récente [56], les auteurs se penchent plus précisément sur le couplage entre les résonances $f_0(1370)$, $f_0(1500)$ et $f_0(1710)$ et sur la recherche du glueball scalaire. Pour la première fois, une table complète de données relatives aux rapports de branchement est disponible pour les désintégrations à deux corps des trois résonances précitées vers tous les mésons pseudo-scalaires, cette table étant issue de la collaboration WA102 [19], qui a étudié la réaction $pp \to p_f(\eta\eta)p_s$ à 450 GeV/c et observé les signaux $f_0(1500)$, $f_0(1710)$ et $f_2(2150)$. Les rapports de branchement mesurés par cette collaboration sont repris dans la table 1.1. Les implications de ces données sur le contenu en saveur de ces trois états sont étudiées. Ces résultats se trouvent en accord avec l'hypothèse déjà avancée que le glueball scalaire des études sur réseau de QCD est couplé avec le nonet $q\bar{q}$, et sont compatibles avec les taux de production des trois états f_0 dans les processus de production centrale pp, d'annihilation $p\bar{p}$ et de désintégration radiative du J/ψ.

$\frac{\gamma^2(f_0\to\alpha\beta)}{\gamma^2(f_0\to\phi\varphi)}$	rapports de branchement mesurés
$\frac{f_0(1370)\to\pi\pi}{f_0(1370)\to K\bar{K}}$	2.17 ± 0.9
$\frac{f_0(1370)\to\eta\eta}{f_0(1370)\to K\bar{K}}$	0.35 ± 0.21
$\frac{f_0(1500)\to\pi\pi}{f_0(1500)\to\eta\eta}$	5.5 ± 0.84
$\frac{f_0(1500)\to K\bar{K}}{f_0(1500)\to\pi\pi}$	0.32 ± 0.07
$\frac{f_0(1500)\to\eta\eta'}{f_0(1500)\to\eta\eta}$	0.52 ± 0.16
$\frac{f_0(1710)\to\pi\pi}{f_0(1710)\to K\bar{K}}$	0.20 ± 0.03
$\frac{f_0(1710)\to\eta\eta}{f_0(1710)\to K\bar{K}}$	0.48 ± 0.14
$\frac{f_0(1710)\to\eta\eta'}{f_0(1710)\to\eta\eta}$	< 0.05

TAB. 1.1 – Rapports de branchement mesurés par WA102

Les auteurs adoptent ici les couplages en $\gamma\gamma$ comme preuve la plus sensible du contenu en saveur et en phase des états f_0. Dans l'esprit de [57], ils obtiennent :

$$\begin{aligned}\Gamma\left(f_0(1710)\to\gamma\gamma\right):\Gamma\left(f_0(1500)\to\gamma\gamma\right):\Gamma\left(f_0(1370)\to\gamma\gamma\right)\\ = 3.8\ \pm\ 0.9 : 6.8\ \pm\ 0.8 : 16.6\ \pm\ 0.9.\end{aligned}$$

La largeur du $f_0(1500)$ excède celle du $f_0(1710)$ car le glueball est plus proche de l'état $n\bar{n}$ que de l'état $s\bar{s}$. Par ailleurs, les trois processus cités plus haut permettent chacun d'affiner les conclusions [19, 20, 56, 57].

Dans [57], les auteurs s'intéressent à quatre résonances comme possibles candidats pour le glueball : $f_0(1500)$, $f_J(1710)$ avec J $=0$ ou J $=2$, $\xi(2230)$ et $\eta(1440)$. Ils calculent le taux de production des mésons conventionnels ($q\bar{q}$) et des glueballs (G) lors de la désintégration radiative du quarkonium vecteur, en fonction de leur masse, de leur moment angulaire et de leur largeur. Leurs conclusions pour les deux résonances qui nous intéressent sont les suivantes :

- Le $f_0(1500)$ est produit à un taux trop important pour être un état $q\bar{q}$. Les données diponibles suggèrent qu'il s'agit d'un mélange glueball-$q\bar{q}$.
- Le $f_J(1710)$ est produit à un taux qui est consistant avec une nature $q\bar{q}$ seulement si J $=2$. Si J $=0$, son taux de production est trop grand pour être un pur $q\bar{q}$ mais est cohérent avec celui d'un glueball ou d'un mélange $q\bar{q}$-glueball comportant une large composante de glu.

Par ailleurs, un formalisme simplifié est appliqué à l'étude d'un éventuel couplage entre les trois états isosingulet gg, $s\bar{s}$, $n\bar{n}$ pour former les trois particules f_0 dans la région 1.4-1.7

GeV.

Dans la référence [21], une étude exhaustive de toutes les excitations radiales et orbitales des sytèmes $n\bar{n}$ avec $I = 0$ et $I = 1$ est réalisée jusque 2.1 GeV. Les auteurs identifient les modes de désintégration caractéristiques des quarkonia dans le but de distinguer ces derniers des glueballs, dont les états de base sont principalement de pure glu, et des particules hybrides, constituées d'états de base dans lesquels une structure $q\bar{q}$ est combinée avec une excitation gluonique. Cette démarche est guidée par les études théoriques de spectroscopie des hadrons légers qui convergent vers l'idée maintenant admise que des excitations gluoniques sont présentes dans le spectre des hadrons, et l'on devrait donc observer davantage de résonances que celles prédites par le modèle en quarks $q\bar{q}$ et qqq. Une difficulté importante rencontrée lors de l'identification de ces glueballs et hybrides se situe dans l'observation pour ces particules de nombres quantiques à la fois exotiques (interdits aux structures $q\bar{q}$) et non exotiques. Par exemple, dans le modèle de tubes de flux, le plus bas multiplet hybride contient les non exotiques $J^{PC} = 0^{-+}$, $1^{\pm\pm}$, 1^{+-} et 2^{-+} en même temps que les exotiques $J^{PC} = 0^{+-}$, 1^{-+} et 2^{+-} [22]. Afin d'identifier les états avec nombres quantiques non exotiques, il faut les distinguer du "background" des excitations $q\bar{q}$ radiales et orbitales dans la région 1.5 - 2.5 GeV, région dans laquelle sont attendus les premiers niveaux gluoniques [16, 121]. Les auteurs calculent les modes de désintégration à deux corps de toutes les excitations radiales et orbitales des états $n\bar{n}$ jusque 2.1 GeV, ce qui correspond à un total de 32 résonances, incluant les multiplets $2S$, $3S$, $2P$, $1D$ et $1F$. Dans le secteur du glueball scalaire, ils concluent que les désintégrations du $f_0(1500)$ et du $f_J(1710)$ sont inconsistantes avec des quarkonia excités radialement, et que ces deux résonances scalaires sont des candidats glueballs plausibles, avec des masses et largeurs données dans [103] de respectivement $m = 1503 \pm 11$ MeV, $\Gamma = 120 \pm 19$ MeV et $m = 1697 \pm 4$ MeV, $\Gamma = 175 \pm 9$ MeV.

C.M. Shakin et ses collaborateurs, dont nous adoptons le modèle de confinement dans la deuxième partie de ce travail (chapitre 3), se sont également intéressés au couplage quarkonium-glueball dans le secteur scalaire isoscalaire. Dans [48], ils ont calculé les fonctions d'onde des états $f_0(980)$, $f_0(1370)$, $f_0(1500)$ et $f_0(1770)$ et ont observé que la plus grande composante gluonique était portée par le $f_0(1770)$. Ils complètent leur analyse dans [48], en décrivant le couplage du glueball avec la résonance $f_0(400-1200)$. Cette étude a été motivée par le travail de S. Narison [96], qui a utilisé les règles de somme de QCD pour étudier la distribution gluonique parmi les mésons scalaires, pseudo-scalaires et tenseurs.

Dans le cadre plus précis du modèle NJL rendu invariant d'échelle [110], M. Jaminon et B. Van den Bossche ont étudié le contenu gluonique du nonet scalaire [84]. Ce modèle attribue une composante gluonique aux mésons scalaires isoscalaires, ainsi qu'un contenu en quarks au glueball, ce dernier étant identifié soit au $f_0(1500)$, soit au $f_J(1710)$. Ils ont calculé les masses dans le vide des neuf mésons scalaires ainsi que la masse du glueball et montré qu'un choix judicieux du condensat de gluons χ_s permettait de reproduire les masses expérimentales, à l'exception du $K_0^*(1430)$. Ce choix correspond à un couplage faible, donnant un caractère presque de pure glu au glueball. Dans [85], les mêmes auteurs calculent les largeurs de désintégration en deux photons du $f_0(1500)$ associé au glueball et des deux mésons scalaires isoscalaires, $f_0(1370)$ et $f_{J=0}(1710)$. La force du couplage entre ces trois champs hybrides est fixée par la valeur du condensat de gluons dans le vide χ_s, le couplage se réduisant lorsque χ_s augmente. Sans couplage, la désintégration $f_0(1500) \to \gamma\gamma$ serait impossible car les gluons ne se couplent pas aux photons.

1.2.2 Compléments sur les glueballs

Les états liés de gluons, ou glueballs, ont été de longue date introduits dans les modèles de Lagrangiens effectifs afin d'accorder les résultats de ces théories avec la phénoménologie observée. Les travaux de J. Schechter et de ses collaborateurs dans la première moitié des années 1980 sont particulièrement intéressants et permettent de suivre la construction progressive de modèles qui rendent compte notamment des différentes anomalies de QCD. Dans [111], un Lagrangien chiral effectif vérifiant la loi de conservation de l'anomalie axiale du courant baryonique est construit. Ce modèle peut être réécrit en terme d'un champ de gluon invariant de jauge, noté G. La philosophie de tels modèles est de développer un Lagrangien effectif à basse énergie en terme de champs de particules observables, étant donné que les variables dynamiques fondamentales de QCD, les quarks et les gluons, ne sont pas observables. Toutefois, un problème récurrent, désigné fréquemment sous le nom de "problème U(1)" survenait avec ces Lagrangiens chiraux, à savoir que les identités de Ward anomales n'étaient pas satisfaites. Dans un article publié à la même époque, Witten [129] suggérait que l'approximation en $1/N_c$ ouvrait la possibilité de traiter les processus forts à l'aide de l'approximation en arbre, utilisée pour les Lagrangiens chiraux, et que le problème U(1) devrait être résolu à ce niveau, en introduisant un glueball pseudo-scalaire. Il avançait par ailleurs que des champs de gluons de certains types, baptisés glueballs, devaient apparaître dans les théories de Lagrangiens effectifs. Dans ce même cadre en $1/N_c$, Veneziano [127] est parvenu à résoudre les identités de Ward anomales en recourant à un champ de "ghost" glueball. L'article [111] expose la construction d'un Lagrangien effectif complet de QCD à basse énergie, qui peut être considéré comme un cas particulier du Lagrangien du modèle σ généralisé, que le même auteur traite en détail dans [117]. Ce modèle effectif peut donc incorporer facilement la brisure de la symétrie chirale tout en restant cohérent avec les résultats de QCD sur les identités de Ward anomales. Ces identités, dérivées de la loi de conservation anomale du courant baryonique axial-vecteur J^5_μ qui s'écrit $\partial_\mu J^5_\mu = \partial_\mu K_\mu$ avec K_μ désignant une combinaison de champs de gluons, sont vérifiées en introduisant au niveau du Lagrangien des degrés de liberté gluoniques. Le Lagrangien du modèle σ est ainsi modifié par l'introduction d'un champ de glueball pseudo-vecteur K_μ de telle sorte que la loi de conservation anomale soit vérifiée en vertu des équations de mouvement de Lagrange. Les identités de Ward seront ainsi vérifiées à l'ordre du diagramme en arbre. En d'autres termes, le principe directeur est que la loi de conservation anomale pour le courant U(1)

$$\partial_\mu J^5_\mu = \frac{g^2}{16\pi^2}\sqrt{n_f}F\tilde{F} \equiv \partial_\mu K_\mu \equiv H,$$

sorte automatiquement des équations de Lagrange à partir du Lagrangien avec glueball pseudo-scalaire H. Dans cette équation, F désigne le tenseur de champ de force de QCD, et $\tilde{F}$ son champ dual. Le nombre de saveurs est noté n_f. Sur base de ce Lagrangien, les auteurs étudient notamment le couplage des mésons η, η' et du glueball H dans le secteur pseudo-scalaire, et montrent par ailleurs que leur approche est complémentaire avec l'approche par instantons en démontrant comment peut émerger de la théorie un terme d'interaction du type de 't Hooft [76].

Une généralisation de ce modèle est fournie dans [118], où cette fois J. Schechter propose un Lagrangien qui en plus de l'anomalie chirale vérifie automatiquement l'équation de l'anomalie de trace, tout en préservant l'invariance $SU(n_f) \times SU(n_f) \times$ (nombre baryonique). Il remplit ces conditions via l'introduction d'un champ de gluons singulet de couleur scalaire de spin nul 0^+. Ce champ de glueball scalaire peut soit être éliminé du modèle grâce à une équation de contrainte, comme c'est le cas pour le glueball pseudo-scalaire H, soit peut être associé à une particule physique 0^+. Les rares résultats expérimentaux disponibles en 1980 ne permettaient pas de trancher cette question, mais actuellement, on sait que la deuxième voie est sans doute la bonne (voir la section 1.2.1). Dans un article suivant [112], les auteurs s'interrogent sur la possibilité que la résonance $G(1440)$ observée dans la désintégration $J/\psi \to \gamma H$ soit un glueball pseudo-scalaire, et présentent un schéma dans lequel les mésons pseudo-scalaires sont couplés via un mélange de champs de quark et de champs de glu. Dans le même temps [114], ils examinent les propriétés du glueball scalaire dans le cadre du modèle de Lagrangien effectif développé dans [118], qui satisfait à la fois les anomalies axiale-vecteur et de trace et inclut un glueball 0^{++} noté G, et un glueball 0^{-+} noté H. Ces champs sont normalisés de telle sorte que :

$$\begin{aligned} H &= \partial_\mu J^5_\mu, \\ G &= \theta_{\mu\mu}, \end{aligned}$$

où J^5_μ est le courant axial-vecteur $U(1)$, et $\theta_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion. Contrairement au champ H, dont l'équation de mouvement conduit à son élimination en terme de η', le champ scalaire G peut être conservé car il n'est pas nécessaire de l'éliminer pour donner une masse au singulet scalaire $SU(3)$. Dans [113], les résonances $\eta'(960)$ et $\iota(1440)$ sont traitées comme des glueballs afin d'observer leurs largeurs et la brisure de la symétrie de saveur $SU(3)$. Enfin, l'article [69] se concentre sur le système composé des bosons de Goldstone et du gluonium.

Bien que dans la suite nous n'introduirons pas de glueball pseudo-scalaire dans notre formalisme, et considérerons les champs pseudo-scalaires isoscalaires comme des purs états de quarks couplés via le paramètre de l'anomalie axiale ξ (voir le Lagrangien (2.4) du chapitre 2), nous donnons ici une liste chronologique de références qui étudient les implications possibles d'un tel état glueball pseudo-scalaire.

Dans [102], un bref commentaire est fait sur le Lagrangien proposé par Schechter et ses collaborateurs dans [111], et débouche sur la conclusion que le couplage pseudo-scalaire proposé antérieurement par l'auteur nécessite un champ "ghost" pseudo-scalaire. L'article [120] expose deux règles de somme pour les amplitudes de désintégration en deux photons des mésons pseudo-scalaires incluant un glueball. Le $\iota(1440)$ observé dans la désintégration radiative du J/ψ est identifié au glueball pseudo-scalaire. La masse et le couplage au η' du glueball pseudo-scalaire, également identifié au $\iota(1440)$, sont étudiés dans [126], ainsi que sa désintégration en deux photons. Dans [66], une extension d'un modèle couplant η, η' et η_c [64] est réalisée afin de permettre le mélange des états $|u\bar{u}+d\bar{d}>/\sqrt{2}$, $|s\bar{s}>$ et $|c\bar{c}>$ avec un état glueball pseudo-scalaire $|GG>$, conduisant aux états physiques η, η', ι et η_c. Les largeurs calculées sont en bon accord avec les données expérimentales et le modèle suggère que ι est essentiellement un pur glueball. Dans la deuxième moitié des années 1980, G.J. Gounaris et J.E. Paschalis ont publié une série d'articles exclusivement consacrés à l'étude du glueball pseudo-scalaire. Dans le premier de ceux-ci [70], ils calculent la largeur de désintégration du plus bas glueball pseudo-scalaire en supposant que cet état glueball est si étroit qu'un traitement perturbatif est applicable. Ils décrivent cet état à l'aide des fonctions d'onde de Bethe-Salpeter, et obtiennent des résultats compatibles avec les données expérimentales sur le $\iota(1440)$. L'article [71] est dédié au calcul du taux de production des glueballs pseudo-scalaires lors des désintégrations radiatives du J/ψ. Les états η, η' et $\iota(1460)$ sont considérés comme des mélanges du glueball 0^{-+} et des quarkonia pseudo-scalaires $(u\bar{u}+d\bar{d})/\sqrt{2}$ et $s\bar{s}$. D'autres signatures du glueball pseudo-scalaire sont analysées dans [72], comme ses modes de désintégrations vers $\gamma\gamma$ et $\rho\gamma$, et son identification avec le $\iota(1460)$ est avancée. Enfin, dans [73], les données expérimentales de MARK III indiquant l'existence d'un état 0^{-+} $K\bar{K}\pi$ à 1.49 GeV sont comparées avec les conséquences théoriques de la nature de glueball pseudo-scalaire de cet état, et les résultats sont concordants.

Gregory Gabadadze [65] montre que la masse du glueball pseudo-scalaire de QCD est plus faible que celle du glueball de la théorie de Yang-Mills étudié avec des calculs sur réseau dans l'approximation "quenched". Ces calculs sur réseau fournissent la hiérarchie suivante des masses des glueballs : le plus léger est le glueball 0^{++} avec une masse entre 1.5 GeV et 1.7 GeV, l'état 2^{++} est le suivant avec une masse de 2.0 GeV - 2.2 GeV, et le glueball pseudo-scalaire 0^{-+} est le plus lourd avec une masse calculée sur réseau de 2.3 ± 0.2 GeV [16]. Dans [116], les auteurs montrent qu'une étude par instantons conduit à une force attractive forte dans le canal $J^{PC} = 0^{++}$, avec pour conséquence une taille plus petite pour le glueball scalaire, tandis que dans le canal pseudo-scalaire 0^{-+}, la force correspondante est répulsive. Le plus léger glueball est identifié au glueball scalaire.

J.-M. Frère, associé à divers collaborateurs, s'est également penché sur les couplages au sein du système η, η'. Dans [3], les effets du mélange η, η' ainsi que ceux de l'anomalie de gluon sont étudiés dans les désintégrations $\eta \to 3\pi^0$, $\eta' \to 3\pi^0$, $J/\psi \to \eta\gamma$ et $J/\psi \to \eta'\gamma$. Cette étude est poursuivie dans [18], avec une discussion des effets des anomalies de courant axial sur divers processus de désintégration. Le point central est toujours le système η, η', et un commentaire est fait sur l'approche développée dans [122], dans laquelle est proposée une modélisation élégante de la connexion avec la glu du système pseudo-scalaire, connexion dont l'amplitude peut nous renseigner sur différents candidats glueballs, tel le $f_0(1500)$ de CBC [6], qui apparaît se désintégrer plus fréquemment vers $\eta\eta'$ que vers $\eta\eta$.

Par ailleurs, M.L. Nekrasov consacre trois articles plus récents à l'étude du couplage des états de quarks et de glu dans le secteur pseudo-scalaire. Dans [99], le système composé des mésons η et η' est investigué à l'aide de la méthode des opérateurs composites, sous l'hypothèse d'une nature en quarks de ces mésons, et de nouvelles solutions des identités de Ward sont obtenues. Il aborde également la possibilité d'un mélange de ce système avec l'état gluonium, qui pourrait être non orthogonal aux états de quarks. Cette situation peut être reliée au fait que dans une théorie de jauge les gluons ne peuvent pas être complètement séparés des quarks en vertu de l'invariance de jauge. Le glueball pseudo-scalaire est décrit dans [100] en prenant en compte le mélange quark-gluon et en respectant les invariances de jauge locale et de renormalisation de QCD. Les largeurs de désintégration radiative partielles et le taux de production du glueball pseudo-scalaire dans les désintégrations radiatives du J/ψ sont calculés, et la consistance des résultats avec les données sur les désintégrations $J/\psi \to PV$ est vérifiée (P et V désignant respectivement des mésons pseudo-scalaires et vecteurs). Le système des mésons pseudo-scalaires est décrit à partir d'une base d'opérateurs composites invariants de jauge bilinéaires dans les champs de quarks et de gluons. Ces opérateurs au nombre de cinq sont respectivement les divergences des courants de quarks axiaux, les densités pseudo-scalaires de quarks et l'anomalie axiale gluonique, dont les expressions sont respectivement :

$$\begin{aligned} \partial^\mu J^{8,0}_{\mu 5} &= \partial^\mu \bar{q}\gamma_\mu\gamma_5 \frac{\lambda^{8,0}}{2} q, \\ J^{8,0}_5 &= i\bar{q}\gamma_5 \frac{\lambda^{8,0}}{2} q, \\ \mathcal{A} &= \frac{\alpha_s}{8\pi}\sqrt{3/2}\,\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} G^{\mu\nu} G^{\lambda\rho}. \end{aligned}$$

Ces opérateurs sont reliés par les deux identités de Ward axiales, qui s'écrivent :

$$\partial^\mu J^8_{\mu 5} = \frac{2}{3}\left(\hat{m} + 2m_s\right) J^8_5 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\hat{m} - m_s\right) J^0_5, \tag{1.20}$$

$$\partial^\mu J^0_{\mu 5} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\hat{m} - m_s\right) J^8_5 + \frac{2}{3}\left(2\hat{m} + m_s\right) J^0_5 + \mathcal{A}, \tag{1.21}$$

avec $\hat{m} = (m_u + m_d)/2$. Il reste alors trois opérateurs indépendants. L'auteur suppose que ces opérateurs forment une base complète dans le canal isosingulet et génèrent trois mésons observables, notés η, η' et η'', ce dernier étant identifié avec le plus bas état glueball pseudo-scalaire, qui se couple avec les états de quarks non excités. La dernière publication de l'auteur dédiée à l'intégration d'un gluonium parmi les états singulets pseudo-scalaires [101] propose une généralisation du Lagrangien chiral effectif développé en [100]. En effet, dans QCD exacte, le couplage quark-gluon peut dépendre de l'échelle de renormalisation ultraviolette [63], phénomène ignoré dans la pratique, mais pouvant conduire à des effets désastreux. Par exemple, dans [122], il est montré que la généralisation brute de la formule PCAC (Partial Conservation of Axial vector Current) aux désintégrations $\pi \to \gamma\gamma$ et $\eta' \to \gamma\gamma$ est inconsistante avec le groupe de renormalisation (RG) et donc incorrecte en principe. Dans [100], cette condition était remplie grâce à l'utilisation d'opérateurs composites invariants selon RG qui généraient chaque état séparément, mais ce modèle s'est révélé mal posé pour la description des désintégrations hadroniques du η' et du glueball pseudo-scalaire. L'auteur aborde donc dans [101] le problème d'une façon plus sophistiquée, en cherchant des conditions supplémentaires sur les contributions des états singulets.

Une publication récente [17] donne un état des lieux des calculs sur réseau appliqués aux propriétés des hadrons à composante gluonique, et commente les perpectives de cette démarche. Dans les simulations sur réseau de la 'quenched approximation' de QCD, un large spectre de glueballs a été mis à jour (voir par exemple [16]). Le glueball scalaire apparaît comme le plus léger, avec une masse entre 1.4 GeV et 1.8 GeV, suivi par le glueball tenseur de masse comprise entre 1.9 GeV et 2.3 GeV, et ensuite par le pseudo-scalaire se situant environ 150 MeV plus haut. Les résonances $f_0(980)$, $a_0(980)$ et $f_0(400-1200)$ sont fréquemment considérées comme des résonances $K\bar{K}$ et $\pi\pi$, point de vue qui influence fortement l'interprétation des $f_0(1370)$, $f_0(1500)$ et $f_0(1710)$ comme des mélanges entre un glueball scalaire et les deux mésons isoscalaires. Dans plusieurs références, dont [58], le $f_0(1500)$ reçoit la contribution gluonique dominante, dans d'autres, c'est le $f_0(1710)$ [90]. On retrouve cette identification du glueball au $f_0(1710)$ dans [89], où le $f_0(1500)$ est considéré comme principalement composé de quarkonium scalaire $s\bar{s}$. Cette interprétation n'est pas sans soulever certains problèmes, comme le fait que le $f_0(1500)$ ne semble pas se désintégrer principalement vers des états contenant un s et un $\bar{s}$.

Chapitre 2

Extension du modèle NJL à trois saveurs vérifiant l'anomalie de trace de QCD

2.1 Forme de l'action effective

Voici un bref rappel du modèle, qui constituera la base de tous les développements analytiques et servira de support à l'implémentation du confinement dans la deuxième partie de ce travail.

Comme indiqué dans l'introduction, le modèle que nous exploitons est une version modifiée du modèle NJL qui a été construite [110] de manière à implémenter l'anomalie axiale et l'anomalie de trace de QCD. Sans reprendre tous les développements exposés dans [83], nous considérons l'expression suivante de l'action euclidienne effective issue du processus de bosonisation (voir plus loin), à potentiels chimiques nuls :

$$I_{eff}(\varphi,\chi) = -\mathrm{Tr}\ln(-i\partial_\mu\gamma_\mu + m^0 + \Gamma^a\varphi^a) + \int d^4x \, \frac{1}{4G_s} \, \varphi^a\varphi^a, \tag{2.1}$$

avec les champs de mésons $\varphi^a = (\sigma^a, \pi^a)$ et $\Gamma^a = (\lambda^a/\sqrt{2}, i\gamma_5\lambda^a/\sqrt{2})$, $a = 0, ..., 8$. Les matrices λ^a sont les matrices de Gell-Mann données dans l'annexe A.3, avec $\lambda^0 = \sqrt{2/3}\mathbb{1}$. La grandeur G_s représente la force d'interaction ponctuelle à quatre quarks. Nous travaillons dans la limite de symétrie d'isospin ($m_u = m_d$), et m^0 représente la matrice diagonale des masses courantes des quarks :

$$m^0 = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_u & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

L'anomalie axiale de QCD, brisant au niveau quantique la symétrie $U(1)_A$, est introduite via un terme de masse pour le champ pseudo-scalaire isoscalaire π_0. Pour rappel, on montre, par exemple dans [93], que la divergence du courant axial $U(1)_A$ est donnée par

$$\partial^\mu \left(\bar{q}\gamma_\mu\gamma_5 \frac{\lambda^0}{2} q \right) = 2i\bar{q}\gamma_5 m^0 \frac{\lambda^0}{2} q + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{g^2}{32\pi^2} F^a_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}_a, \tag{2.3}$$

avec $\tilde{F}^{\mu\nu}_a = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F^a_{\alpha\beta}$ désignant le tenseur dual défini grâce au tenseur totalement antisymétrique $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ (annexe A.23). Le premier terme de (2.3) vient de la brisure explicite de la symétrie par les termes de masse, tandis que le second, représentant l'anomalie, provient d'un calcul quantique. On retrouve dans la littérature différentes manières d'implémenter l'anomalie, dont celle proposée par 't Hooft [76], qui utilise un déterminant modélisant une interaction à six quarks. Nous introduisons ici un paramètre phénoménologique par l'intermédiaire d'un terme de masse pour le champ π_0, terme empêchant le méson η' d'être un boson de Goldstone. Ce terme de masse s'écrit

$$\mathcal{L}_{U_A(1)} = \frac{1}{4G_s}\, \xi \pi_0^2. \tag{2.4}$$

On a alors l'action effective suivante :

$$I_{eff}(\varphi, \chi) = -\mathrm{Tr}\ln(-i\partial_\mu\gamma_\mu + m^0 + \Gamma^a\varphi^a) + \int d^4x\, \frac{1}{4G_s}\, \varphi^a\varphi^a + \int d^4x\, \mathcal{L}_{U_A(1)}. \tag{2.5}$$

Cependant, cette manière de modéliser l'anomalie axiale forte présente certaines limites. On observe que la symétrie chirale $SU(3)_A$ n'est maintenue que dans l'approximation de champ moyen au niveau des équations du gap (voir plus bas), en supposant un vide invariant par parité, alors que cette invariance du vide par parité est une conséquence des équations du gap si on néglige l'anomalie axiale.

L'étape suivante consiste à rendre l'action (2.5) invariante sous des transformations d'échelle. En effet, alors que l'action de QCD est invariante d'échelle lorsque toutes les masses sont nulles car elle ne contient alors aucun paramètre dimensionné, ici les deux derniers termes de (2.5) brisent cette invariance. Nous restaurons l'invariance d'échelle en introduisant un champ scalaire χ de dimension d'échelle 1 et dont la valeur moyenne est étroitement liée au condensat de gluons dans le vide. Ce champ est appelé champ de dilaton scalaire. Nous renvoyons pour plus de détails aux multiples références publiées, dont [83, 110] constituent les plus exhaustives. Par ailleurs, afin de régulariser la boucle de quarks du terme en Tr ln, régularisation rendue nécessaire par la non-renormalisabilité du modèle, il faut introduire un cut-off $\Lambda\chi$, le champ de dilaton χ garantissant l'invariance d'échelle de la trace. Le terme de masse dans la trace par contre n'est pas modifié car sa dimension d'échelle est la même dans NJL que dans QCD.

Enfin, nous introduisons l'anomalie d'échelle, dont la modélisation a été proposée dans [77] via l'introduction du Lagrangien

$$\mathcal{L}_\chi = \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 + \frac{1}{16} b^2 \left[\chi^4 \ln \frac{\chi^4}{\chi_G^4} - (\chi^4 - \chi_G^4) \right], \tag{2.6}$$

introduisant deux paramètres additionnels b^2 et χ_G par rapport au modèle NJL usuel. Notre action euclidienne bosonisée s'écrit finalement :

$$\begin{aligned} I_{eff}(\varphi,\chi) &= -\mathrm{Tr}_{\Lambda\chi}\ln(-i\partial_\mu\gamma_\mu + m^0 + \Gamma^a\varphi^a) \\ &\quad + \int d^4x\ \frac{\chi^2}{4G_s}\ \varphi^a\varphi^a + \int d^4x\ \mathcal{L}_\chi + \int d^4x\ \frac{\chi^2}{4G_s}\ \xi\pi_0^2. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Notre modèle contient alors sept paramètres : les masses courantes des quarks (m_u, m_s), les forces (G_s, b^2), le paramètre gluonique χ_G, le cut-off Λ et le paramètre d'anomalie axiale ξ. Dans [83], les auteurs montrent comment cinq de ces paramètres sont ajustés afin de reproduire la masse du pion (m_π), la constante de désintégration du pion (f_π), les masses du kaon et du méson η', et celle du glueball $f_0(1500)$. De plus, en exploitant les équations du gap [83], la constante de couplage G_s peut être reliée à la masse constituante du quark up M_u, cette dernière étant choisie de manière à reproduire la masse du scalaire isovecteur, identifié au $a_0(1450)$ ou au $a_0(980)$, ce qui induit respectivement $M_u = 725$ MeV ou $M_u = 490$ MeV. Notons que l'adoption de cette dernière masse constituante ne permet pas dans le cadre de ce modèle non confinant d'étudier les désintégrations du $f_0(1500)$, qui se situe bien trop au-delà du seuil de désintégration non physique $q\bar{q}$. In fine, nous restons alors avec un paramètre libre, χ_s, partie stationnaire du champ de dilaton. Lors du calcul dans le secteur scalaire des masses des mésons, des contantes de couplage et des largeurs, nous ferons varier ce paramètre dans un intervalle compris entre 0.35 GeV et 1.25 GeV. La borne inférieure de l'intervalle est la valeur de χ_s pour laquelle le nonet scalaire est le mieux reproduit dans [84]. La borne supérieure quant à elle est choisie de telle façon que le modèle corresponde presque à un pur NJL, avec découplage quasi complet du glueball est des quarkonia isoscalaires.

Signalons à titre indicatif l'expression de l'action effective dérivée en métrique euclidienne dans [83]. Les notations sont légèrement différentes et l'action s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} I_{eff}(\varphi,\chi) &= -\mathrm{Tr}_{\Lambda\chi}\ln(-i\partial_\mu\gamma_\mu + m^0 + \Gamma'^a\varphi^a) \\ &\quad + \int d^4x\ \frac{a^2}{2}\ \varphi^a\varphi^a + \int d^4x\ \mathcal{L}_\chi + \int d^4x\ \frac{a^2}{2}\ \xi\chi^2\pi_0^2, \end{aligned} \tag{2.8}$$

avec $\Gamma'^a = (\lambda^a, i\gamma_5\lambda^a)$ et $a^2 = 1/G_s$. Evidemment, les développements basés sur cette expression de l'action conduisent aux mêmes résultats.

Le passage en métrique euclidienne est utile, entre autres, pour étudier les effets de la température. Les fonctionnelles génératrices sont alors des fonctions de partition décrivant la thermodynamique des systèmes étudiés. Dans la suite, nous n'étudierons pas ces effets de la température, que nous considérerons toujours nulle. Nous exploiterons alors souvent des développements de l'action effective en métrique de Minkowski, notamment lorsque nous introduirons le confinement qui impose de travailler dans un espace des impulsions à trois dimensions, après intégration sur la première variable.

Sans reprendre tous les développements clairement exposés dans le chapitre 3 de la thèse [83] et dédiés à l'établissement de l'action euclidienne, l'expression de l'action effective dans la métrique de Minkowski s'obtient en travaillant sur l'expression de la fonctionnelle génératrice, donnée par

$$\mathcal{Z}_{NJL} = \int \mathcal{D}q\mathcal{D}\bar{q} \exp\left(i\int d^4x \; \mathcal{L}_{NJL}\right), \tag{2.9}$$

avec $\mathcal{L}_{NJL}$ exprimé en (1.12). Nous introduisons à la façon de [107] la matrice unité dans (2.9) via les champs auxiliaires ϕ^a et φ^a, qui interviendront plus tard dans l'étape de bosonisation,

$$\begin{aligned} \mathbb{1} &= \int \mathcal{D}\phi^a \delta\left(\phi^a - \bar{q}\Gamma^a q\right) \\ &= \int \mathcal{D}\phi^a \mathcal{D}\varphi^a \exp\left(i\int d^4x \; \varphi^a \left(\phi^a - \bar{q}\Gamma^a q\right)\right), \end{aligned}$$

où $\phi^a = (\sigma^a, \pi^a)$ et $\Gamma^a = (\lambda^a/\sqrt{2}, i\gamma_5\lambda^a/\sqrt{2})$, $a = 0, \ldots, 8$. La première composante des champs est relative aux scalaires, la seconde aux pseudo-scalaires. En multipliant (2.9) par cette expression de la matrice unité, nous obtenons

$$\mathcal{Z}_{NJL} = \int \mathcal{D}q\mathcal{D}\bar{q}\mathcal{D}\phi^a\mathcal{D}\varphi^a \exp\left(i\int d^4x \left[\bar{q}\left(i\partial\!\!\!/ - m^0\right)q + G_s(\phi^a)^2 + \varphi^a\phi^a - \varphi^a\bar{q}\Gamma^a q\right]\right). \tag{2.10}$$

En pratiquant le changement de variable

$$\phi'^a = \phi^a + \frac{1}{2G_s}\varphi^a,$$

nous nous ramenons à une intégration gaussienne sur les champs ϕ'^a, qui constitue un facteur constant devant la fonctionnelle génératrice, facteur que nous pouvons omettre. Nous avons ainsi la fonctionnelle génératrice suivante :

$$\mathcal{Z}_{NJL} = \int \mathcal{D}q\mathcal{D}\bar{q}\mathcal{D}\varphi^a \exp\left(i\int d^4x \left[\bar{q}\left(i\partial\!\!\!/ - m^0 - \varphi^a\Gamma^a\right)q - \frac{1}{4G_s}(\varphi^a)^2\right]\right). \tag{2.11}$$

L'intégration gaussienne sur les champs de quarks permet d'obtenir l'action bosonisée ne contenant plus que des degrés de liberté mésoniques, à partir d'un Lagrangien initial (1.12) ne contenant que des champs de quarks.
Nous adoptons les notations suivantes pour les traces :

$$\mathrm{Tr}A = \mathrm{tr}\int d^4x < x|A|x > = \mathrm{tr}_c\mathrm{tr}_\gamma\mathrm{tr}_\lambda \int d^4x < x|A|x >, \tag{2.12}$$

avec c, γ et λ indices de couleur, saveur et de Dirac respectivement. En considérant que

$$\int \mathcal{D}q\mathcal{D}\bar{q} \; \exp\left(i\bar{q}Aq\right) = \det A, \tag{2.13}$$

nous arrivons à l'expression de la fonctionnelle génératrice

$$\mathcal{Z}_{NJL} = \int \mathcal{D}\varphi^a \exp\left(\mathrm{Tr}\ln\left(i\partial\!\!\!/ - m^0 - \varphi^a\Gamma^a\right) - i\int d^4x \; \frac{1}{4G_s}(\varphi^a)^2\right), \tag{2.14}$$

où nous avons utilisé

$$\det A = \exp(\mathrm{Tr} \ln A). \tag{2.15}$$

Formellement, la relation (2.15) se démontre comme suit, avec λ_i désignant les valeurs propres de A,

$$\begin{aligned} \det A = \prod_i \lambda_i &= \exp \ \ln \left(\prod_i \lambda_i \right) \\ &= \exp \sum_i \ln \lambda_i = \exp \mathrm{Tr} \ln A. \end{aligned}$$

L'expression (2.14) peut encore s'écrire sous la forme

$$\mathcal{Z}_{NJL} = \int \mathcal{D}\varphi^a \exp \ i \left(-i \mathrm{Tr} \ln \left(i\partial\!\!\!/ - m^0 - \varphi^a \Gamma^a \right) - \int d^4x \ \frac{1}{4G_s} (\varphi^a)^2 \right). \tag{2.16}$$

En vertu de (2.9), nous écrivons alors l'expression de l'action effective :

$$I_{eff} = -i \mathrm{Tr} \ln (i\partial\!\!\!/ - m^0 - \Gamma^a \varphi^a) - \int d^4x \ \frac{1}{4G_s} (\varphi_a)^2. \tag{2.17}$$

Nous nous sommes ici limités à bosoniser le système, c'est-à-dire à n'introduire que des champs associés aux mésons. L'interaction du modèle NJL étant locale, ces champs mésoniques seront locaux, ce qui simplifie fortement le formalisme. Nous verrons dans le chapitre 3 que l'introduction du confinement par l'intermédiaire d'une interaction non locale va nous obliger à manipuler des champs bilocaux.

2.2 Equations du gap

Nous donnons dans cette section les expressions des équations du gap, auxquelles nous ferons souvent référence par la suite. Ces équations, aussi appelées équations de Schwinger-Dyson, sont obtenues en recherchant les points stationnaires (σ_a^s, χ_s) de l'action (2.7). Ceux-ci annulent le premier ordre de l'action par rapport aux fluctuations des champs mésoniques. Les calculs des différents ordres de l'action sont en effet réalisés en décomposant tous les champs en une partie stationnaire et une partie fluctuante, selon le schéma suivant :

$$\sigma_a = \sigma_a^s + \tilde{\sigma}_a, \tag{2.18}$$

$$\pi_a = \tilde{\pi}_a, \tag{2.19}$$

$$\chi = \tilde{\chi}_s + \tilde{\chi}. \tag{2.20}$$

Notons que la partie stationnaire des champs mésoniques pseudo-scalaires est nulle car nous considérons un vide invariant par parité. Nous avons ainsi

$$\pi_a^s = 0. \tag{2.21}$$

Il faut donc développer, en notant I^1_{eff} le premier ordre de l'action par rapport aux fluctuations des champs,

$$\left.\frac{\partial I^1_{eff}}{\partial \tilde{\sigma}_a}\right|_{\sigma^s_a,\chi_s} = 0, \tag{2.22}$$

$$\left.\frac{\partial I^1_{eff}}{\partial \tilde{\chi}}\right|_{\sigma^s_a,\chi_s} = 0. \tag{2.23}$$

Les développements de (2.22) dans [83] (métrique euclidienne) fournissent les résultats suivants :

$$\sigma^s_a = 0 \ (a \neq 0, 8) \tag{2.24}$$

et

$$(M_u - m_u)\chi_s^2 = 8N_c M_u G_s \int_0^{\Lambda^2\chi_s^2} \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{k^2+M_u^2}, \tag{2.25}$$

$$(M_s - m_s)\chi_s^2 = 8N_c M_s G_s \int_0^{\Lambda^2\chi_s^2} \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{k^2+M_s^2}, \tag{2.26}$$

où nous avons posé, sous forme matricielle dans l'espace de saveurs,

$$M = m^0 + \Gamma^a \varphi^a_s, \tag{2.27}$$

c'est-à-dire, en décomposant et en tenant compte de (2.21) et (2.24),

$$M_u = m_u + \sqrt{\frac{1}{3}}\sigma^s_0 + \sqrt{\frac{1}{6}}\sigma^s_8, \tag{2.28}$$

$$M_s = m_s + \sqrt{\frac{1}{3}}\sigma^s_0 - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma^s_8. \tag{2.29}$$

Remarquons que les relations (2.21) et (2.24) permettent de considérer une matrice des masses constituantes M diagonale dans l'espace des saveurs :

$$M = \begin{pmatrix} M_u & 0 & 0 \\ 0 & M_u & 0 \\ 0 & 0 & M_s \end{pmatrix}. \tag{2.30}$$

Notons également que l'équation du gap en quark u (2.25) est identique à celle obtenue dans le cadre du modèle à deux saveurs.
L'intégrale apparaissant dans les membres de droite de (2.25) ou (2.26) présente une divergence ultraviolette, et doit être régularisée. Le calcul de cette intégrale est développé ci-dessous, avec régularisations en d^4k et d^3k.

En d^4k, nous avons

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{k^2+M_a^2} &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int_0^{(\Lambda\chi_s)^2} \pi^2\,\frac{k^2}{k^2+M_a^2}\,dk^2 \\
&= \frac{\pi^2}{(2\pi)^4}\left[(\Lambda\chi_s)^2 - M_a^2\left[\ln\left((\Lambda\chi_s)^2+M_a^2\right) - \ln M_a^2\right]\right] \\
&= \frac{1}{16\pi^2}\left[(\Lambda\chi_s)^2 - M_a^2\ln\frac{(\Lambda\chi_s)^2+M_a^2}{M_a^2}\right]. \qquad (2.31)
\end{aligned}$$

Avec une régularisation en d^3k, nous intégrons d'abord sur k^0 à l'aide du théorème des résidus, avec $E_a = \sqrt{k^2+M_a^2}$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{k^2+M_a^2} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{(k^0)^2+E_a^2} \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int\frac{dk^0}{(2\pi)}\,\frac{1}{(k^0+iE)(k^0-iE)} \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2\pi}\,2i\pi\,\frac{1}{2iE_a} \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\Lambda\chi_s} d|\vec{k}|\,\frac{|\vec{k}|^2}{E}, \qquad (2.32)
\end{aligned}$$

avec le passage aux coordonnées sphériques pour obtenir l'expression finale.

Les équations du gap (2.25, 2.26) rendent compte de la brisure dynamique de la symétrie chirale. En effet, quand la masse courante m du quark est nulle, il existe une valeur critique de G_s au-dessus de laquelle l'équation du gap a une solution non triviale avec $M \neq 0$. Il y correspond alors une valeur non nulle du condensat de quarks $< \bar{q}q >$. Pour de petites valeurs de m, la transition n'est plus abrupte mais le même comportement est observé qualitativement (voir par exemple [106]).
Notons ici que dans le cadre de notre modèle, il existe une contrainte entre les condensats de quarks et de gluons, contrainte exprimée sous la forme d'équations couplées pour les trois condensats $< \bar{u}u >$, $< \bar{s}s >$ et χ_s. Selon l'importance de cette contrainte, on assiste soit à un passage continu d'une phase hadronique à une phase de plasma quarks-gluons (transition de deuxième ordre), soit à un passage brusque d'une phase à l'autre (transition de premier ordre). Une transition de premier ordre en fonction de la température résulte d'un effet dû au condensat de gluons, et ne peut donc être présente dans les modèles NJL purs. Ces effets de la température et de la densité sont étudiés dans [83], et nous n'y reviendrons plus dans la suite.

2.3 Développement de l'action jusqu'au deuxième ordre dans les champs

Nous reprenons ici les développements de l'action effective jusqu'au deuxième ordre. Le premier ordre permet de déduire les équations du gap explicitées plus haut (équations de Schwinger-Dyson), tandis que le deuxième ordre fournit les équations de Bethe-Salpeter définissant les masse des différents mésons. Le troisième ordre sera développé lorsque nous passerons au calcul des largeurs de désintégration.
Nous considérons l'action euclidienne donnée en (2.7), dont nous reprenons l'expression ci-dessous :

$$\begin{aligned} I_{eff} &= -\mathrm{Tr}_{\Lambda\chi} \ln\left(-i\partial\!\!\!/ + m^0 + \Gamma^a\varphi^a\right) + \int d^4x \ \frac{\chi^2}{4G_s}\ (\varphi^a)^2 \\ &+ \int d^4x \ \frac{1}{4G_s}\ \xi\chi^2\pi_0^2 + \int d^4x \left\{\frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 + \frac{1}{16}b^2\left[\chi^4\ln\frac{\chi^4}{\chi_G^4} - (\chi^4-\chi_G^4)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Les développements jusqu'au deuxième ordre sont décrits dans [83], aussi ne les détaillons-nous pas ici. Néanmoins, nous n'utilisons pas l'artifice exploité dans ces références qui consistait à réécrire l'action en posant

$$\begin{aligned} -\mathrm{Tr}\ln\left(-i\partial\!\!\!/ + m^0 + \Gamma^a\varphi^a\right) &= -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln\left(-i\partial\!\!\!/ + m^0 + \Gamma^a\varphi^a\right)\left(i\partial\!\!\!/ + m^0 + (\Gamma^a)^\dagger\varphi^a\right) \\ &= -\mathrm{Tr}\ln\left(\partial\!\!\!/\partial\!\!\!/ + a_c^s\lambda_c + a_c^1\lambda_c + a_c^2\lambda_c\right), \end{aligned}$$

où a_c^s, a_c^1 et a_c^s sont les termes d'ordre 0, 1 et 2 pour la partie fluctuante des champs [83]. Cet artifice permettait de mettre en évidence une matrice diagonale dans l'espace de saveur, et unité dans les espaces de spin et de couleur, et donc facilement invertible :

$$\Delta = [\partial\!\!\!/\partial\!\!\!/ + a_c^s\lambda_c]^{-1} = \mathrm{diag}(a,a,b)_F \mathbb{1}_D \mathbb{1}_c,$$

avec dans l'espace des impulsions

$$\begin{aligned} a &= k^2 + M_u^2, \\ b &= k^2 + M_s^2. \end{aligned}$$

Nous conservons l'expression initiale de l'action euclidienne, et l'écrivons sous la forme suivante :

$$I_{eff} = -\mathrm{Tr}_{\Lambda\chi}\ln\left(G_0^{-1} + \Gamma^a\tilde{\varphi}^a\right) + \int d^4x \ \frac{\chi^2}{4G_s}\ (\varphi_a^2 + \xi\pi_0^2) + \int d^4x \ \mathcal{L}_\chi, \tag{2.34}$$

où $\mathcal{L}_\chi$ est donné par (2.6), et où nous utilisons les conventions

$$G_0^{-1} = (-i\partial\!\!\!/ + m^0 + \varphi_s^a\Gamma^a) = (-i\partial\!\!\!/ + M), \tag{2.35}$$

$$\varphi^a\Gamma^a = \sigma^a\lambda^a/\sqrt{2} + i\gamma_5\pi^a\lambda^a/\sqrt{2}. \tag{2.36}$$

En mettant G_0^{-1} en évidence dans l'intégrant du logarithme, nous avons

$$I_{eff} = -\mathrm{Tr}_{\Lambda\chi} \ln G_0^{-1} - \mathrm{Tr}_{\Lambda\chi} \ln (\mathbb{1} + G_0 \tilde{\varphi}^a \Gamma^a) + \int d^4x \, \frac{\chi^2}{4G_s} \, (\varphi_a^2 + \xi \pi_0^2) + \int d^4x \, \mathcal{L}_\chi, \quad (2.37)$$

et en exploitant la relation

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots, \quad (2.38)$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} I_{eff} \;&=\; -\mathrm{Tr}_{\Lambda\chi} \ln G_0^{-1} - \mathrm{Tr}_{\Lambda\chi} (G_0 \tilde{\varphi}^a \Gamma^a) + \frac{1}{2} \mathrm{Tr}_{\Lambda\chi} (G_0 \tilde{\varphi}^a \Gamma^a)^2 - \frac{1}{3} \mathrm{Tr}_{\Lambda\chi} (G_0 \tilde{\varphi}^a \Gamma^a)^3 + \ldots \\ &\quad + \int d^4x \, \frac{\chi^2}{4G_s} \, (\varphi_a^2 + \xi \pi_0^2) + \int d^4x \, \mathcal{L}_\chi. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Le premier ordre dans la partie fluctuante des champs s'écrit alors

$$\begin{aligned} I_{eff}^{(1)} \;&=\; -\mathrm{Tr}_{\Lambda\chi} (G_0 \tilde{\varphi}^a \Gamma^a) + \int d^4x \, \frac{\chi_s^2}{2G_s} \varphi_s^a \tilde{\varphi}^a + \int d^4x \, \frac{\chi_s}{2G_s} \tilde{\chi} (\varphi_s^a)^2 \\ &\quad - \left[\frac{\partial}{\partial\chi} \mathrm{Tr}_{\Lambda\chi} \ln(G_0^{-1}) \right]_{\chi_s} \tilde{\chi} + \left[\frac{\partial}{\partial\chi} \int d^4x \, \mathcal{L}_\chi \right]_{\chi_s} \tilde{\chi}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Quant au deuxième ordre, il s'écrit

$$\begin{aligned} I_{eff}^{(2)} \;&=\; \frac{1}{2} \mathrm{Tr}_{\Lambda\chi} (G_0 \tilde{\varphi}^a \Gamma^a)^2 + \int d^4x \, \frac{\chi_s^2}{4G_s} \, (\tilde{\varphi}_a^2 + \xi \tilde{\pi}_0^2) \\ &\quad + \int d^4x \, \frac{\chi_s}{G_s} \tilde{\chi} \varphi_s^a \tilde{\varphi}^a + \int d^4x \, \frac{\tilde{\chi}^2}{4G_s} \, (\varphi_s^a)^2 \\ &\quad - \left[\frac{\partial}{\partial\chi} \mathrm{Tr}_{\Lambda\chi} (G_0 \tilde{\varphi}^a \Gamma^a) \right]_{\chi_s} \tilde{\chi} - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial\chi^2} \mathrm{Tr}_{\Lambda\chi} \ln(G_0^{-1}) \right]_{\chi_s} \tilde{\chi}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial\chi^2} \int d^4x \, \mathcal{L}_\chi \right]_{\chi_s} \tilde{\chi}^2. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Cette expression du deuxième ordre de l'action nous permet de dériver les équations de masse pour les différents mésons scalaires et pseudo-scalaires, en identifiant les parties fluctuantes des champs qui nous intéressent. Nous obtenons à partir de (2.41) les mêmes expressions que celles qui sont exposées en détail dans l'appendice E de la thèse [83].

2.3.1 Secteur scalaire

Nous présentons un exemple de calcul détaillé dans le cas des mésons scalaires isoscalaires qui sont couplés avec le champ de dilaton au sein de la matrice des propagateurs inverses :

$$\begin{aligned} S^{-1}(q) &= \begin{pmatrix} \Gamma^{00} & \Gamma^{08} & \Gamma^{0\chi} \\ \Gamma^{80} & \Gamma^{88} & \Gamma^{8\chi} \\ \Gamma^{\chi 0} & \Gamma^{\chi 8} & \Gamma^{\chi\chi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}(2J_S^u + J_S^s) + \frac{\chi_s^2}{G_s} & \frac{\sqrt{2}}{3}(J_S^s - J_S^u) & \Gamma^{0\chi}(\chi_s, \Lambda, G_s) \\ \frac{\sqrt{2}}{3}(J_S^s - J_S^u) & -\frac{1}{3}(J_S^u + 2J_S^s) + \frac{\chi_s^2}{G_s} & \Gamma^{8\chi}(\chi_s, \Lambda, G_s) \\ \Gamma^{0\chi}(\chi_s, \Lambda, G_s) & \Gamma^{8\chi}(\chi_s, \Lambda, G_s) & \Gamma^{\chi\chi}(\chi_s, \Lambda, G_s) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.42}$$

où les $\Gamma^{i\chi}$ $(i = 0, 8, \chi)$ proviennent du développement de Taylor par rapport au champ χ des ordres 0 et 1 de l'action, qui donnent respectivement des contributions de type $\chi\chi$ et $\sigma_{0(8)}\chi$. Ces contributions indirectes font partie intrinsèque de notre modèle. Les éléments de (2.42) se rapportant aux champs σ_0 et σ_8 sont exprimés ici en fonction des diagrammes de polarisation scalaires J_S^a dont la définition est donnée plus loin (2.51).
Les expressions de $\Gamma^{0\chi}$ et $\Gamma^{8\chi}$ s'obtiennent à partir du troisième terme de (2.41), ainsi que du développement en $\tilde{\chi}$ du premier terme de (2.40). Pour ce dernier, nous avons

$$-\mathrm{Tr}_{\Lambda\chi}(G_0\tilde{\varphi}^a\Gamma^a) = -\mathrm{Tr}\int d^4x < x|G_0\tilde{\varphi}^a\Gamma^a|x > .$$

La matrice G_0 est la matrice diagonale des transformées de Fourier des propagateurs fermioniques. Dans l'espace euclidien, le propagateur s'écrit

$$g_a(x) = \frac{1}{-i\partial\!\!\!/ + M_a} \rightarrow g_a(k_E) = \frac{1}{k\!\!\!/ + M_a} = -\frac{k\!\!\!/_E - M_a}{k_E^2 + M_a^2}, \tag{2.43}$$

et la matrice $G_0(k)$ est donc donnée par

$$G_0 = \begin{pmatrix} g_u(k) & 0 & 0 \\ 0 & g_d(k) & 0 \\ 0 & 0 & g_s(k) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{k\!\!\!/ - M_u}{k^2+M_u^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k\!\!\!/ - M_d}{k^2+M_d^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k\!\!\!/ - M_s}{k^2+M_s^2} \end{pmatrix}. \tag{2.44}$$

L'expression à développer est donc, avec symétrie d'isospin $(M_u = M_d)$,

$$G_0\tilde{\varphi}^a\Gamma^a = -\begin{pmatrix} \frac{k\!\!\!/ - M_u}{k^2+M_u^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k\!\!\!/ - M_u}{k^2+M_u^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k\!\!\!/ - M_s}{k^2+M_s^2} \end{pmatrix} \left(\tilde{\sigma}^a\lambda^a/\sqrt{2} + \tilde{\pi}^a i\gamma_5\lambda^a/\sqrt{2}\right).$$

La matrice G_0 a la forme

$$\begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix},$$

qu'on peut développer sur la base des matrices de Gell-Mann diagonales :

$$G_0 = \alpha\lambda_0 + \beta\lambda_8,$$

avec

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{\sqrt{6}}(2u+s),\\ \beta &= \frac{1}{\sqrt{3}}(u-s).\end{aligned}$$

En nous limitant aux champs scalaires isoscalaires σ^0 et σ^8, et en calculant la trace dans les espaces de couleur, de Dirac et de saveur, nous obtenons

$$-\mathrm{Tr}_{\Lambda\chi}(G_0\tilde{\sigma}^a\Gamma^a) = -4\sqrt{2}N_c\left(\alpha\tilde{\sigma}^0+\beta\tilde{\sigma}^8\right),$$

où, suite à l'intégration dans l'espace de Dirac, nous avons maintenant

$$\begin{aligned}u &= \frac{M_u}{k^2+M_u^2},\\ s &= \frac{M_s}{k^2+M_s^2}.\end{aligned}$$

Avec une régularisation en d^4k, et en exploitant la relation

$$d^4k = \pi^2k^2dk^2 \tag{2.45}$$

valable dans l'espace euclidien, l'expression à développer au premier ordre en $\tilde{\chi}$ pour obtenir $\Gamma^{0\chi}$ et $\Gamma^{8\chi}$ est alors

$$-\int_0^{\Lambda^2\chi^2} dk^2k^2\frac{4\sqrt{2}N_c}{16\pi^2}\left[\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{2M_u}{k^2+M_u^2}+\frac{M_s}{k^2+M_s^2}\right)\tilde{\sigma}_0+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{M_u}{k^2+M_u^2}-\frac{M_s}{k^2+M_s^2}\right)\tilde{\sigma}_8\right].$$

Le développement en $\tilde{\chi}$ donne les expressions obtenues dans [83] pour $I^{(2)}_{\tilde{\chi}\tilde{\sigma}_a}$, en exploitant la relation

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^y f(y')dy' = f(y)\frac{\partial y}{\partial x}. \tag{2.46}$$

Sans oublier la contribution du troisième terme de (2.41), nous avons ainsi :

$$\Gamma^{0\chi} = \frac{\chi_s}{G_s}\sigma_s^0-\frac{N_c}{\pi^2}\Lambda^4\chi_s^3\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{2M_u}{\Lambda^2\chi_s^2+M_u^2}+\frac{M_s}{\Lambda^2\chi_s^2+M_s^2}\right), \tag{2.47}$$

$$\Gamma^{8\chi} = \frac{\chi_s}{G_s}\sigma_s^8-\frac{N_c}{\pi^2}\Lambda^4\chi_s^3\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{M_u}{\Lambda^2\chi_s^2+M_u^2}-\frac{M_s}{\Lambda^2\chi_s^2+M_s^2}\right). \tag{2.48}$$

Le calcul de $\Gamma^{\chi\chi}$ repose sur le même principe, en appliquant cette fois le développement de Taylor d'ordre 2 en $\tilde{\chi}$ sur les termes d'ordre 0 de l'action (2.39). La grandeur χ_G apparaissant dans $\mathcal{L}_\chi$ est déterminée en annulant la dérivée par rapport à $\tilde{\chi}$ du premier ordre de l'action, comme décrit en (2.23). Nous devons alors développer au second ordre en $\tilde{\chi}$ l'expression suivante, qui correspond à l'ordre 0 du développement du Tr ln dans [83] :

$$-2N_c\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[2\ln(k^2+M_u^2)+\ln(k^2+M_s^2)\right]. \tag{2.49}$$

Le calcul du second ordre en $\tilde{\chi}$ avec la régularisation d^4k est développé en métrique euclidienne dans [83] :

$$\Gamma^{\chi\chi} = q^2 + b^2\chi_s^2 - \frac{N_c}{2\pi^2}\Lambda^6\chi_s^4\left(\frac{2}{\Lambda^2\chi_s^2 + M_u^2} + \frac{1}{\Lambda^2\chi_s^2 + M_s^2}\right) - \frac{2}{G_s}\left[(M_u - m_u)^2 + \frac{1}{2}(M_s - m_s)^2\right], \tag{2.50}$$

où nous avons utilisé les relations définissant M_u et M_s (2.28)-(2.29).

Les quatre éléments de la matrice des propagateurs inverses se rapportant aux champs σ_0 et σ_8 sont exprimés dans (2.42) sous la forme de combinaisons linéaires des diagrammes de polarisation J_S^u et J_S^s, qui correspondent à l'intégration sur une boucle quark-antiquark. Les diagrammes de polarisation scalaires ont l'expression suivante, en métrique euclidienne :

$$J_S^a(q) = -N_c n_f \mathrm{tr}_\gamma \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{\not{k} + \frac{\not{q}}{2} - M_a}{(k + \frac{q}{2})^2 + M_a^2} \frac{\not{k} - \frac{\not{q}}{2} - M_a}{(k - \frac{q}{2})^2 + M_a^2}, \tag{2.51}$$

avec $N_c = 3$ et $n_f = 2$, facteurs résultant des traces dans les espaces de couleur et de saveur, respectivement. En appliquant

$$\mathrm{tr}_\gamma \not{a}\not{b} = -4(a.b),$$

nous obtenons facilement

$$J_S^a(q) = 4N_c n_f \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{k^2 - \frac{q^2}{4} - M_a^2}{\left[(k + \frac{q}{2})^2 + M_a^2\right]\left[(k - \frac{q}{2})^2 + M_a^2\right]}. \tag{2.52}$$

Nous montrons dans l'annexe B.7 que les expressions de Γ^{00}, Γ^{88} et Γ^{08} dans (2.42) se ramènent après quelques manipulations à celles données dans [83].

Les masses des trois champs physiques résultant du couplage entre les champs mésoniques $\tilde{\sigma}_0$ et $\tilde{\sigma}_8$ et le champ de dilaton $\tilde{\chi}$ s'obtiennent par diagonalisation de la matrice des propagateurs inverses (2.42). Les masses des mésons scalaires isoscalaires correspondent aux zéros des valeurs propres de la matrice. Le couplage entre les champs mésoniques de quarks $\tilde{\sigma}_0$ et $\tilde{\sigma}_8$ et le champ gluonique $\tilde{\chi}$ est contenu dans les termes $\Gamma^{0\chi}$ et $\Gamma^{8\chi}$ de la matrice S^{-1}. Ces deux termes tendent vers 0 lorsque χ_s augmente, réduisant ainsi le couplage entre les champs. Si nous posons ces deux termes nuls, nous serons en présence de champs respectivement pur $u\bar{u}$, pur $s\bar{s}$ et pure glu, et non plus en présence de champs hybrides résultant du couplage. Ceci peut se vérifier en posant $\Gamma^{0\chi} = 0$ et $\Gamma^{8\chi} = 0$, et en diagonalisant la matrice 2×2 restante :

$$S_{us}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}(2J_S^u + J_S^s) + \frac{\chi_s^2}{G_s} & \frac{\sqrt{2}}{3}(J_S^s - J_S^u) \\ \frac{\sqrt{2}}{3}(J_S^s - J_S^u) & -\frac{1}{3}(J_S^u + 2J_S^s) + \frac{\chi_s^2}{G_s} \end{pmatrix}. \tag{2.53}$$

Les deux valeurs propres de cette matrice sont facilement calculées, et nous observons un découplage des quarks u et s :

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{\chi_s^2}{G_s} - J_S^u, \\ \lambda_2 &= \frac{\chi_s^2}{G_s} - J_S^s.\end{aligned}$$

Les masses des mésons physiques sont, dans ce cas, égales respectivement aux masses des mésons scalaires pur $u\bar{u}$ et pur $s\bar{s}$, et à la masse du glueball (fixée à 1500 MeV).

Nous dérivons ci-dessous l'équation de masse du scalaire isovecteur pur $u\bar{u}$, noté a_0. Nous partons de l'expression de l'action effective réduite à ses termes faisant intervenir les champs scalaires σ^a :

$$I_{eff}^{\sigma} = -\mathrm{Tr}\ln\left[-i\partial\!\!\!/ + m^0 + \sigma^a \frac{\lambda^a}{\sqrt{2}}\right] + \int d^4x\ \sigma_a^2\ \frac{\chi_s^2}{4G_s}. \tag{2.54}$$

En développant le logarithme via (2.38), nous obtenons l'expression suivante :

$$\begin{aligned}I_{eff}^{\sigma} &= -\mathrm{Tr}\ln G_0^{-1} - \mathrm{Tr}\left[G_0\tilde{\sigma}^a\frac{\lambda^a}{\sqrt{2}}\right] + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[G_0\tilde{\sigma}^a\frac{\lambda^a}{\sqrt{2}}\right]^2 \\ &\quad -\frac{1}{3}\mathrm{Tr}\left[G_0\tilde{\sigma}^a\frac{\lambda^a}{\sqrt{2}}\right]^3 + \ldots \int d^4x\ \sigma_a^2\ \frac{\chi_s^2}{4G_s},\end{aligned} \tag{2.55}$$

avec G_0^{-1} donné par (2.35). Dans (2.55), nous nous limitons aux termes qui nous intéressent ici, à savoir les troisième et dernier termes. Le développement du troisième terme donne, en passant dans l'espace des impulsions :

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\,[G_0\tilde{\sigma}^a\lambda^a]^2 = \mathrm{tr}\int d^4x\ \ < x|G_0\tilde{\sigma}_a\lambda^a G_0\tilde{\sigma}_b\lambda^b|x> \\ &= \mathrm{tr}\int dx\int dy\int dk\int dk'\ < x|G_0|k >< k|\tilde{\sigma}_a|y > i\gamma_5\lambda^a < y|G_0|k' >< k'|\tilde{\sigma}_b|x > i\gamma_5\lambda^b \\ &= \mathrm{tr}\iiint\frac{dxdydk'}{(2\pi)^8}\int dk\left[G_0(k)i\gamma_5\lambda^a G_0(k')i\gamma_5\lambda^b\right]\exp^{i(k-k')x}\exp^{-i(k-k')y}\,\tilde{\sigma}_a(y)\tilde{\sigma}_b(x) \\ &= N_c\mathrm{tr}_\gamma\mathrm{tr}_\lambda\int\frac{d^4kd^4q}{(2\pi)^4}\ G_0(k)\tilde{\sigma}_a(q)\lambda^a G_0(k-q)\tilde{\sigma}_b(-q)\lambda^b,\end{aligned} \tag{2.56}$$

où nous avons successivement introduit les relations de complétude

$$\int d^4k\ |k>< k| \;=\; \mathbb{1}, \tag{2.57}$$

$$\int d^4x\ |x>< x| \;=\; \mathbb{1}, \tag{2.58}$$

et utilisé les conventions

$$< x|k >= \frac{e^{ikx}}{(2\pi)^2}, \tag{2.59}$$

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= <x|\sigma> \\ &= \int <x|k><k|\sigma> d^4k = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2}\, e^{ikx}\sigma(k), \qquad (2.60)\\ \sigma(k) &= <k|\sigma> = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^2}\, e^{-ikx}\sigma(x). \qquad (2.61)\end{aligned}$$

La dernière équation de (2.56) s'obtient en posant $q = k - k'$.
Comme nous nous intéressons uniquement au champ scalaire isovecteur a_0, nous ne retiendrons de la matrice du nonet scalaire

$$\sigma_a\lambda_a = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 + a_0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_8 & \sqrt{2}a_0^+ & \sqrt{2}K^{*,+} \\ \sqrt{2}a_0^- & \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 - a_0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_8 & \sqrt{2}K_0^* \\ \sqrt{2}K^{*,-} & \sqrt{2}\bar{K}_0^* & \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 - \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_8 \end{pmatrix} \qquad (2.62)$$

que la partie suivante

$$\tilde{\sigma}_a\lambda_a \to \begin{pmatrix} \tilde{a}_0 & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{a}_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.63)$$

Sous l'hypothèse de symétrie d'isospin ($M_u = M_d$), la matrice des propagateurs s'écrit

$$G_0(k) = \begin{pmatrix} g_u(k) & 0 & 0 \\ 0 & g_u(k) & 0 \\ 0 & 0 & g_s(k) \end{pmatrix},$$

avec $g_a(k)$ donné en (2.43), et nous obtenons en calculant la trace dans l'espace des saveurs

$$\mathrm{Tr}\,[G_0\tilde{\sigma}_a\lambda^a]^2 = 2N_c\mathrm{tr}_\gamma \int d^4q \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\; g_u(k)g_u(k-q)\tilde{a}_0(q)\tilde{a}_0(-q).$$

Le deuxième ordre de l'action dans les champs scalaires s'écrit donc

$$\begin{aligned} I^{(2)}_{eff}(a_0) &= \frac{N_c}{2}\mathrm{tr}_\gamma \int d^4q \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\; g_u(k)g_u(k-q)\tilde{a}_0(q)\tilde{a}_0(-q) + \int d^4x\; \tilde{a}_0^2\; \frac{\chi_s^2}{4G_s} \\ &= \int d^4q \left\{ \frac{N_c}{2}\mathrm{tr}_\gamma \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\; g_u(k+q/2)g_u(k-q/2) + \frac{\chi_s^2}{4G_s} \right\} \tilde{a}_0(q)\tilde{a}_0(-q). \end{aligned}$$

En reprenant la définition de J_S^a (2.52), nous obtenons :

$$I^{(2)}_{eff}(a_0) = \int d^4q \left\{ -\frac{J_S^u}{4} + \frac{\chi_s^2}{4G_s} \right\} \tilde{a}_0(q)\tilde{a}_0(-q), \qquad (2.64)$$

donnant l'équation de masse pour a_0

$$\chi_s^2 - G_sJ_S^u(-m_{a_0}^2) = 0. \qquad (2.65)$$

L'équation (2.65) est identique à l'équation de masse du a_0 donnée en [83] (voir annexe B.7).

2.3.2 Secteur pseudo-scalaire

Dans le secteur pseudo-scalaire, le développement de l'action au deuxième ordre fournit les résultats repris ci-dessous, et exprimés à l'aide des diagrammes de polarisation. Ces résultats sont exprimés sous une forme équivalente dans [83].

L'équation de masse pour le pion s'écrit

$$\chi_s^2 - G_s J_5^u(-m_\pi^2) = 0, \tag{2.66}$$

avec $J_5^a(q)$ désignant le diagramme de polarisation pseudo-scalaire en métrique euclidienne :

$$\begin{aligned} J_5^a(q) &= -N_c n_f \mathrm{tr}_\gamma \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4}\, i\gamma_5 \frac{\not{k} + \frac{\not{q}}{2} - M_a}{(k+\frac{q}{2})^2 + M_a^2} i\gamma_5 \frac{\not{k} - \frac{\not{q}}{2} - M_a}{(k-\frac{q}{2})^2 + M_a^2} && (2.67) \\ &= 4N_c n_f \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{k^2 - \frac{q^2}{4} + M_a^2}{\left[(k+\frac{q}{2})^2 + M_a^2\right]\left[(k-\frac{q}{2})^2 + M_a^2\right]}, && (2.68) \end{aligned}$$

où nous avons appliqué la relation

$$\mathrm{tr}_\gamma \gamma_5 \not{a} \gamma_5 \not{b} = -\mathrm{tr}_\gamma \not{a}\not{b} = 4(a.b).$$

La masse des kaons s'obtient en résolvant l'équation

$$\chi_s^2 - G_s J_5^{us}(-m_K^2) = 0, \tag{2.69}$$

dans laquelle J_5^{us} est le diagramme de polarisation pseudo-scalaire contenant un propagateur de quark u et un propagateur de quark s. Son expression est

$$\begin{aligned} J_5^{us}(q) &= -N_c n_f \mathrm{tr}_\gamma \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4}\, i\gamma_5 \frac{\not{k} + \frac{\not{q}}{2} - M_u}{(k+\frac{q}{2})^2 + M_u^2} i\gamma_5 \frac{\not{k} - \frac{\not{q}}{2} - M_s}{(k-\frac{q}{2})^2 + M_s^2} && (2.70) \\ &= 4N_c n_f \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{k^2 - \frac{q^2}{4} + M_u M_s}{\left[(k+\frac{q}{2})^2 + M_u^2\right]\left[(k-\frac{q}{2})^2 + M_s^2\right]}. && (2.71) \end{aligned}$$

La masse des mésons η et η' est calculée en diagonalisant la matrice des propagateurs inverses relative aux champs π_0 et π_8. C'est le paramètre ξ de l'anomalie axiale qui détermine l'importance du couplage entre les champs π_0 et π_8, pour donner les champs physiques η et η'. La matrice du second ordre dans les champs π_0 et π_8 est donnée par :

$$S_{\mathrm{ps}}^{-1}(q) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}(2J_5^u + J_5^s) + \frac{\chi_s^2}{G_s}(1+\xi) & \frac{\sqrt{2}}{3}(J_5^s - J_5^u) \\ \frac{\sqrt{2}}{3}(J_5^s - J_5^u) & -\frac{1}{3}(J_5^u + 2J_5^s) + \frac{\chi_s^2}{G_s} \end{pmatrix}. \tag{2.72}$$

En imposant $m_{\eta'} = 0.958$ GeV, nous obtenons le paramètre ξ. Nous observons qu'en posant $\xi = 0$, nous retrouvons la forme de la matrice 2×2 relative aux champs σ_0 et σ_8 dans la matrice scalaire (2.42), et donc, nous avons deux champs physiques pur $u\bar{u}$ et pur $s\bar{s}$. La variable ξ induit donc le couplage en quarks u et s des mésons η et η'.

Afin d'illustrer la notion de boson de Goldstone abordée dans la section 1.1, nous reprenons les expressions des masses des pions et des kaons données dans la thèse [83], avec une régularisation d^4k :

$$m_\pi^2(q) = \frac{\chi_s^2}{G_s Z^{uu}(q)} \frac{m_u}{M_u}, \tag{2.73}$$

$$m_K^2(q) = \frac{\chi_s^2}{2G_s Z^{us}(q)} \left(\frac{m_u}{M_u} + \frac{m_s}{M_s}\right) + (M_u - M_s)^2, \tag{2.74}$$

avec $Z^{ab}(q)$ donné en annexe (B.19). Rappelons que dans la limite de symétrie d'isospin $(m_u = m_d)$, les masses du triplet de pions sont dégénérées, ainsi que celles des quatre kaons. L'équation (2.73) montre que le pion est effectivement un boson de Goldstone, sa masse étant nulle dans la limite chirale. Dans (2.74), la présence des masses étranges courante m_s et constituante M_s indique une valeur plus élevée pour la masse du kaon que pour celle du pion.

Dans le secteur isoscalaire, les champs physiques η et η' proviennent du découplage des champs π_0 et π_8 dans la matrice (2.72). A titre indicatif, nous reprenons l'expression de leur masse calculée dans [83], qui dépend évidemment du paramètre de l'anomalie axiale ξ :

$$\begin{aligned} m^2_{\begin{pmatrix}\eta' \\ \eta\end{pmatrix}}(q) = \frac{\chi_s^2}{G_s}\left[\frac{m_u}{M_u} + \frac{m_s}{M_s} + \xi \pm \frac{1}{3\cos 2\theta_q}\left(\frac{m_u}{M_u} - \frac{m_s}{M_s} + 3\xi\right)\right] \\ \times \left(Z^{uu} + Z^{ss} \pm \frac{Z^{uu} - Z^{ss}}{3\cos 2\theta_q}\right)^{-1}, \end{aligned} \tag{2.75}$$

avec

$$\tan 2\theta_q = 2\sqrt{2}\left[1 + \frac{3\xi\chi_s^2/G_s}{q^2\left(Z^{uu} - Z^{ss}\right) + \chi_s^2/G_s\left(\frac{m_u}{M_u} - \frac{m_s}{M_s}\right)}\right]^{-1}. \tag{2.76}$$

Nous constatons, lorsque $\xi = 0$, que les mésons η' et η se ramènent respectivement à des états pur s et pur u, leur masse étant alors donnée par :

$$m_{\eta'}^2(q) = \frac{\chi_s^2}{G_s Z^{ss}(q)} \frac{m_s}{M_s}, \tag{2.77}$$

$$m_\eta^2(q) = \frac{\chi_s^2}{G_s Z^{uu}(q)} \frac{m_u}{M_u}. \tag{2.78}$$

Nous montrons dans l'annexe B.5 que cette propriété est vérifiée au niveau de la composition en quarks des champs de mésons.

La symétrie $U(1)_A$ est brisée par les corrections quantiques dans (2.3), brisure modélisée par le paramètre d'anomalie axiale ξ. Dans la limite chirale des masses courantes nulles, nous avons :

$$m^2_{\eta'}(q) = \frac{\chi_s^2}{G_s Z^{uu}(q)}\xi, \tag{2.79}$$

$$m^2_{\eta}(q) = 0. \tag{2.80}$$

Ceci confirme bien que le méson η' a perdu la propriété de boson de Goldstone en présence de l'anomalie axiale (2.4).

2.4 Constantes de couplage

Nous passons maintenant à la définition et au calcul des constantes de couplage associées aux différents mésons. Ces constantes de couplage interviendront notamment dans la définition des champs physiques, ainsi que dans les expressions des amplitudes de désintégration.

2.4.1 Secteur scalaire

Nous commençons par illustrer la notion de constante de couplage dans le cas des trois mésons scalaires isoscalaires couplés par l'intermédiaire de la matrice (2.42). Les constantes de couplage s'obtiennent par dérivation, par rapport à q^2, de la matrice diagonalisée, et les couplages sont évalués aux masses correspondantes, qui pour rappel sont les zéros des valeurs propres. Ci-dessous sont reprises les différentes étapes qui mènent aux expressions des champs physiques ainsi qu'aux constantes de couplage associées. On peut retrouver ces développements par exemple dans [85].
L'action effective (2.7) développée jusqu'au second ordre dans les parties fluctuantes des champs scalaires isoscalaires et du champ de dilaton s'écrit, de la même façon que (2.64),

$$I^{(2)}_{eff}(\sigma_0,\sigma_8,\chi) = \frac{1}{2}\sum_q (\tilde{\sigma}_{0,q},\tilde{\sigma}_{8,q},\tilde{\chi}_q) S^{-1}(q^2) \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{0,-q} \\ \tilde{\sigma}_{8,-q} \\ \tilde{\chi}_{-q} \end{pmatrix}. \tag{2.81}$$

La diagonalisation de la matrice $S^{-1}(q^2)$ donnée en (2.42) conduit à l'expression suivante :

$$I^{(2)}(\phi_1,\phi_2,\phi_3) = \frac{1}{2}\sum_q \sum_i \widetilde{\phi}_{i,q} \mathrm{diag}\left[\Lambda_{ii}(q^2)\right] \widetilde{\phi}_{i,-q}, \tag{2.82}$$

avec la matrice diagonale des valeurs propres

$$\mathrm{diag}\left[\Lambda_{ii}(q^2)\right] = V^{-1}(q^2) S^{-1} V(q^2)$$

et le nouveau champ $\widetilde{\phi}_i$ défini par :

$$\widetilde{\phi}_i = \sum_j V_{ij}^{-1}(q^2)\ \widetilde{\sigma}_j.$$

La matrice des vecteurs propres est orthogonale, avec des colonnes orthonormées, et nous avons donc

$$V^{-1}(q^2) = V^T(q^2). \tag{2.85}$$

Dans la suite, nous adoptons les notations suivantes, avec m_i $(i = I, II, D)$ désignant les masses des mésons physiques résultant du couplage, m_D étant la masse du dilaton physique :
$V(q^2 = -m_i^2)$ indique que tous les éléments de la matrice sont calculés en $q^2 = -m_i^2$, tandis que $V(-m_i^2)$ indique que les éléments de la première colonne sont calculés en $-m_I^2$, ceux de la deuxième colonne en $-m_{II}^2$, et ceux de la troisième colonne en $-m_D^2$.
L'expression (2.82) peut être réécrite en développant les éléments de la matrice diagonale autour de leur zéro respectif, qui correspondent aux masses des champs physiques issus de la diagonalisation. Nous avons, en nous limitant aux deux premiers termes du développement de Taylor,

$$\begin{aligned} I^{(2)}(\phi_1,\phi_2,\phi_3) &\approx \frac{1}{2}\sum_q\sum_i \widetilde{\phi}_{i,q}\mathrm{diag}\left[\Lambda_{ii}(-m_i^2) + (q^2+m_i^2)\left[\partial_{q^2}\Lambda_{ii}(q^2)\right]_{q^2=-m_i^2}\right]\widetilde{\phi}_{i,-q} \\ &= \frac{1}{2}\sum_q\sum_i \widetilde{\phi}_{i,q}G_{ii}(q^2+m_i^2)\widetilde{\phi}_{i,-q}. \end{aligned} \tag{2.86}$$

Dans (2.86), nous avons utilisé la relation

$$\mathrm{diag}\left[\Lambda_{ii}(-m_i^2)\right] = 0, \tag{2.87}$$

indiquant que les masses des mésons sont les zéros des valeurs propres, et nous avons défini

$$G_{ii} = \partial_{q^2}\mathrm{diag}\left[\Lambda_{ii}(q^2)\right]_{q^2=-m_i^2}. \tag{2.88}$$

La matrice diagonale $G(q^2)$ peut s'exprimer différemment, à l'aide des développements suivants :

$$\begin{aligned} G(q^2) &= \partial_{q^2}\mathrm{diag}\left[\Lambda_{ii}(q^2)\right] \\ &= \partial_{q^2}\left[V^{-1}(q^2)S^{-1}V(q^2)\right] \\ &= \partial_{q^2}\left[V^{-1}(q^2)\right]S^{-1}V(q^2) + V^{-1}(q^2)S^{-1}\partial_{q^2}\left[V(q^2)\right] + V^{-1}(q^2)\partial_{q^2}\left[S^{-1}\right]V(q^2) \\ &= \partial_{q^2}\left[V^{-1}(q^2)\right]V(q^2)V^{-1}(q^2)S^{-1}V(q^2) + V^{-1}(q^2)S^{-1}V(q^2)V^{-1}(q^2)\partial_{q^2}\left[V(q^2)\right] \\ &\quad + V^{-1}(q^2)\partial_{q^2}\left[S^{-1}\right]V(q^2). \end{aligned}$$

Le deuxième terme peut être écrit différemment grâce à la relation

$$\begin{aligned} V^{-1}(q^2)\partial_{q^2}\left[V(q^2)\right] &= \partial_{q^2}\left[V^{-1}(q^2)V(q^2)\right] - \partial_{q^2}\left[V^{-1}(q^2)\right]V(q^2) \\ &= -\partial_{q^2}\left[V^{-1}(q^2)\right]V(q^2). \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned}G(q^2) &= \partial_{q^2}\left[V^{-1}(q^2)\right]V(q^2)V^{-1}(q^2)S^{-1}V(q^2) - V^{-1}(q^2)S^{-1}V(q^2)\partial_{q^2}\left[V^{-1}(q^2)\right]V(q^2)\\ &\quad + V^{-1}(q^2)\partial_{q^2}\left[S^{-1}\right]V(q^2)\\ &= \left[\partial_{q^2}\left[V^{-1}(q^2)\right]V(q^2),\ \mathrm{diag}\left[\Lambda_{ii}(q^2)\right]\right] + V^{-1}(q^2)\partial_{q^2}\left[S^{-1}\right]V(q^2).\end{aligned}$$

Comme les éléments diagonaux d'un commutateur sont toujours nuls, et en vertu de l'orthogonalité de la matrice $V(q^2)$, nous définissons

$$g_{\Phi_i}^{-2} = G_{ii}(q^2) = \left[V^T(q^2)\partial_{q^2}\left[S^{-1}\right]V(q^2)\right]_{ii}. \tag{2.89}$$

La notation Φ_i servira à définir les mésons physiques, grâce à la relation (2.95) ci-dessous. Dans l'expression (2.89), seules les composantes de la colonne i de la matrice des vecteurs propres $V(q^2)$, autrement dit les composantes du vecteur propre $V_i(q^2)$, interviennent. Nous pouvons donc finalement écrire :

$$g_{\Phi_i}^{-2} = \partial_{q^2}\mathrm{diag}\left[\Lambda_{ii}(q^2)\right]_{q^2=-m_i^2} = \left[V^T(-m_i^2)\partial_{q^2}\left[S^{-1}\right]V(-m_i^2)\right]_{ii}. \tag{2.90}$$

En calculant les produits de matrices avec les notations

$$V(-m_i^2) = \begin{pmatrix} V_{0I}^2(-m_I^2) & V_{0II}^2(-m_{II}^2) & V_{0D}^2(-m_D^2)\\ V_{8I}^2(-m_I^2) & V_{8II}^2(-m_{II}^2) & V_{8D}^2(-m_D^2)\\ V_{\chi I}^2(-m_I^2) & V_{\chi II}^2(-m_{II}^2) & V_{\chi D}^2(-m_D^2)\end{pmatrix}, \tag{2.91}$$

nous avons

$$\begin{aligned}g_{\Phi_I}^{-2} &= V_{0I}^2(-m_I^2)\partial_{q^2}\left[\Gamma^{00}\right]_{q^2=-m_I^2} + V_{8I}^2(-m_I^2)\partial_{q^2}\left[\Gamma^{88}\right]_{q^2=-m_I^2}\\ &\quad +2V_{0I}^2(-m_I^2)V_{80}^2(-m_I^2)\left[\Gamma^{08}\right]_{q^2=-m_I^2} + V_{\chi I}^2(-m_I^2),\end{aligned} \tag{2.92}$$

$$\begin{aligned}g_{\Phi_{II}}^{-2} &= V_{0II}^2(-m_{II}^2)\partial_{q^2}\left[\Gamma^{00}\right]_{q^2=-m_{II}^2} + V_{8II}^2(-m_{II}^2)\partial_{q^2}\left[\Gamma^{88}\right]_{q^2=-m_{II}^2}\\ &\quad +2V_{0II}^2(-m_{II}^2)V_{88}^2(-m_{II}^2)\left[\Gamma^{08}\right]_{q^2=-m_{II}^2} + V_{\chi II}^2(-m_{II}^2),\end{aligned} \tag{2.93}$$

$$\begin{aligned}g_{\Phi_D}^{-2} &= V_{0D}^2(-m_D^2)\partial_{q^2}\left[\Gamma^{00}\right]_{q^2=-m_D^2} + V_{8D}^2(-m_D^2)\partial_{q^2}\left[\Gamma^{88}\right]_{q^2=-m_D^2}\\ &\quad +2V_{0D}^2(-m_D^2)V_{8\chi}^2(-m_D^2)\left[\Gamma^{08}\right]_{q^2=-m_D^2} + V_{\chi D}^2(-m_D^2),\end{aligned} \tag{2.94}$$

avec les notations de (2.42) pour les éléments de la matrice S^{-1}.
En notant les champs physiques Φ_i :

$$\Phi_i = g_{\Phi_i}^{-1}\phi_i = g_{\Phi_i}^{-1}\sum_j V_{ij}^{-1}(-m_i^2)\sigma_j, \tag{2.95}$$

l'équation (2.86) s'écrit

$$I^{(2)}(\Phi_I,\Phi_{II},\Phi_D) = \frac{1}{2}\sum_q\sum_i \widetilde{\Phi}_{i,q}(q^2+m_i^2)\widetilde{\Phi}_{i,-q} \tag{2.96}$$

et nous retrouvons le terme cinétique usuel.
Par ailleurs, l'équation (2.95) peut s'inverser, et nous exprimons alors les champs mésoniques (ici σ_0 et σ_8) en fonctions des champs physiques :

$$\sigma_j = V_{ij}(-m_i^2) g_{\Phi_i} \Phi_i. \tag{2.97}$$

En détaillant, nous écrivons :

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= V_{0I} g_I \Phi_I + V_{0II} g_{II} \Phi_{II} + V_{0D} g_D \Phi_D, & (2.98)\\ \sigma_8 &= V_{8I} g_I \Phi_I + V_{8II} g_{II} \Phi_{II} + V_{8D} g_D \Phi_D, & (2.99)\\ \chi &= V_{\chi I} g_I \Phi_I + V_{\chi II} g_{II} \Phi_{II} + V_{\chi D} g_D \Phi_D. & (2.100) \end{aligned}$$

Dans ce qui précède, g_{Φ_i}, aussi noté g_i, désigne la constante de couplage *nue* du méson physique i, et il reste à définir les constantes de couplage aux quarks de ces mésons, qui permettent d'écrire les diverses expressions provenant de développements de l'action sous une forme plus élégante. Les termes d'interaction dans (2.7) entre les quarks et les champs mésoniques scalaires isoscalaires sont de la forme

$$\bar{q}(\sigma_0 \lambda_0 + \sigma_8 \lambda_8) q. \tag{2.101}$$

En exploitant (2.97), nous obtenons un terme d'interaction entre les quarks et les champs physiques Φ_i :

$$\bar{q}(\sigma_0 \lambda_0 + \sigma_8 \lambda_8) q = \bar{u} A_1 u + \bar{d} A_2 d + \bar{s} A_3 s, \tag{2.102}$$

avec

$$A_i = \sum_{j=1,2,3} \Phi_j \left[(\lambda_0)_{ii} V_{0j} + (\lambda_8)_{ii} V_{8j} \right] g_j \qquad i = 1,2,3. \tag{2.103}$$

Nous montrons ainsi que les champs physiques sont couplés aux quarks avec les constantes de couplage suivantes :

$$\begin{aligned} g_{ju\bar{u}} = g_{jd\bar{d}} &= \left[(\lambda_0)_{11} V_{0j} + (\lambda_8)_{11} V_{8j} \right] g_j, & (2.104)\\ \sqrt{2}\, g_{js\bar{s}} &= \left[(\lambda_0)_{33} V_{0j} + (\lambda_8)_{33} V_{8j} \right] g_j, & (2.105) \end{aligned}$$

avec par exemple la désignation suivante des mésons physiques :

$$\begin{aligned} j &= 1 \quad \text{pour} \quad f_0(1370),\\ j &= 2 \quad \text{pour} \quad f_0(1710),\\ j &= 3 \quad \text{pour} \quad f_0(1500). \end{aligned}$$

Nous avons finalement :

$$\begin{aligned} g_{ju\bar{u}} = g_{jd\bar{d}} &= \left[\sqrt{\frac{2}{3}} V_{1j} + \sqrt{\frac{1}{3}} V_{2j} \right] g_j, & (2.106)\\ g_{js\bar{s}} &= \left[\sqrt{\frac{1}{3}} V_{1j} - \sqrt{\frac{2}{3}} V_{2j} \right] g_j. & (2.107) \end{aligned}$$

Si nous considérons le cas plus simple de mésons non couplés, la constante de couplage s'obtient simplement par dérivation de l'équation de masse correspondante. Nous avons ainsi pour le méson scalaire isovecteur a_0 :

$$\begin{aligned} g_{a_0 q\bar{q}}^{-2} &= \frac{\partial}{\partial q^2}\left[\chi_s^2/G_s - J_S^u(q^2)\right]_{q^2=-m_{a_0}^2} \\ &= -\frac{\partial}{\partial q^2}\left[J_S^u(q^2)\right]_{q^2=-m_{a_0}^2}. \end{aligned} \tag{2.108}$$

Le champs physique a_0 s'écrit en fonction du champ mésonique σ_3 via la constante de couplage, de la même façon qu'en (2.95) :

$$a_0 = g_{a_0 q\bar{q}}^{-1}\,\sigma_3. \tag{2.109}$$

2.4.2 Secteur pseudo-scalaire

Dans le secteur pseudo-scalaire, les couplages sont déterminés de la même façon. Pour les pions et kaons, nous avons :

$$g_{\pi q\bar{q}}^{-2} = -\frac{\partial}{\partial q^2}\left[J_5^u(q^2)\right]_{q^2=-m_\pi^2}, \tag{2.110}$$

$$g_{K u\bar{s}}^{-2} = -\frac{\partial}{\partial q^2}\left[J_5^{us}(q^2)\right]_{q^2=-m_K^2}. \tag{2.111}$$

Ces expressions coïncident avec celles développées dans [83] et qui s'écrivent

$$\begin{aligned} g_{\pi u\bar{u}}^{-2} &= \frac{\partial}{\partial q^2}\left(q^2 Z^{uu}\right)\Big|_{-m_\pi^2}, \\ g_{K u\bar{s}}^{-2} &= \frac{\partial}{\partial q^2}\left[\left(q^2 + (M_u - M_s)^2\right) Z^{us}\right]\Big|_{-m_K^2}, \end{aligned}$$

avec la fonction Z^{ab} donnée en annexe (B.19), et rappelée ci-dessous :

$$Z^{ab}(q^2) = 4N_c \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 + M_a^2][(k-q)^2 + M_b^2]}.$$

Les champs physiques (notés avec une astérisque) sont introduits comme dans la section précédente, à la fois pour les pions ($i = 1, 2, 3$) et les kaons (avec $g_{Ku\bar{s}} = g_{Ks\bar{u}}$) :

$$\pi_i^* = g_{\pi u\bar{u}}^{-1}\pi_i, \tag{2.112}$$

$$K^{+*} = g_{Ku\bar{s}}^{-1}K^+, \tag{2.113}$$

$$K^{-*} = g_{Ks\bar{u}}^{-1}K^-. \tag{2.114}$$

Les champs mésoniques π_0 et π_8 sont quant à eux couplés via la matrice du second ordre (2.72) dont la diagonalisation permet de dériver les champs physiques η et η' grâce aux relations générales (2.90, 2.95). Avec une notation formelle sous forme matricielle, les champs π_0 et π_8 peuvent s'écrire comme en (2.97) :

$$\pi = Dg\Sigma_\eta, \tag{2.115}$$

où D désigne la matrice des vecteurs propres de (2.72) et Σ_η est le vecteur contenant les champs physiques η et η'. Sous une forme plus détaillée, sans toutefois revenir sur les valeurs en impulsion auxquelles les différents éléments sont évalués, nous écrivons :

$$\pi_0 = D_{0\eta}g_\eta\eta + D_{0\eta'}g_{\eta'}\eta', \tag{2.116}$$

$$\pi_8 = D_{8\eta}g_\eta\eta + D_{8\eta'}g_{\eta'}\eta'. \tag{2.117}$$

Enfin, en appliquant les formules générales des constantes de couplage aux quarks (2.104, 2.105), nous avons :

$$g_{\eta u\bar{u}} = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}D_{0\eta} + \frac{1}{\sqrt{3}}D_{8\eta}\right) g_\eta, \tag{2.118}$$

$$g_{\eta' u\bar{u}} = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}D_{0\eta'} + \frac{1}{\sqrt{3}}D_{8\eta'}\right) g_{\eta'}, \tag{2.119}$$

$$g_{\eta s\bar{s}} = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}D_{0\eta} - \frac{2}{\sqrt{3}}D_{8\eta}\right) \frac{1}{\sqrt{2}}\, g_\eta, \tag{2.120}$$

$$g_{\eta' s\bar{s}} = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}D_{0\eta'} - \frac{2}{\sqrt{3}}D_{8\eta'}\right) \frac{1}{\sqrt{2}}\, g_{\eta'}. \tag{2.121}$$

2.5 Détermination des paramètres du modèle. Calcul des masses et des constantes de couplage.

2.5.1 Calcul des paramètres. Masses et constantes de couplage pseudo-scalaires.

Notre modèle contient sept paramètres : les masses constituantes des quarks (M_u, M_s), les forces de l'interaction NJL (G_s et b^2), le cut-off Λ, le paramètre de l'anomalie axiale ξ et le condensat de gluons χ_s. Parmi ces paramètres, six d'entre eux sont ajustés pour reproduire les valeurs expérimentales suivantes :

f_π(GeV)	m_π(GeV)	m_K(GeV)	$m_{\eta'}$(GeV)	m_{a_0}(GeV)	$m_{f_0(1500)}$(GeV)
0.093	0.139	0.496	0.958	1.450	1.5

TAB. 2.1 – Valeurs expérimentales reproduites

Le condensat χ_s reste le seul paramètre libre. Nous le ferons varier dans une certaine plage en énergie, choisie de façon à bien visualiser l'évolution des grandeurs représentées graphiquement. Signalons que le choix $\chi_s = 350$ MeV est une valeur obtenue à partir des règles de somme de QCD appliquées au charmonium.

Le modèle de confinement que nous adapterons à notre formalisme dans la seconde partie de ce travail requiert l'application d'une régularisation d^3k dans la métrique de Minkowski, métrique que nous allons adopter parallèlement avec la métrique euclidienne, en vue de confronter les résultats.

La première étape dans la détermination des paramètres consiste à calculer M_u, Λ et G_s en vérifiant simultanément les équations suivantes (métrique de Minkowski) :
la relation de Goldberger-Treiman

$$M_u = g_{\pi q\bar{q}}\ f_\pi, \tag{2.122}$$

où

$$g_{\pi q\bar{q}}^{-2} = \frac{\partial}{\partial q^2}\left[J_5^u(q^2)\right]_{q^2=m_\pi^2}, \tag{2.123}$$

ainsi que les équations de masse pour le pion et le scalaire isovecteur a_0 :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{G_s}{\chi_s^2} J_5^u(m_\pi^2) &= 0, && (2.124)\\ 1 - \frac{G_s}{\chi_s^2} J_S^u(m_{a_0}^2) &= 0. && (2.125)\end{aligned}$$

Les intégrales de polarisation présentent des divergences ultraviolettes, ce qui nécessite l'introduction d'un cut-off. Ce dernier a été rendu invariant d'échelle, et nous le notons donc $\Lambda\chi_s$ [80].
Les diagrammes de polarisation en métrique de Minkowski sont définis de la façon suivante :

$$\begin{aligned} J_5^a(P) &= iN_c n_f \mathrm{tr}_\gamma \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ i\gamma_5 g_a(k+P/2) i\gamma_5 g_a(k-P/2), && (2.126)\\ J_S^a(P) &= iN_c n_f \mathrm{tr}_\gamma \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ g_a(k+P/2) g_a(k-P/2). && (2.127)\end{aligned}$$

Le propagateur fermionique dans l'espace des impulsions de Minkowski est donné par :

$$g_a(k) = (\not{k} - M_a)^{-1} = \frac{\not{k} + M_a}{k^2 - M_a^2} \tag{2.128}$$

Le calcul des traces dans l'espace de Dirac donne alors :

$$\begin{aligned} J_5^a(P) &= i8N_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ \frac{k^2 - \frac{P^2}{4} - M_a^2}{\left[(k+\frac{P}{2})^2 - M_a^2\right]\left[(k-\frac{P}{2})^2 - M_a^2\right]}, && (2.129)\\ J_S^a(P) &= i8N_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ \frac{k^2 - \frac{P^2}{4} + M_a^2}{\left[(k+\frac{P}{2})^2 - M_a^2\right]\left[(k-\frac{P}{2})^2 - M_a^2\right]}. && (2.130)\end{aligned}$$

Les développements complets des expressions (2.126) et (2.127) sont donnés dans l'annexe D.1. En régularisation d^3k, nous obtenons, avec $\vec{P}=0$,

$$
\begin{aligned}
J_5^a(P^0) &= -4N_c n_f \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\Lambda\chi_s} d|\vec{k}||\vec{k}|^2 \frac{E_a(\vec{k})}{(P^0)^2-4E_a^2(\vec{k})}, && (2.131)\\
J_S^a(P^0) &= -4N_c n_f \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\Lambda\chi_s} d|\vec{k}| \frac{|\vec{k}|^4}{E_a(\vec{k})\left[(P^0)^2-4E_a^2(\vec{k})\right]}, && (2.132)
\end{aligned}
$$

où

$$E_a(|\vec{k}|)=\sqrt{|\vec{k}|^2+M_a^2}. \tag{2.133}$$

La masse constituante M_s est calculée en résolvant l'équation de masse du kaon :

$$1-\frac{G_s}{\chi_s^2}J_5^{us}(m_K^2)=0, \tag{2.134}$$

dans laquelle J_5^{ab} est le diagramme de polarisation pseudo-scalaire contenant un propagateur de quark a, et un propagateur de quark b :

$$J_5^{ab}(P)=iN_c n_f \mathrm{tr}_\gamma \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, i\gamma_5 g_a(k+P/2) i\gamma_5 g_b(k-P/2). \tag{2.135}$$

Les développements conduisent à

$$J_5^{ab}(P^0)=-4N_c\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{M_aM_b+E_a(\vec{k})E_b(\vec{k})+\vec{k}^2}{E_a(\vec{k})E_b(\vec{k})}\,\frac{E_a(\vec{k})+E_b(\vec{k})}{(P^0)^2-\left[E_a(\vec{k})+E_b(\vec{k})\right]^2}. \tag{2.136}$$

Cette expression se ramène évidemment à (2.131) lorsque $M_a=M_b$.
La constante de couplage aux quarks du kaon est donnée par

$$g_{Ku\bar{s}}^{-2}=\frac{\partial}{\partial q^2}\left[J_5^{us}(q^2)\right]_{q^2=m_K^2}. \tag{2.137}$$

La matrice du second ordre dans les champs π_0 et π_8 est donnée en (2.72) :

$$S_{\mathrm{ps}}^{-1}(q)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}(2J_5^u+J_5^s)+\frac{\chi_s^2}{G_s}(1+\xi) & \frac{\sqrt{2}}{3}(J_5^s-J_5^u)\\ \frac{\sqrt{2}}{3}(J_5^s-J_5^u) & -\frac{1}{3}(J_5^u+2J_5^s)+\frac{\chi_s^2}{G_s}\end{pmatrix}. \tag{2.138}$$

Avec $m_{\eta'}=0.958$ GeV, la diagonalisation de (2.72) fournit le paramètre de l'anomalie axiale ξ, ainsi que la masse du deuxième méson isoscalaire η.

La table 2.2 compare les valeurs des paramètres et des couplages pseudo-scalaires dans le cas des régularisations d^3k et d^4k, respectivement. Rappelons que pour étudier le glueball, identifié au $f_0(1500)$, nous sommes obligés d'associer le scalaire isovecteur $u\bar{u}$ au $a_0(1450)$

et non au $a_0(980)$ (problème du seuil non-physique). Nous travaillons alors avec une masse constituante M_u assez grande (voir table 2.2), de telle sorte que les mésons pseudo-scalaires π, K, η et η' resteront toujours en-dessous de leur seuil respectif, quelque soit la valeur du paramètre χ_s. D'autre part, le glueball $f_0(1500)$ se situera seulement légèrement au-dessus du seuil $2M_u$, conduisant à une partie imaginaire petite dans le calcul des intégrales, ce qui ne constituera pas un problème dans ce schéma, malgré le non-confinement du modèle. Par contre, les résultats relatifs au $f_0(1710)$ seront entachés de davantage d'imprécisions.

	d^4k	d^3k
M_u (GeV)	0.725	0.725
M_s (GeV)	0.865	0.864
$\Lambda\chi_s$ (GeV)	0.754	0.577
G_s/χ_s^2 (GeV^{-2})	35.2	21.6
ξ	0.458	0.276
m_π (GeV)	0.139	0.139
m_K (GeV)	0.496	0.496
$m_{\eta'}$ (GeV)	0.958	0.958
m_η (GeV)	0.482	0.484
$g_{\pi q\bar{q}}$	7.796	7.796
$g_{Kq\bar{q}}$	8.11	8.07
$g_{\eta' u\bar{u}}$	1.821	2.746
$g_{\eta' s\bar{s}}$	4.301	6.177
$g_{\eta u\bar{u}}$	5.249	6.122
$g_{\eta s\bar{s}}$	-4.093	-4.753
m_{σ_u} (GeV)	1.450	1.450
m_{σ_s} (GeV)	1.746	1.749

TAB. 2.2 – Paramètres et couplages pseudo-scalaires

Nous constatons un facteur approximativement de $\sqrt{2}$ entre le cut-off à 3 dimensions et le cut-off à 4 dimensions.

2.5.2 Secteur scalaire isoscalaire

L'étude expérimentale des mésons scalaires est plus périlleuse, car leurs résonances présentent des formes difficilement identifiables. Le problème trouve son origine dans leurs grandes largeurs de désintégration, induisant un fort recouvrement des résonances individuelles, ainsi que dans l'ouverture de plusieurs canaux de désintégration dans un court intervalle en énergie. Par ailleurs, on attend des objets scalaires non $q\bar{q}$, tels que les glueballs et les états multiquarks, dans la région en-deçà de 1800 MeV.

Le secteur isoscalaire ($I = 0$, $J^{PC} = 0^{++}$) est de loin le plus complexe à étudier, tant d'un point de vue expérimental que théorique. Nous renvoyons à la section 1.2 qui reprend les observations et conclusions de nombreux articles dédiés à la problématique du nonet scalaire.

Dans le cadre de notre modèle, les trois mésons scalaires isoscalaires, qui incluent le glueball, sont couplés au travers de la matrice des propagateurs inverses (2.42) :

$$S^{-1}(q) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}(2J_S^u + J_S^s) + \frac{\chi_s^2}{G_s} & \frac{\sqrt{2}}{3}(J_S^s - J_S^u) & \Gamma^{0\chi}(\chi_s, \Lambda, G_s) \\ \frac{\sqrt{2}}{3}(J_S^s - J_S^u) & -\frac{1}{3}(J_S^u + 2J_S^s) + \frac{\chi_s^2}{G_s} & \Gamma^{8\chi}(\chi_s, \Lambda, G_s) \\ \Gamma^{0\chi}(\chi_s, \Lambda, G_s) & \Gamma^{8\chi}(\chi_s, \Lambda, G_s) & \Gamma^{\chi\chi}(\chi_s, \Lambda, G_s) \end{pmatrix},$$

où les $\Gamma^{i\chi}$ sont cette fois calculés avec une régularisation d^3k qui fournit les expressions suivantes :

$$\Gamma^{0\chi} = -\frac{8N_c}{(2\pi)^2}\Lambda^3\chi_s^2\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{2M_u}{\sqrt{\Lambda^2\chi_s^2 + M_u^2}} + \frac{M_s}{\sqrt{\Lambda^2\chi_s^2 + M_s^2}}\right) + \frac{\chi_s}{G_s}\sigma_0^s, \quad (2.140)$$

$$\Gamma^{8\chi} = -\frac{8N_c}{(2\pi)^2}\Lambda^3\chi_s^2\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{M_u}{\sqrt{\Lambda^2\chi_s^2 + M_u^2}} - \frac{M_s}{\sqrt{\Lambda^2\chi_s^2 + M_s^2}}\right) + \frac{\chi_s}{G_s}\sigma_8^s, \quad (2.141)$$

$$\Gamma^{\chi\chi} = q^2 + m_\chi^2, \quad (2.142)$$

où

$$m_\chi^2 = b^2\chi_s^2 - \frac{2}{G_s}\left((\sigma_0^s)^2 + (\sigma_8^s)^2\right) + \frac{N_c}{\pi}\Lambda^3\chi_s\left(2\sqrt{\Lambda^2\chi_s^2 + M_u^2} + \sqrt{\Lambda^2\chi_s^2 + M_s^2}\right). \quad (2.143)$$

Nous obtenons $\Gamma^{\chi\chi}$ en développant au second ordre en $\tilde{\chi}$ l'expression (2.49). Ici, avec une régularisation d^3k, et en intégrant sur k^0 par partie, puis à l'aide du théorème des résidus, nous avons

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int\frac{dk^0}{2\pi}\ln\left((k^0)^2 + E^2\right) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\Lambda\chi_s} d|\vec{k}||\vec{k}|^2 E(|\vec{k}|).$$

En dérivant deux fois par rapport à χ, en exploitant (2.46) pour la première dérivation, nous obtenons

$$-\frac{N_c}{(\pi)^2}\Bigg\{\Lambda^5\chi_s^3\left[\frac{2}{\sqrt{(\Lambda\chi_s)^2 + M_u^2}} + \frac{1}{\sqrt{(\Lambda\chi_s)^2 + M_s^2}}\right] + 2\Lambda^3\chi_s\left[2\sqrt{(\Lambda\chi_s)^2 + M_u^2} + \sqrt{(\Lambda\chi_s)^2 + M_s^2}\right]\Bigg\}.$$

L'expression finale de $\Gamma^{\chi\chi}$ (2.142) s'obtient comme dans [83] en combinant ce développement avec le second ordre en $\tilde{\chi}$ de $\int \frac{\chi^2}{4G_s}(\varphi_a^2 + \xi\pi_0^2)dx$ et de $\mathcal{L}_\chi$. Nous éliminons χ_G dans $\mathcal{L}_\chi$ en annulant la dérivée par rapport à $\tilde{\chi}$ du premier ordre de l'action.
Ces contributions $\Gamma^{i\chi}$ de la matrice $S^{-1}(q)$ dépendent de la variable χ_s, contrairement aux termes directs Γ^{00}, Γ^{88} et Γ^{08} qui ne dépendent de cette variable que par l'intermédiaire des expressions $\Lambda\chi_s$ et $\frac{\chi_s^2}{G_s}$ qui sont constantes.

Nous représentons ci-dessous la dépendance en χ_s des masses des trois scalaires isoscalaires, respectivement avec des régularisations d^3k et d^4k [86]. La masse du glueball est fixée à 1500 MeV. Nous constatons ainsi une sensible augmentation des masses engendrée par l'adoption d'une régularisation d^3k.

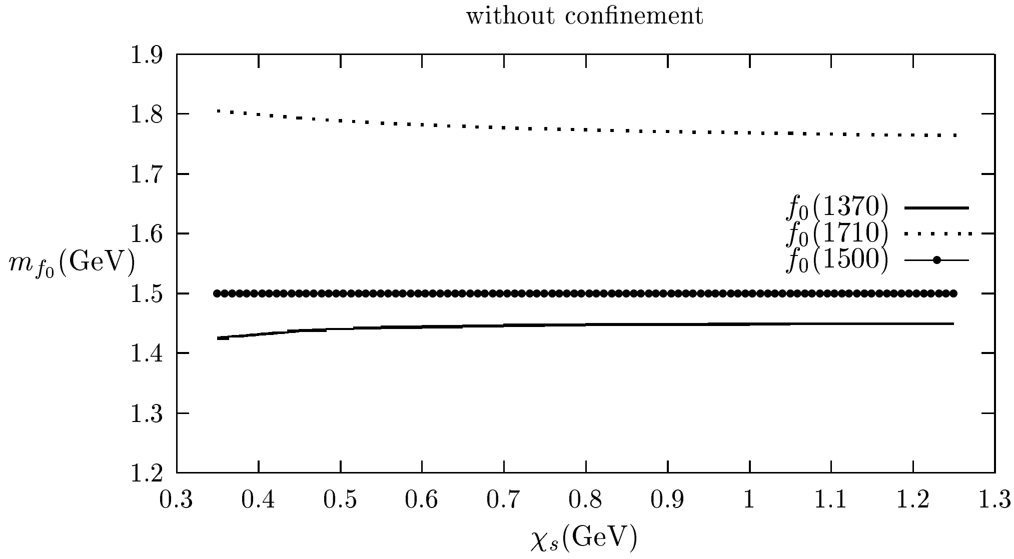

FIG. 2.1 – Masses des mésons scalaires isoscalaires, régularisation d^3k

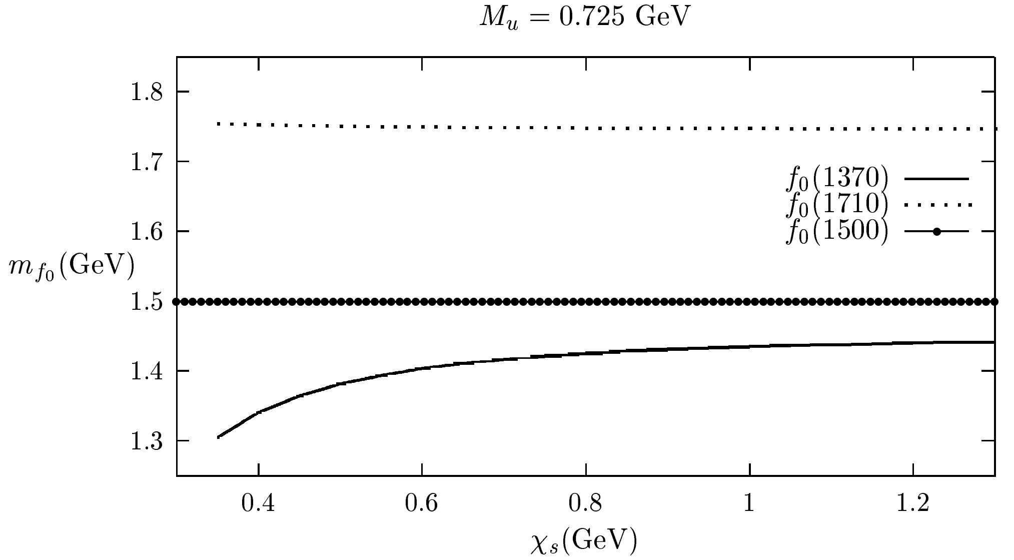

FIG. 2.2 – Masses des mésons scalaires isoscalaires, régularisation d^4k

L'évolution des constantes de couplage aux quarks du dilaton est donnée sur les graphiques 2.3 et 2.4, respectivement avec les régularisations d^3k et d^4k.

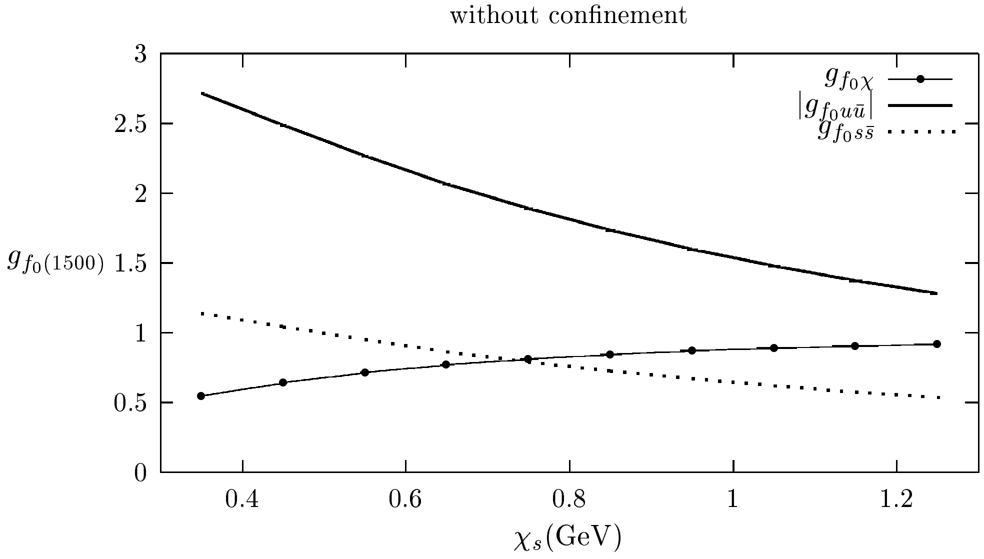

FIG. 2.3 – Constantes de couplage du dilaton (d^3k)

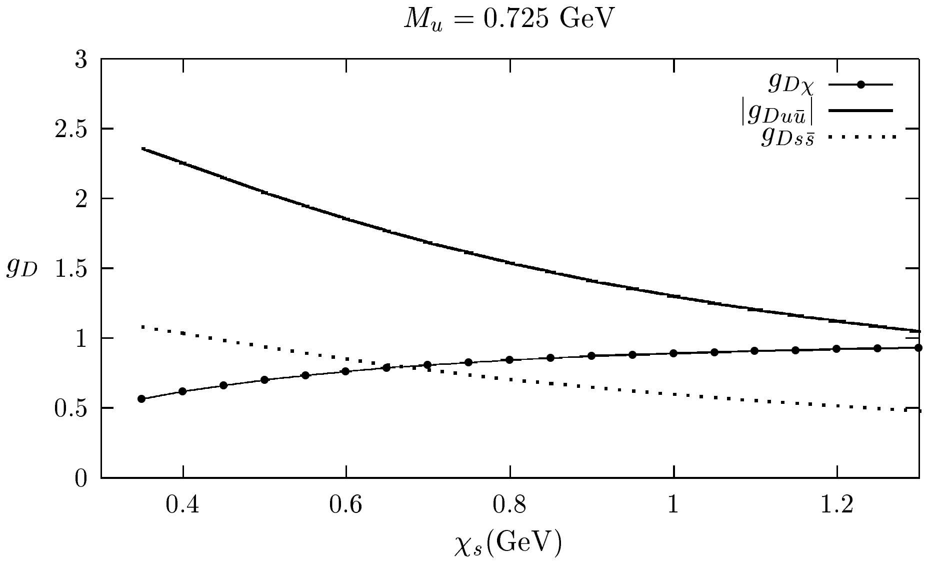

FIG. 2.4 – Constantes de couplage du dilaton (d^4k)

Nous observons une certaine stabilité des résultats, la régularisation d^3k donnant lieu à un couplage au quark u légèrement supérieur en module.

Nous montrons sur les figures 2.5 et 2.6 le comportement des constantes de couplage des isoscalaires $f_0(1370)$ et $f_0(1710)$ avec une régularisation d^3k. Nous ne représentons pas ici la régularisation d^4k, qui donne des résultats similaires. Par ailleurs, nous étudierons dans le chapitre 3 l'influence du confinement à partir de la régularisation d^3k.

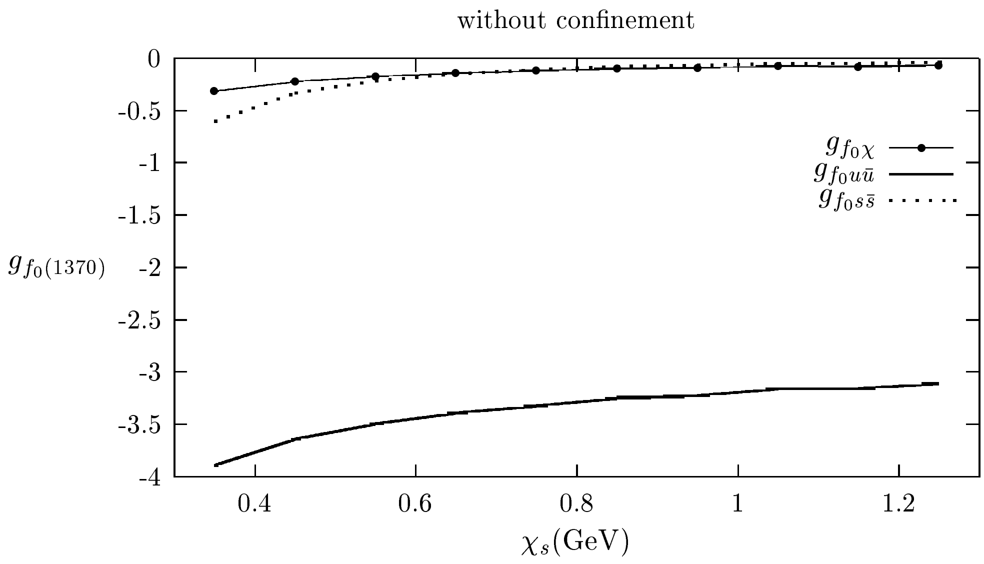

FIG. 2.5 – Constantes de couplage du $f_0(1370)$ (d^3k)

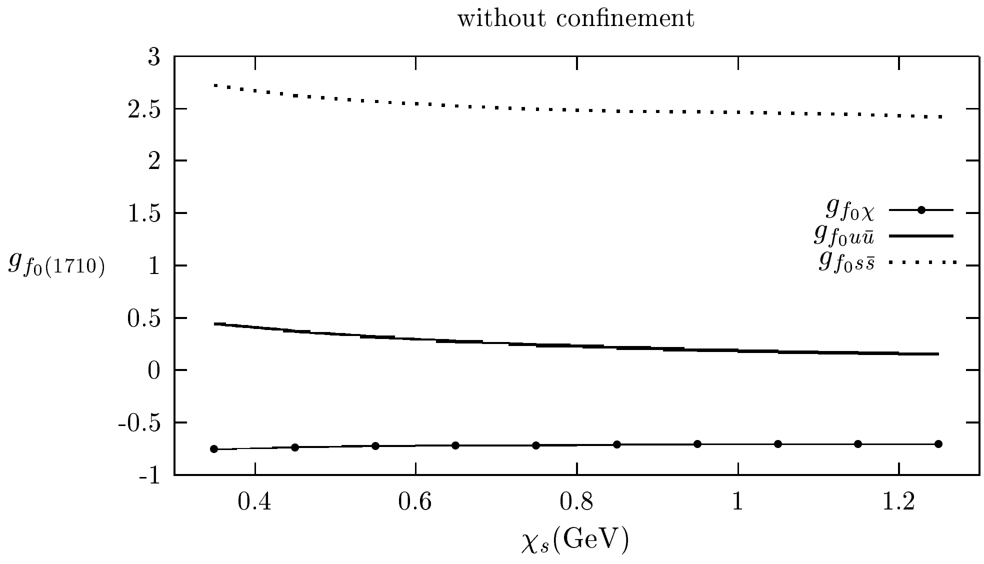

FIG. 2.6 – Constantes de couplage du $f_0(1710)$ (d^3k)

Dans la limite des grands χ_s, le couplage entre les trois isoscalaires se réduit, et $g_{Du\bar{u}}$ et $g_{Ds\bar{s}}$ tendent vers 0 (figure 2.3). Le glueball se découple alors complètement, et le $f_0(1370)$ et le $f_0(1710)$ deviennent de pures excitations $n\bar{n}$ et $s\bar{s}$, respectivement [85]. Nous pouvons effectivement voir sur les figures 2.5 et 2.6 que les couplages aux quarks $u\bar{u}$ et $s\bar{s}$ sont respectivement les plus grands en module pour les mésons $f_0(1370)$ et $f_0(1710)$, et qu'ils convergent à grand χ_s vers une valeur finie. Les autres couplages tendent vers 0 quand χ_s augmente.

2.6 Largeurs de désintégration

Dans la section 2.6.1, nous étudions les désintégrations fortes des mésons scalaires isoscalaires (avec une attention particulière pour la résonance $f_0(1500)$, associée au glueball) en deux mésons pseudo-scalaires. La section 2.6.2 est quant à elle dédiée au calcul des largeurs de désintégration électromagnétique du glueball et du pion, respectivement.

2.6.1 Désintégrations fortes

Les paires de mésons qui peuvent être le résultat de la désintégration forte sont $\pi\pi$, $K\bar{K}$, $\eta\eta$ et $\eta\eta'$. La désintégration du glueball en $\eta'\eta'$ est impossible car la somme des masses des mésons pseudo-scalaires excéderait la masse du méson incident. Les largeurs se calculent à partir des amplitudes de désintégration, qui s'obtiennent en développant l'action jusqu'au troisième ordre par rapport aux champs mésoniques correspondants, puis en passant aux champs physiques considérés en introduisant les couplages via les relations (2.98, 2.99, 2.100) pour les champs scalaires, et (2.116, 2.117, 2.112, 2.113, 2.114) pour les champs pseudo-scalaires. Deux contributions distinctes participent aux amplitudes, la contribution *directe* résultant du développement au troisième ordre par rapport aux champs des nonets scalaire et pseudo-scalaire, et la contribution *locale* qui provient du développement en $\tilde{\chi}$ des termes d'ordre inférieur [86]. Nous calculons ci-dessous les contributions *directes* à l'aide de deux méthodes distinctes, ce qui nous permettra de confronter les résultats. La première méthode consiste à développer l'action au troisième ordre dans les champs, tandis que la seconde méthode fait appel aux diagrammes de Feynman. Les contributions *locales* quant à elles s'obtiennent uniquement à partir du développement de l'action, et sont calculées dans la troisième sous-section. Enfin, les contributions *directes* et *locales* sont regroupées dans la dernière sous-section, où nous confrontons nos résultats avec les données expérimentales.

Développement direct de l'action au troisième ordre

Pour rappel, l'action effective (2.7) dans l'espace euclidien peut s'écrire de la façon suivante :

$$I_{eff} = -\mathrm{Tr}_{\Lambda\chi} \ln G_0^{-1} - \mathrm{Tr}_{\Lambda\chi} \ln (\mathbb{1} + G_0 \tilde{\varphi}^a \Gamma^a) + \int d^4x \, \frac{\chi^2}{4G_s} \, (\varphi_a^2 + \xi \pi_0^2) + \int d^4x \, \mathcal{L}_\chi, \quad (2.144)$$

où

$$\begin{aligned} G_0^{-1} &= -i\partial\!\!\!/ + m^0 + \varphi_a^s \Gamma^a = -i\partial\!\!\!/ + M, & (2.145)\\ \varphi^a \Gamma^a &= \sigma^a \lambda^a/\sqrt{2} + i\gamma_5 \pi^a \lambda^a/\sqrt{2}, & (2.146)\\ \varphi_a &= \varphi_a^s + \tilde{\varphi}_a \text{ (avec } \pi_a^s = 0). & (2.147)\end{aligned}$$

En développant le logarithme du deuxième terme, et en appliquant les développements de Taylor d'ordre approprié sur le champ χ, nous obtenons l'expression du troisième ordre de l'action :

$$\begin{aligned} I_{eff}^{(3)} &= -\frac{1}{3}\mathrm{Tr}_{\Lambda\chi_s}\left(G_0\tilde{\varphi}_a\Gamma^a\right)^3 + \int d^4x\ \frac{1}{4G_s}\left[2\chi_s\tilde{\chi}\left(\tilde{\varphi}_a^2 + \xi\tilde{\pi}_0^2\right)\right] \\ &+ \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial\chi}\mathrm{Tr}_{\Lambda\chi}\left(G_0\tilde{\varphi}_a\Gamma_a\right)^2\right\}_{\chi_s}\tilde{\chi} + \int d^4x\ \frac{1}{4G_s}\left(2\sigma_a^s\tilde{\chi}^2\tilde{\varphi}_a\right) \\ &- \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\chi^2}\mathrm{Tr}_{\Lambda\chi}\left(G_0\tilde{\varphi}_a\Gamma_a\right)\right\}_{\chi_s}\tilde{\chi}^2 - \frac{1}{3!}\left\{\frac{\partial^3}{\partial\chi^3}\mathrm{Tr}_{\Lambda\chi}\left(G_0^{-1}\right)\right\}_{\chi_s}\tilde{\chi}^3. \quad (2.148)\end{aligned}$$

Dans une étude des désintégrations d'un méson scalaire en deux mésons pseudo-scalaires, nous observons que seuls les trois premiers termes de (2.148) font intervenir les champs appropriés.

Dans un premier temps, nous nous intéressons au premier terme, dont les développements vont conduire aux contributions dites *directes* de l'amplitude. Comme nous le verrons plus loin, ces contributions peuvent être représentées par des diagrammes de Feynman triangulaires, qui permettent de les calculer plus rapidement. Si nous nous limitons aux composantes de ce terme qui conduisent à une interaction entre un champ scalaire et deux champs pseudo-scalaires, il nous reste

$$-\frac{1}{3}\mathrm{Tr}_{\Lambda\chi_s}\left(G_0\tilde{\varphi}_a\Gamma^a\right)^3 \to -\frac{1}{3}\times 3\times\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{Tr}\left[G_0\tilde{\sigma}_a\lambda_a G_0 i\gamma_5\tilde{\pi}_b\lambda_b G_0 i\gamma_5\tilde{\pi}_c\lambda_c\right], \qquad (2.149)$$

où le facteur 3 provient d'une propriété connue de la trace : $\mathrm{Tr}(\sigma\pi\pi) = \mathrm{Tr}(\pi\pi\sigma) = \mathrm{Tr}(\pi\sigma\pi)$. Il nous faut donc développer l'expression

$$-\mathrm{tr}\int dx < x|G_0\tilde{\sigma}_a\lambda_a G_0 i\gamma_5\tilde{\pi}_b\lambda_b G_0 i\gamma_5\tilde{\pi}_c\lambda_c|x >, \qquad (2.150)$$

où nous utilisons les conventions (2.12) que nous rappelons ici :

$$\mathrm{Tr}A = \mathrm{tr}\int d^4x < x|A|x >= \mathrm{tr}_c\mathrm{tr}_\gamma\mathrm{tr}_\lambda\int d^4x < x|A|x > . \qquad (2.151)$$

Notons que la trace sur la couleur libère simplement un facteur N_c car nous nous limitons au singulet de couleur.
Nous insérons dans (2.150) les relations de complétude (2.57, 2.58, 2.59) et nous obtenons,

en baptisant D_3 l'expression (2.150) :

$$\begin{aligned}
D_3 &= -\operatorname{tr}\int dx < x|G_0\tilde{\sigma}_a\lambda_a G_0 i\gamma_5\tilde{\pi}_b\lambda_b G_0 i\gamma_5\tilde{\pi}_c\lambda_c|x> \\
&= -\operatorname{tr}\iiint dx\ dy\ dz \iiint dk\ dk'\ dk'' < x|G_0|k>< k|\tilde{\sigma}_a\lambda_a|y>< y|G_0|k'> \\
&\qquad \times < k'|i\gamma_5\tilde{\pi}_b\lambda_b|z>< z|G_0|k''>< k''|i\gamma_5\tilde{\pi}_c\lambda_c|x> \\
&= -\operatorname{tr}\int \frac{dx\ dy\ dz}{(2\pi)^6}\int \frac{dk\ dk'\ dk''}{(2\pi)^6}\ G_0(k)\exp(ikx)\tilde{\sigma}_a(y)\lambda_a\exp(-iky)G_0(k')\exp(ik'y) \\
&\qquad \times i\gamma_5\tilde{\pi}_b(z)\lambda_b\exp(-ik'z)G_0(k'')\exp(ik''z)i\gamma_5\tilde{\pi}_c(x)\lambda_c\exp(-ik''x) \\
&= -\int \frac{dk\ dk'\ dk''}{(2\pi)^6}\operatorname{tr}\left[G_0(k)\lambda_a G_0(k')i\gamma_5\lambda_b G_0(k'')i\gamma_5\lambda_c\right] \\
&\quad \times \int \frac{dx\ dy\ dz}{(2\pi)^6}\ \tilde{\sigma}_a(y)\exp(-i(k-k')y)\tilde{\pi}_b(z)\exp(-i(k'-k'')z) \\
&\qquad \times \tilde{\pi}_c(x)\exp(-i(k''-k)x). \qquad (2.152)
\end{aligned}$$

Avec les conventions (2.60, 2.61) pour la transformée de Fourier, nous obtenons finalement, en posant $q = k - k'$ et $q' = k - k''$,

$$\begin{aligned}
D_3 &= -\int \frac{dk\ dq\ dq'}{(2\pi)^6}\operatorname{tr}\left[G_0(k)\tilde{\sigma}_a(q)\lambda_a G_0(k-q)i\gamma_5\tilde{\pi}_b(q'-q)\lambda_b\right. \\
&\qquad \left.\times\ G_0(k-q')i\gamma_5\tilde{\pi}_c(-q')\lambda_c\right]. \qquad (2.153)
\end{aligned}$$

Signalons à titre d'information que cette expression correspond au diagramme de Feynman suivant (voir section suivante pour plus de détails sur les diagrammes de Feynman) :

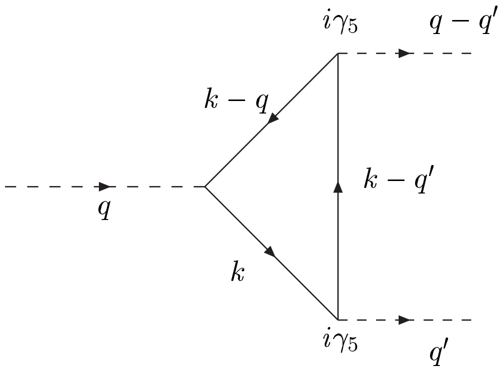

FIG. 2.7 – Diagramme de Feynman

Les impulsions des champs dans (2.153) correspondent aux impulsions pénétrant dans le diagramme, d'où l'inversion par rapport au schéma 2.7 du signe des impulsions des mésons pseudo-scalaires. En considérant que le temps progresse vers la droite, le schéma illustre

la désintégration du méson scalaire en un quark et un antiquark qui vont se recombiner pour donner deux mésons pseudo-scalaires. La flèche qui remonte le temps indique la propagation d'un antiquark, la progression d'une antiparticule correspondant à la propagation virtuelle de la particule associée qui se déplacerait à rebours dans le temps. Dans les diagrammes triangulaires tels que celui de la figure 2.7, nous noterons fréquemment q la quadri-impulsion du méson scalaire incident, notation qu'il ne faut pas confondre avec celle d'une ligne de quark (notée u ou s). Dans nos conventions, les lignes pleines se rapportent à des lignes de quark, tandis que les lignes discontinues représentent la propagation des mésons.
Nous développons l'expression (2.153) en calculant dans un premier temps la trace dans l'espace des saveurs $SU(3)_F$. En métrique euclidienne, la matrice des propagateurs fermioniques est donnée par (2.44), tandis que la matrice du nonet scalaire est donnée en (2.62). Nous rappelons ici son expression, en explicitant les notations :

$$\sigma_a\lambda_a = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 + a_0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_8 & \sqrt{2}a_0^+ & \sqrt{2}K^{*,+} \\ \sqrt{2}a_0^- & \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 - a_0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_8 & \sqrt{2}K_0^* \\ \sqrt{2}K^{*,-} & \sqrt{2}\bar{K}_0^* & \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 - \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_8 \end{pmatrix}, \tag{2.154}$$

avec

$$\begin{aligned} a_0^\pm &= (\sigma_1 \mp i\sigma_2)/\sqrt{2}, \\ a_0 &= \sigma_3, \\ K^{*,\pm} &= (\sigma_4 \mp i\sigma_5)/\sqrt{2}, \\ K_0^* &= (\sigma_6 - i\sigma_7)/\sqrt{2}, \\ \bar{K}_0^* &= (\sigma_6 + i\sigma_7)/\sqrt{2}. \end{aligned}$$

La partie pseudo-scalaire s'écrit quant à elle :

$$\pi_a\lambda_a = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}}\pi_0 + \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\pi_8 & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & \sqrt{\frac{2}{3}}\pi_0 - \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\pi_8 & \sqrt{2}K_0 \\ \sqrt{2}K^- & \sqrt{2}\bar{K}_0 & \sqrt{\frac{2}{3}}\pi_0 - \frac{2}{\sqrt{3}}\pi_8 \end{pmatrix}, \tag{2.155}$$

avec

$$\begin{aligned} \pi^\pm &= (\pi_1 \mp i\pi_2)/\sqrt{2}, \\ \pi^0 &= \pi_3, \\ K^\pm &= (\pi_4 \mp i\pi_5)/\sqrt{2}, \\ K_0 &= (\pi_6 - i\pi_7)/\sqrt{2}, \\ \bar{K}_0 &= (\pi_6 + i\pi_7)/\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Les représentations matricielles des champs du nonet $SU(3)_F$ sont reprises dans l'annexe B.5.

Nous nous limitons ici à l'étude des désintégrations des scalaires isoscalaires (qui constituent un triplet hybride avec le glueball), aussi pouvons-nous simplement considérer la matrice scalaire

$$[\sigma_a\lambda_a]_{iso} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_8 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_8 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 - \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_8 \end{pmatrix}. \tag{2.156}$$

Le résultat du produit de matrices diagonales $G_0\sigma_a\lambda_a$ sera donc une matrice diagonale dans l'espace des saveurs, notée $\mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3)$. Pour un terme d'interaction de la forme $\mathrm{tr}_\lambda\,[\mathrm{diag}(a_1,a_2,a_3)AB] = \sum_i a_i(AB)_{ii}$, nous n'avons donc besoin que des éléments diagonaux de la matrice $(AB) = (G_0 i\gamma_5\tilde{\pi}_a\lambda_a)(G_0 i\gamma_5\tilde{\pi}_b\lambda_b)$. Le terme d'interaction qui nous intéresse est donc

$$\begin{aligned}
&-\frac{N_c}{2\sqrt{2}}\int\frac{dk\;dq\;dq'}{(2\pi)^6}\,\mathrm{tr}_\gamma\Bigg[g_u(k)\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\tilde{\sigma}_0(q)+\frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{\sigma}_8(q)\right)\times\Bigg\{g_u(k-q)i\gamma_5 g_u(k-q')i\gamma_5\\
&\times\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\tilde{\eta}_0(q'-q)+\tilde{\pi}^0(q'-q)+\frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{\eta}_8(q'-q)\right)\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\tilde{\eta}_0(-q')+\tilde{\pi}^0(-q')+\frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{\eta}_8(-q')\right)\\
&+g_u(k-q)i\gamma_5 g_d(k-q')i\gamma_5(\sqrt{2})^2\tilde{\pi}^+(q'-q)\tilde{\pi}^-(-q')\\
&+g_u(k-q)i\gamma_5 g_s(k-q')i\gamma_5(\sqrt{2})^2K^+(q'-q)K^-(-q')\Bigg\}\\
&+g_d(k)\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\tilde{\sigma}_0(q)+\frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{\sigma}_8(q)\right)\times\Bigg\{g_d(k-q)i\gamma_5 g_d(k-q')i\gamma_5\\
&\times\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\tilde{\eta}_0(q'-q)-\tilde{\pi}^0(q'-q)+\frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{\eta}_8(q'-q)\right)\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\tilde{\eta}_0(-q')-\tilde{\pi}^0(-q')+\frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{\eta}_8(-q')\right)\\
&+g_d(k-q)i\gamma_5 g_u(k-q')i\gamma_5(\sqrt{2})^2\tilde{\pi}^-(q'-q)\tilde{\pi}^+(-q')\\
&+g_d(k-q)i\gamma_5 g_s(k-q')i\gamma_5(\sqrt{2})^2K_0(q'-q)\bar{K}_0(-q')\Bigg\}\\
&+g_s(k)\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\tilde{\sigma}_0(q)-\frac{2}{\sqrt{3}}\tilde{\sigma}_8(q)\right)\times\Bigg\{g_s(k-q)i\gamma_5 g_s(k-q')i\gamma_5\\
&\times\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\tilde{\eta}_0(q'-q)-\frac{2}{\sqrt{3}}\tilde{\eta}_8(q'-q)\right)\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\tilde{\eta}_0(-q')-\frac{2}{\sqrt{3}}\tilde{\eta}_8(-q')\right)\\
&+g_s(k-q)i\gamma_5 g_u(k-q')i\gamma_5(\sqrt{2})^2K^-(q'-q)K^+(-q')\\
&+g_s(k-q)i\gamma_5 g_d(k-q')i\gamma_5(\sqrt{2})^2\bar{K}_0(q'-q)K_0(-q')\Bigg\}\Bigg].
\end{aligned} \tag{2.157}$$

Ce développement permet de décrire les désintégrations $\sigma \to \pi^+\pi^-$, K^+K^-, $K_0\bar{K}_0$, $\eta\eta$, $\eta'\eta'$, $\eta\eta'$, $\pi^0\pi^0$. Nous verrons dans la suite que les désintégrations $\sigma \to \pi^0\eta$, $\pi^0\eta'$ ne donnent

pas de contribution dans le cadre de la symétrie d'isospin $M_u = M_d$, que nous adoptons ici.
Grâce aux relations (2.98, 2.99, 2.100) et (2.116, 2.117), nous substituons les champs isoscalaires par les champs physiques, à la fois dans les secteurs scalaires et pseudo-scalaires. De façon concise, nous rappelons ces équations, en notant cette fois V_s la matrice des vecteurs propres du secteur scalaire isoscalaire, et V_{ps} celle du secteur pseudo-scalaire :

$$\sigma = V_s(-m_\Phi^2) g_\Phi(-m_\Phi^2)\Phi, \tag{2.158}$$

$$\pi = V_{ps}(-m_{\Sigma_\eta}^2) g_\Sigma(-m_{\Sigma_\eta}^2)\Sigma_\eta, \tag{2.159}$$

avec les constantes de couplage nues regroupées dans les matrices diagonales (sans sommation sur i)

$$g_i(-m_i^2) = \sum_{k,l} g_{kl}^{-2}(q^2 = -m_i^2) V(-m_i^2)_{ki} V(-m_i^2)_{li}, \tag{2.160}$$

où $g_{kl}^{-2} = \partial/\partial q^2 \left(S_{kl}^{-1}\right)$, S^{-1} désignant la matrice des propagateurs inverses.
En introduisant les constantes de couplage aux quarks définies en (2.106, 2.107) ainsi qu'en (2.118-2.121), nous obtenons, avec $q\bar{q} = u\bar{u}$ ou $d\bar{d}$,

$$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 + \sqrt{\frac{1}{3}}\sigma_8\right) = g_{Iq\bar{q}}\Phi_I + g_{IIq\bar{q}}\Phi_{II} + g_{Dq\bar{q}}\Phi_D \tag{2.161}$$

$$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 - \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_8\right) = \sqrt{2}\left[g_{Is\bar{s}}\Phi_I + g_{IIs\bar{s}}\Phi_{II} + g_{Ds\bar{s}}\Phi_D\right] \tag{2.162}$$

et

$$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\pi_0 + \sqrt{\frac{1}{3}}\pi_8\right) = g_{\eta q\bar{q}}\eta + g_{\eta' q\bar{q}}\eta' \tag{2.163}$$

$$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\pi_0 - \frac{2}{\sqrt{3}}\pi_8\right) = \sqrt{2}\left(g_{\eta s\bar{s}}\eta + g_{\eta' s\bar{s}}\eta'\right). \tag{2.164}$$

Nous pouvons maintenant écrire tous les termes d'interaction (2.157) sous une forme élégante, à partir de laquelle nous allons identifier les différents processus de désintégration. En définissant

$$I_{abc} = \mathrm{tr}_\gamma\left[g_a(k) g_b(k-q) i\gamma_5 g_c(k-q') i\gamma_5\right] \quad , \quad a,b,c = u,d,s \tag{2.165}$$

et en se rappelant les constantes de couplage des pions et kaons (2.112-2.114), nous avons ainsi les expressions suivantes, relatives à un des trois scalaires isoscalaires, noté f_0. En posant par ailleurs $\hat{I} = -N_c \int \frac{dk\ dq\ dq'}{(2\pi)^6}$, nous écrivons :

$f_0 \to \pi^+\pi^-$

$$\hat{I} f_0(q) g_{\pi u\bar{d}} g_{\pi d\bar{u}} (\sqrt{2})^2 \left[g_{fu\bar{u}} I_{uud} \pi^+(q'-q)\pi^-(-q') + g_{fd\bar{d}} I_{ddu} \pi^-(q'-q)\pi^+(-q')\right] \tag{2.166}$$

$f_0 \to K^+K^-$

$$\hat{I} f_0(q) g_{Ku\bar{s}} g_{Ks\bar{u}} (\sqrt{2})^2 \left[g_{fu\bar{u}} I_{uus} K^+(q'-q) K^-(-q') + (\sqrt{2} g_{fs\bar{s}}) I_{ssu} K^-(q'-q) K^+(-q') \right] \tag{2.167}$$

$f_0 \to K_0 \bar{K}_0$

$$\hat{I} f_0(q) g_{Kd\bar{s}} g_{Ks\bar{d}} (\sqrt{2})^2 \left[g_{fd\bar{d}} I_{dds} K_0(q'-q) \bar{K}_0(-q') + (\sqrt{2} g_{fs\bar{s}}) I_{ssd} \bar{K}_0(q'-q) K_0(-q') \right] \tag{2.168}$$

$f_0 \to \eta\eta$

$$\hat{I} f_0(q) \left[(g_{\eta u\bar{u}})^2 g_{fu\bar{u}} I_{uuu} + (g_{\eta d\bar{d}})^2 g_{fd\bar{d}} I_{ddd} + (\sqrt{2} g_{\eta s\bar{s}})^2 (\sqrt{2} g_{fs\bar{s}}) I_{sss} \right] \eta(q'-q) \eta(-q') \tag{2.169}$$

$f_0 \to \eta'\eta'$

$$\hat{I} f_0(q) \left[(g_{\eta' u\bar{u}})^2 g_{fu\bar{u}} I_{uuu} + (g_{\eta' d\bar{d}})^2 g_{fd\bar{d}} I_{ddd} + (\sqrt{2} g_{\eta' s\bar{s}})^2 (\sqrt{2} g_{fs\bar{s}}) I_{sss} \right] \eta'(q'-q) \eta'(-q') \tag{2.170}$$

$f_0 \to \pi^0\pi^0$

$$\hat{I} f_0(q) \left[(g_{\pi u\bar{u}})^2 g_{fu\bar{u}} I_{uuu} + (g_{\pi d\bar{d}})^2 g_{fd\bar{d}} I_{ddd} \right] \pi^0(q'-q) \pi^0(-q') \tag{2.171}$$

$f_0 \to \eta\eta'$

$$\begin{aligned} &\hat{I} f_0(q) \left[g_{fu\bar{u}} g_{\eta u\bar{u}} g_{\eta' u\bar{u}} I_{uuu} + g_{fd\bar{d}} g_{\eta d\bar{d}} g_{\eta' d\bar{d}} I_{ddd} + (\sqrt{2} g_{fs\bar{s}})(\sqrt{2} g_{\eta s\bar{s}})(\sqrt{2} g_{\eta' s\bar{s}}) I_{sss} \right] \\ &\quad \times \left[\eta(q'-q) \eta'(-q') + \eta'(q'-q) \eta(-q') \right] \end{aligned} \tag{2.172}$$

$f_0 \to \pi^0\eta$

$$\hat{I} f_0(q) \left[g_{fu\bar{u}} g_{\eta u\bar{u}} g_{\pi^0 u\bar{u}} I_{uuu} - g_{fd\bar{d}} g_{\eta d\bar{d}} g_{\pi^0 d\bar{d}} I_{ddd} \right] \left[\eta(q'-q) \pi^0(-q') + \pi^0(q'-q) \eta(-q') \right] \tag{2.173}$$

$f_0 \to \pi^0\eta'$

$$\hat{I} f_0(q) \left[g_{fu\bar{u}} g_{\eta' u\bar{u}} g_{\pi_0 u\bar{u}} I_{uuu} - g_{fd\bar{d}} g_{\eta' d\bar{d}} g_{\pi_0 d\bar{d}} I_{ddd} \right] \left[\eta'(q'-q) \pi^0(-q') + \pi^0(q'-q) \eta'(-q') \right] \tag{2.174}$$

Dans la limite de symétrie d'isospin, il apparaît immédiatement que les deux derniers termes disparaissent. Dans cette limite, les pions constituent un triplet dégénéré de particules de masse identique, tandis que tous les kaons présentent également la même masse. Il nous reste alors :

$f_0 \to \pi^+\pi^-$

$$\hat{I} f_0(q) g_{fu\bar{u}} (g_{\pi u\bar{u}})^2 (\sqrt{2})^2 I_{uuu} \left[\pi^+(q'-q) \pi^-(-q') + \pi^-(q'-q) \pi^+(-q') \right] \tag{2.175}$$

$f_0 \to \pi^0\pi^0$

$$\hat{I}f_0(q)2(g_{\pi u\bar{u}})^2 g_{fu\bar{u}} I_{uuu}\pi^0(q'-q)\pi^0(-q') \tag{2.176}$$

$f_0 \to K^+K^-$

$$\hat{I}f_0(q)(g_{Ku\bar{s}})^2(\sqrt{2})^2\left[g_{fu\bar{u}}I_{uus}K^+(q'-q)K^-(-q')+(\sqrt{2}g_{fs\bar{s}})I_{ssu}K^-(q'-q)K^+(-q')\right] \tag{2.177}$$

$f_0 \to K_0\bar{K}_0$

$$\hat{I}f_0(q)(g_{Ku\bar{s}})^2(\sqrt{2})^2\left[g_{fu\bar{u}}I_{uus}K_0(q'-q)\bar{K}_0(-q')+(\sqrt{2}g_{fs\bar{s}})I_{ssu}\bar{K}_0(q'-q)K_0(-q')\right] \tag{2.178}$$

$f_0 \to \eta\eta$

$$\hat{I}f_0(q)\left[2(g_{\eta u\bar{u}})^2 g_{fu\bar{u}}I_{uuu}+(\sqrt{2}g_{\eta s\bar{s}})^2(\sqrt{2}g_{fs\bar{s}})I_{sss}\right]\eta(q'-q)\eta(-q') \tag{2.179}$$

$f_0 \to \eta'\eta'$

$$\hat{I}f_0(q)\left[2(g_{\eta' u\bar{u}})^2 g_{fu\bar{u}}I_{uuu}+(\sqrt{2}g_{\eta' s\bar{s}})^2(\sqrt{2}g_{fs\bar{s}})I_{sss}\right]\eta'(q'-q)\eta'(-q') \tag{2.180}$$

$f_0 \to \eta\eta'$

$$\begin{aligned}\hat{I}f_0(q)&\left[2g_{fu\bar{u}}g_{\eta u\bar{u}}g_{\eta' u\bar{u}}I_{uuu}+(\sqrt{2}g_{fs\bar{s}})(\sqrt{2}g_{\eta s\bar{s}})(\sqrt{2}g_{\eta' s\bar{s}})I_{sss}\right]\\ &\times\left[\eta(q'-q)\eta'(-q')+\eta'(q'-q)\eta(-q')\right]\end{aligned} \tag{2.181}$$

Ces termes d'interaction du troisième ordre relatifs aux champs mésoniques que nous voulons étudier vont nous permettre de déduire les expressions des amplitudes de désintégration à partir du calcul des éléments de la matrice S (à ne pas confondre avec les matrices de propagateurs inverses S^{-1}). Ces éléments s'obtiennent en réalisant une expansion de S jusqu'au premier ordre pour la partie scalaire, et jusqu'au deuxième ordre pour la partie pseudo-scalaire. La matrice S est donnée d'une façon générale par :

$$\begin{aligned}&S(J_0,\phi_0;J,J^*,\phi,\phi^*;\eta,\bar{\eta},\psi,\bar{\psi}) \quad \equiv \\ &\exp\Big[\int dx\Big\{\phi_0^{i/o}\vec{K}\frac{\delta}{\delta J}+\phi^{i/o}\vec{K}'\frac{\delta}{\delta J}+\phi^{*,i/o}\vec{K}'\frac{\delta}{\delta J^*}\\ &\qquad +\bar{\psi}^{i/o}\vec{D}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}}-\frac{\delta}{\delta\eta}\overleftarrow{\bar{D}}\,\psi^{i/o}\Big\}\Big]\mathcal{Z}[J_0,J,J^*,\eta,\bar{\eta}],\end{aligned} \tag{2.182}$$

où

$K=\Box+m_m^2, D=i\partial\!\!\!/-m_f, \bar{D}=-i\partial\!\!\!/-m_f$ (m_m = masse du méson, m_f = masse du fermion),

et K' est identique à K dans la limite de symétrie d'isospin. Les grandeurs notées J_0, J, J^*, η et $\bar{\eta}$ sont les sources associées respectivement aux champs bosoniques neutres, aux

champs bosoniques chargés, et aux champs de fermions. Ces sources devront être annulées à la fin des développements. Les champs de bosons $\phi_0^{i/o}, \phi^{i/o}, \phi^{*,i/o}$ ainsi que les champs de fermions $\psi^{i/o}, \bar{\psi}^{i/o}$ portent l'indice i ou o selon qu'ils se rapportent à une particule entrante ou sortante. Les flèches vers la droite au-dessus des différents opérateurs indiquent une dérivation à droite portant sur la fonctionnelle génératrice $\mathcal{Z}$, tandis que $\overleftarrow{\bar{D}}$ est une dérivation à gauche, portant également sur $\mathcal{Z}$ [109].
La fonctionnelle génératrice $\mathcal{Z}$ des fonctions de Green est définie comme suit dans une expansion dérivative :

$$\mathcal{Z}[J_0, J, J^*, \eta, \bar{\eta}] = \exp\left[i \int dx\ \mathcal{L}_{int}(-i\frac{\delta}{\delta J_0}, -i\frac{\delta}{\delta J}, -i\frac{\delta}{\delta J^*}, -i\frac{\delta}{\delta \eta}, -i\frac{\delta}{\delta \bar{\eta}})\right] \mathcal{Z}_0[J_0, J, J^*, \eta, \bar{\eta}], \tag{2.183}$$

où $\mathcal{Z}_0$ est la partie du champ libre. A une constante près, elle est donnée par

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_0[J_0, J, J^*, \eta, \bar{\eta}] &= \exp\Big[-\frac{i}{2}\int J_0(x)\Delta_F(x-y)J_0(y)dxdy \\ &\quad -i\int J^*(x)\Delta_F(x-y)J(y)dxdy \\ &\quad -i\int \bar{\eta}(x)S(x-y)\eta(y)dxdy\Big],\end{aligned} \tag{2.184}$$

avec $\Delta_F(x) = -(\Box + m^2 - i\epsilon)^{-1}, S(x) = (i\partial\!\!\!/ + m)\Delta_F(x)$, où nous avons supprimé les indices de masse (boson ou fermion).
L'expansion au premier ordre de l'exponentielle de (2.182) pour la partie scalaire nous conduit à l'évaluation de

$$< 0| : 1 + \int dx f_0 K_{f_0}(x)\frac{\delta}{\delta J_0} : |f_0(q_1) > \tag{2.185}$$

simultanément avec l'expansion au second ordre pour la partie pseudo-scalaire

$$\begin{aligned}< 0| : 1 &+ \int dx\phi_0(x)K_0(x)\frac{\delta}{\delta J_0}(x) + \int dx\phi^*(x)K(x)\frac{\delta}{\delta J^*}(x) + \int dx\phi(x)K(x)\frac{\delta}{\delta J}(x) \\ &+ \frac{1}{2!}\int dx \int dy \left[\phi_0(x)K_0(x)\frac{\delta}{\delta J_0}(x) + \phi^*(x)K(x)\frac{\delta}{\delta J^*}(x) + \phi(x)K(x)\frac{\delta}{\delta J}(x)\right] \\ &\times \left[\phi_0(y)K_0(y)\frac{\delta}{\delta J_0}(y) + \phi^*(y)K(y)\frac{\delta}{\delta J^*}(y) + \phi(y)K(y)\frac{\delta}{\delta J}(y)\right] : |\phi\phi >,\end{aligned} \tag{2.186}$$

où $\phi_0, \phi, \phi^*, \frac{\delta}{\delta J_0}, \frac{\delta}{\delta J}, \frac{\delta}{\delta J^*}$ sont des vecteurs et K_0, K sont des matrices dans l'espace des mésons. Nous devons évaluer ces opérateurs en fonction des champs qui nous intéressent (qui conduisent à des processus physiques dans la limite d'isospin), et les appliquer sur $\mathcal{Z}[j]$ pour obtenir les éléments de la matrice S. Dans l'espace euclidien, nous avons, en considérant les termes d'interaction du troisième ordre obtenus plus haut,

$$\mathcal{Z}[j] \equiv \exp(-I_{eff}^{(3)})\mathcal{Z}_0[J] \to \left(1 - I_{eff}^{(3)}(-\delta/\delta J)\right) \mathcal{Z}_0[J]. \tag{2.187}$$

Nous n'avons besoin ici que du premier ordre de la théorie des perturbations étant donné que le terme d'interaction est déjà du troisième ordre. En appliquant les opérateurs (2.185) et (2.186) sur (2.187), et en prenant la limite $J \to 0$, nous calculons les amplitudes directes de désintégration identifiées aux éléments de la matrice S. Après une renormalisation faisant disparaître $\mathcal{Z}_0[0]$, nous obtenons les amplitudes de la forme

$$< \phi\phi|S|f_0 > . \tag{2.188}$$

En particularisant aux différents mésons pseudo-scalaires, et en posant

$$G_{abc}(q,q') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, I_{abc} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \mathrm{tr}_\gamma\Big(g_a(k+q')g_b(k-q+q')i\gamma_5 g_c(k)i\gamma_5\Big), \tag{2.189}$$

nous écrivons les différentes amplitudes de désintégration :

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{(t)}_{f_0\pi^0\pi^0} &= -2\left[2N_c g_{f_0u\bar u}(g_{\pi u\bar u})^2 G_{uuu}(q,q_\pi)\right], && (2.190)\\
\mathcal{T}^{(t)}_{f_0\eta\eta} &= -2\Big[2N_c g_{f_0u\bar u}(g_{\eta u\bar u})^2 G_{uuu}(q,q_\eta) \\
&\quad + N_c(\sqrt{2}g_{f_0s\bar s})(\sqrt{2}g_{\eta s\bar s})^2 G_{sss}(q,q_\eta)\Big], && (2.191)\\
\mathcal{T}^{(t)}_{f_0\eta'\eta'} &= -2\Big[2N_c g_{f_0u\bar u}(g_{\eta' u\bar u})^2 G_{uuu}(q,q_{\eta'}) \\
&\quad + N_c(\sqrt{2}g_{f_0s\bar s})(\sqrt{2}g_{\eta' s\bar s})^2 G_{sss}(q,q_{\eta'})\Big], && (2.192)\\
\mathcal{T}^{(t)}_{f_0\eta\eta'} &= -\Big(2N_c g_{f_0u\bar u}g_{\eta u\bar u}g_{\eta' u\bar u}\left[G_{uuu}(q,q_\eta)+G_{uuu}(q,q_{\eta'})\right] \\
&\quad + N_c(\sqrt{2}g_{f_0s\bar s})(\sqrt{2}g_{\eta s\bar s})(\sqrt{2}g_{\eta' s\bar s})\left[G_{sss}(q,q_\eta)+G_{sss}(q,q_{\eta'})\right]\Big), && (2.193)\\
\mathcal{T}^{(t)}_{f_0\pi^+\pi^-} &= -N_c g_{f_0u\bar u}(g_{\pi u\bar u})^2(\sqrt{2})^2\left[G_{uuu}(q,q_\pi)+G_{ddd}(q,q_\pi)\right], && (2.194)\\
\mathcal{T}^{(t)}_{f_0K^+K^-} &= -N_c(\sqrt{2}g_{Ku\bar s})^2\left[g_{f_0u\bar u}G_{uus}(q,q_{K^+})+(\sqrt{2}g_{f_0s\bar s})G_{ssu}(q,q_{K^-})\right], && (2.195)\\
\mathcal{T}^{(t)}_{f_0K_0\bar K_0} &= -N_c(\sqrt{2}g_{K_0d\bar s})^2\left[g_{f_0u\bar u}G_{dds}(q,q_{K_0})+(\sqrt{2}g_{f_0s\bar s})G_{ssd}(q,q_{\bar K_0})\right]. && (2.196)
\end{aligned}$$

D'un point de vue diagrammatique, ces expressions s'obtiennent facilement à partir de la figure 2.7 via le changement de variable $k \to k + q'$, qui donne le diagramme de la figure 2.8 :

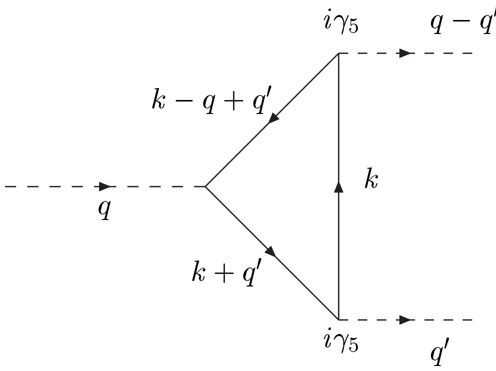

FIG. 2.8 – Changement de variable

Ces expressions présentent une correspondance directe avec celles que nous aurions obtenues à l'aide de la méthode des diagrammes de Feynman (voir plus loin). Par exemple, dans l'expression relative aux pseudo-scalaires $\pi^+\pi^-$, nous observons la contribution de deux diagrammes, l'un constitué de deux quarks up et l'autre de deux quarks down, qui sont égaux en imposant la symétrie d'isospin. D'une façon générale, les désintégrations dont émergent deux particules identiques (c'est-à-dire de mêmes nombres quantiques) donnent lieu à des contributions croisées (*cross diagram*) induisant un facteur 2, tandis que pour deux particules différentes, il faut simplement sommer les diagrammes directs (diagrammes *uud* et *ddu* dans le cas de $\pi^+\pi^-$ par exemple).
Les intégrales G_{abc} sont étudiées en détails dans l'annexe C. L'article [95] présente notamment une méthode de calcul originale, qui a été confrontée avec nos résultats pour vérifier leur validité numérique.

Méthode des diagrammes de Feynman

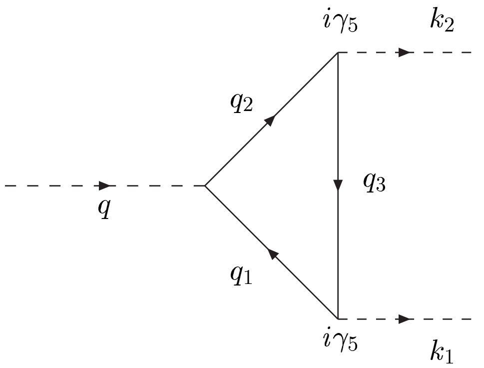

FIG. 2.9 – Désintégration d'un scalaire en deux pseudo-scalaires

La méthode des diagrammes de Feynman constitue une alternative intéressante pour calculer les amplitudes de désintégration. En nous limitant à la désintégration d'un méson scalaire isoscalaire en deux mésons pseudo-scalaires isoscalaires, nous écrivons l'expression suivante de l'amplitude correspondant au diagramme de la figure 2.9 :

$$\mathcal{T} = \mathrm{Tr}\left[\left[\sigma_0\lambda^0 + \sigma_8\lambda^8\right] G_0(q_1) i\gamma_5 \left[\pi_0\lambda^0 + \pi_8\lambda^8\right] G_0(q_3) i\gamma_5 \left[\pi_0\lambda^0 + \pi_8\lambda^8\right] G_0(q_2)\right], \quad (2.197)$$

où la matrice G_0 est la matrice de propagateurs fermioniques donnée en (2.44). Nous pouvons facilement vérifier que la boucle triangulaire dans l'expression (2.189) correspond à la figure 2.9 si nous posons $q_2 = k$, $q_3 = k - q'$, $q_1 = k - q$ et $k_1 = q - q'$, $k_2 = q'$.
Nous substituons les champs isoscalaires par les champs physiques, grâce aux relations (2.98, 2.99) et (2.116, 2.117). Le calcul est simplifié ici car nous manipulerons uniquement des matrices diagonales dans l'espace de saveur. Nous posons

$$\pi_0\lambda^0 + \pi_8\lambda^8 = \begin{pmatrix} A_u & 0 & 0 \\ 0 & A_u & 0 \\ 0 & 0 & A_s \end{pmatrix}, \quad (2.198)$$

avec

$$\begin{aligned} A_u &= \sqrt{\frac{2}{3}}\left(D_{0\eta} g_\eta \eta + D_{0\eta'} g_{\eta'} \eta'\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(D_{8\eta} g_\eta \eta + D_{8\eta'} g_{\eta'} \eta'\right), \\ A_s &= \sqrt{\frac{2}{3}}\left(D_{0\eta} g_\eta \eta + D_{0\eta'} g_{\eta'} \eta'\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(D_{8\eta} g_\eta \eta + D_{8\eta'} g_{\eta'} \eta'\right). \end{aligned}$$

Le calcul de la boucle du diagramme de Feynman se ramène alors à

$$\mathcal{T} = \mathrm{Tr}\left[\left[\sigma_0\lambda^0 + \sigma_8\lambda^8\right] \begin{pmatrix} C_u & 0 & 0 \\ 0 & C_u & 0 \\ 0 & 0 & C_s \end{pmatrix}\right], \quad (2.199)$$

où

$$\begin{aligned} C_u &= \left[-\frac{\not{q}_1 - M_u}{q_1^2 + M_u^2}\right] i\gamma_5 \left[-\frac{\not{q}_3 - M_u}{q_3^2 + M_u^2}\right] i\gamma_5 \left[-\frac{\not{q}_2 - M_u}{q_3^2 + M_u^2}\right] A_u A_u, \\ C_s &= \left[-\frac{\not{q}_1 - M_s}{q_1^2 + M_s^2}\right] i\gamma_5 \left[-\frac{\not{q}_3 - M_s}{q_3^2 + M_s^2}\right] i\gamma_5 \left[-\frac{\not{q}_2 - M_s}{q_3^2 + M_s^2}\right] A_s A_s. \end{aligned}$$

En développant la matrice diagonale C sur la base des matrices de Gell-Mann,

$$\begin{pmatrix} C_u & 0 & 0 \\ 0 & C_u & 0 \\ 0 & 0 & C_s \end{pmatrix} = \alpha_0\lambda^0 + \alpha_3\lambda^3 + \alpha_8\lambda^8,$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(2C_u + C_s), \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2}(C_u - C_u) = 0, \\ \alpha_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(C_u - C_s), \end{aligned} \quad (2.200)$$

nous obtenons à partir de (2.199), avec le calcul des traces dans l'espace de couleur (facteur N_c) et de saveur (tr $\lambda^a\lambda^b = 2\delta^{ab}$),

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} &= 2N_c\Big\{(V_{0I}g_I\Phi_I + V_{0II}g_{II}\Phi_{II} + V_{0D}g_D\Phi_D)\,\frac{1}{\sqrt{6}}\,(2G_{uuu}A_uA_u + G_{sss}A_sA_s)\,, \\
&\quad + (V_{8I}g_I\Phi_I + V_{8II}g_{II}\Phi_{II} + V_{8D}g_D\Phi_D)\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,(G_{uuu}A_uA_u - G_{sss}A_sA_s)\Big\},
\end{aligned}$$

où la fonction G_{abc} est donnée en (2.189).
Nous développons maintenant A_uA_u et A_sA_s afin de faire apparaître les couples de champs pseudo-scalaires :

$$\begin{aligned}
A_uA_u &= \frac{2}{3}\left(D_{0\eta}^2g_\eta^2\eta\eta + D_{0\eta'}^2g_{\eta'}^2\eta'\eta' + 2D_{0\eta}D_{0\eta'}g_\eta g_{\eta'}\eta\eta'\right) \\
&+ \frac{1}{3}\left(D_{8\eta}^2g_\eta^2\eta\eta + D_{8\eta'}^2g_{\eta'}^2\eta'\eta' + 2D_{8\eta}D_{8\eta'}g_\eta g_{\eta'}\eta\eta'\right) \\
&+ \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(D_{0\eta}D_{8\eta}g_\eta g_\eta\eta\eta + D_{0\eta'}D_{8\eta'}g_{\eta'}g_{\eta'}\eta'\eta' + (D_{0\eta}D_{8\eta'} + D_{0\eta'}D_{8\eta})g_\eta g_{\eta'}\eta\eta'\right), \\
A_sA_s &= \frac{2}{3}\left(D_{0\eta}^2g_\eta^2\eta\eta + D_{0\eta'}^2g_{\eta'}^2\eta'\eta' + 2D_{0\eta}D_{0\eta'}g_\eta g_{\eta'}\eta\eta'\right) \\
&+ \frac{4}{3}\left(D_{8\eta}^2g_\eta^2\eta\eta + D_{8\eta'}^2g_{\eta'}^2\eta'\eta' + 2D_{8\eta}D_{8\eta'}g_\eta g_{\eta'}\eta\eta'\right) \\
&- \frac{4\sqrt{2}}{3}\left(D_{0\eta}D_{8\eta}g_\eta g_\eta\eta\eta + D_{0\eta'}D_{8\eta'}g_{\eta'}g_{\eta'}\eta'\eta' + (D_{0\eta}D_{8\eta'} + D_{0\eta'}D_{8\eta})g_\eta g_{\eta'}\eta\eta'\right).
\end{aligned}$$

Les diverses amplitudes sont obtenues en identifiant les champs physiques correspondants. Nous nous concentrons ici sur la désintégration du glueball dans les mésons $\eta\eta$ et $\eta\eta'$, la désintégration en $\eta'\eta'$ étant proscrite car la masse du méson η' excède la moitié de celle du glueball. Nous regroupons les différents termes, et, en introduisant les constantes de couplage aux quarks (2.106, 2.107) et (2.118-2.121), nous obtenons finalement :

$$\mathcal{T}_{D\eta\eta} = -2N_c\left\{g_{f_0(1500)u\bar{u}}G_{uuu}g_{\eta u\bar{u}}^2 + \sqrt{2}g_{f_0(1500)s\bar{s}}G_{sss}g_{\eta s\bar{s}}^2\right\}, \tag{2.201}$$

$$\mathcal{T}_{D\eta\eta'} = -2N_c\left\{g_{f_0(1500)u\bar{u}}G_{uuu}g_{\eta u\bar{u}}g_{\eta' u\bar{u}} + 2\sqrt{2}g_{f_0(1500)s\bar{s}}G_{sss}g_{\eta s\bar{s}}g_{\eta' s\bar{s}}\right\}. \tag{2.202}$$

Nous constatons que pour retrouver les résultats (2.191, 2.193), nous devons multiplier par 2 le membre de droite de (2.201). Ce facteur 2 correspond au diagramme croisé, qui n'est pas pris en compte par le calcul direct du diagramme de Feynman dans le cas de particules identiques à la sortie de la désintégration.

Les amplitudes se rapportant aux pions et aux kaons se calculent de la même façon. Dans le cas de la désintégration $D \to \pi^0\pi^0$ (ne pas confondre l'isovecteur π^0 avec l'isoscalaire π_0), le diagramme de Feynman direct correspond à l'amplitude

$$\mathcal{T} = \mathrm{Tr}\Big[\left[\sigma_0\lambda^0 + \sigma_8\lambda^8\right]G_0(q_1)i\gamma_5\pi^0\lambda^3G_0(q_3)i\gamma_5\pi^0\lambda^3G_0(q_2)\Big], \tag{2.203}$$

avec les mêmes notations que ci-dessus. Nous avons donc

$$\mathcal{T} = \mathrm{Tr}\left[\left[\sigma_0\lambda^0 + \sigma_8\lambda^8\right]\begin{pmatrix} E_u & 0 & 0 \\ 0 & E_u & 0 \\ 0 & 0 & E_s \end{pmatrix}\right], \tag{2.204}$$

où

$$\begin{aligned} E_u &= \frac{\not{q}_1 - M_u}{q_1^2 + M_u^2}\gamma_5\frac{\not{q}_3 - M_u}{q_3^2 + M_u^2}\gamma_5\frac{\not{q}_2 - M_u}{q_3^2 + M_u^2}, \\ E_s &= \frac{\not{q}_1 - M_s}{q_1^2 + M_s^2}\gamma_5\frac{\not{q}_3 - M_s}{q_3^2 + M_s^2}\gamma_5\frac{\not{q}_2 - M_s}{q_3^2 + M_s^2}. \end{aligned}$$

Le calcul de la trace dans les différents espaces donne

$$\mathcal{T} = 2N_c\left(\sigma_0\sqrt{\frac{2}{3}}G_{uuu} + \sigma_8\frac{1}{\sqrt{3}}G_{uuu}\right). \tag{2.205}$$

En introduisant les champs physiques via (2.98, 2.99) et (2.112), et en ne conservant que les termes relatifs au dilaton, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{D\pi^0\pi^0} &= -2N_c g_{\pi u\bar{u}}\left(V_{0D}g_D\sqrt{\frac{2}{3}}G_{uuu} + V_{8D}g_D\frac{1}{\sqrt{3}}G_{uuu}\right) \\ &= 2N_c g_{\pi u\bar{u}}\left(V_{0D}\sqrt{\frac{2}{3}} + V_{8D}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)g_D G_{uuu} \\ &= 2N_c g_{\pi u\bar{u}} g_{Du\bar{u}} G_{uuu}. \end{aligned} \tag{2.206}$$

Encore une fois, pour inclure le diagramme croisé, il faut introduire un facteur 2, ce qui reproduit (2.190).

Nous vérifions facilement que le diagramme triangulaire représentant $D \to \pi^+\pi^-$ fournit également (2.206). De la même façon, on voit directement que des désintégrations telles que $D \to \pi^+\pi^0$ ou $D \to \pi^+\pi^+$ sont impossibles, en conformité avec la conservation de la charge.

Les diagrammes relatifs aux désintégrations des kaons font quant à eux intervenir des boucles triangulaires mixtes, comportant à la fois des lignes de quark u et s. Le diagramme direct pour la désintégration $D \to K\bar{K}$ est représenté par la figure 2.10.

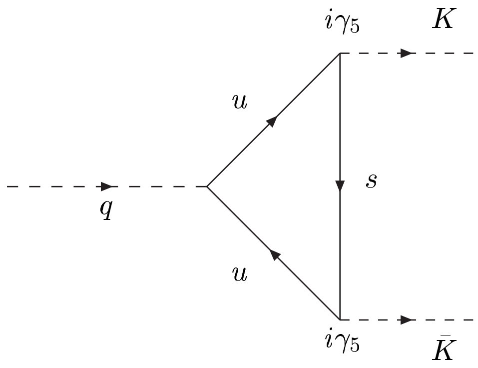

FIG. 2.10 – Désintégration d'un scalaire en deux kaons

L'amplitude correspondante s'écrit

$$\mathcal{T}_{DK\bar{K}} = \mathrm{Tr}\left[\left[\sigma_0\lambda^0 + \sigma_8\lambda^8\right] G_0(q_1) i\gamma_5 \bar{K}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lambda^6 + i\lambda^7\right) G_0(q_3) i\gamma_5 K \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lambda^6 - i\lambda^7\right) G_0(q_2)\right]. \tag{2.207}$$

Le produit des matrices de propagateurs et des matrices associées aux champs pseudo-scalaires donne dans l'espace de saveur :

$$G_0(q_1)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lambda^6 + i\lambda^7\right) G_0(q_3)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lambda^6 - i\lambda^7\right) G_0(q_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2g_u(q_1)g_s(q_3)g_u(q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En calculant les traces, nous obtenons

$$\mathcal{T}_{DK\bar{K}} = 2N_c\left[\sigma_0\frac{2}{\sqrt{6}}G_{usu} + \sigma_8\frac{1}{\sqrt{3}}G_{usu}\right]. \tag{2.208}$$

Enfin, le passage aux champs physiques fournit

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{DK\bar{K}} &= 2N_c\left[V_{0\chi}\sqrt{\frac{2}{3}} + V_{0\chi}\sqrt{\frac{1}{3}}\right] g_D g_{Ku\bar{s}} G_{usu} \\ &= 2N_c g_{Du\bar{u}} g_{Ku\bar{s}} G_{usu}. \end{aligned} \tag{2.209}$$

Le diagramme croisé correspond à la figure 2.11. Nous avons dans ce cas

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{D\bar{K}K} &= 2N_c\left[V_{0\chi}\sqrt{\frac{2}{3}} - V_{0\chi}\frac{2}{\sqrt{3}}\right] g_D g_{Ku\bar{s}} G_{sus} \\ &= 2\sqrt{2}N_c g_{Ds\bar{s}} g_{Ku\bar{s}} G_{sus}. \end{aligned} \tag{2.210}$$

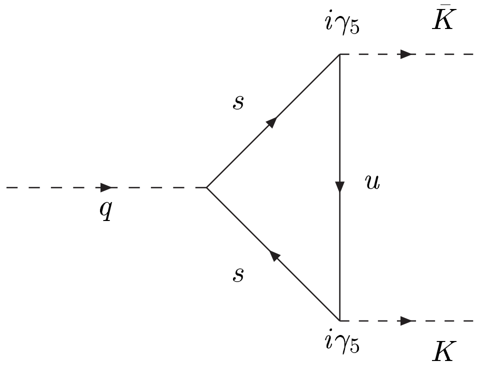

FIG. 2.11 – Désintégration d'un scalaire en deux kaons

En sommant les diagrammes direct (2.209) et croisé (2.210), nous retrouvons bien (2.196).

Contributions locales aux amplitudes de désintégration

En plus des contributions dites *directes* correspondant aux diagrammes de Feynman triangulaires, les amplitudes de désintégration comportent une composante associée à la désintégration *locale* de la composante en glu des mésons scalaires isoscalaires. Cette composante locale se calcule à partir des deuxième et troisième termes du membre de droite de (2.148). Le deuxième terme de (2.148) se rapporte à l'interaction à quatre quarks du modèle NJL, tandis que le troisième provient du développement en $\tilde{\chi}$ du terme du second ordre rendu invariant d'échelle grâce à l'introduction du champ de dilaton χ dans le cut-off. Le développement au troisième ordre du terme d'interaction NJL s'obtient aisément. En se limitant aux termes faisant intervenir le champ scalaire $\tilde{\chi}$ et deux champs pseudo-scalaires, nous avons

$$\begin{aligned} I^{(3)}_{\text{int}} &= \int dx\ \frac{1}{4G_s}\left[2\chi_s\tilde{\chi}(\tilde{\varphi}_a^2+\xi\tilde{\pi}_0^2)\right] \\ &\to \int dx\ \frac{\chi_s}{2G_s}\tilde{\chi}\left[\tilde{\pi}_0^2(1+\xi)+\tilde{\pi}_8^2+(\tilde{\pi}^0)^2+(\sqrt{2})^2\left(\varphi_\pi^\dagger\varphi_\pi+\varphi_K^\dagger\varphi_K+\varphi_{K_0}^\dagger\varphi_{K_0}\right)\right]. \end{aligned}$$

En introduisant les champs physiques, via (2.100, 2.116, 2.117, 2.112-2.114), et en posant

$$g_D V_{\chi D} = g_{D\chi}, \tag{2.211}$$

nous trouvons les contributions locales suivantes pour le glueball :

$D \to \pi^0\pi^0$

$$\frac{\chi_s}{G_s} g_{D\chi}(g_{\pi u\bar{u}})^2 \tag{2.212}$$

$D \to \eta\eta$

$$\frac{\chi_s}{G_s} g_{D\chi}\left[g^{*2}_{\eta u\bar{u}}\left(1+\frac{2\xi}{3}\right)+g^{*2}_{\eta s\bar{s}}\left(1+\frac{\xi}{3}\right)+g_{\eta u\bar{u}}(\sqrt{2}g_{\eta s\bar{s}})\frac{2\xi}{3}\right] \tag{2.213}$$

$D \to \eta\eta'$

$$\begin{aligned}\frac{\chi_s}{G_s} g_{D\chi} \Bigg[& g_{\eta u\bar{u}} g_{\eta' u\bar{u}} \left(1 + \frac{2\xi}{3}\right) + g_{\eta s\bar{s}} g_{\eta' s\bar{s}} \left(1 + \frac{\xi}{3}\right) \\ & + \left[g_{\eta u\bar{u}} (\sqrt{2} g_{\eta' s\bar{s}}) + g_{\eta' u\bar{u}} (\sqrt{2} g_{\eta s\bar{s}}) \right] \frac{\xi}{3} \Bigg]\end{aligned} \tag{2.214}$$

$D \to \pi^+\pi^-$

$$\frac{\chi_s}{2G_s} g_{D\chi} (\sqrt{2} g_{\pi u\bar{u}})^2 \tag{2.215}$$

$D \to K^+K^-$

$$\frac{\chi_s}{2G_s} g_{D\chi} (\sqrt{2} g_{K u\bar{s}})^2 \tag{2.216}$$

$D \to K_0 \bar{K}_0$

$$\frac{\chi_s}{2G_s} g_{D\chi} (\sqrt{2} g_{K u\bar{s}})^2 \tag{2.217}$$

A ces contributions locales résultant du terme d'interaction NJL, il faut encore ajouter celles provenant du développement de Taylor en $\tilde{\chi}$ des termes du second ordre issus du terme en Tr ln du Lagrangien (2.7). Ces contributions sont représentées par le troisième terme de (2.148) :

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \chi} \mathrm{Tr}_{\Lambda\chi} (G_0 \tilde{\varphi}_a \Gamma_a)^2 \right\}_{\chi_0} \tilde{\chi}.$$

Nous nous intéressons exclusivement à la partie pseudo-scalaire de $\tilde{\varphi}_a$, puisque nous désirons aboutir à une expression comprenant deux champs pseudo-scalaires et un champ scalaire, ce dernier devant bien sûr être identifié au champ $\tilde{\chi}$ issu du développement du terme du second ordre par le biais de la régularisation. Ce second ordre s'écrit, en introduisant les relations de complétude (2.57, 2.58),

$$\begin{aligned} I^{(2)}_{\text{partiel}} &= \frac{1}{2} \int dx \ \mathrm{tr} < x | (G_0 \tilde{\pi}_a i\gamma_5 \lambda_a)^2 | x > \\ &= \frac{1}{2} \iiiint dx\ dy\ dk\ dk' \ \mathrm{tr} < x | G_0 | k >< k | \tilde{\pi}_a | y > i\gamma_5 \lambda_a < y | G_0 | k' >< k' | \tilde{\pi}_b | x > i\gamma_5 \lambda_b \\ &= \frac{1}{2} \iiint \frac{dx dy dk'}{(2\pi)^8} \int dk \ \mathrm{tr} \left[G_0(k) i\gamma_5 \lambda_a G_0(k') i\gamma_5 \lambda_b \right] e^{i(k-k')x} e^{-i(k-k')y} \tilde{\pi}_a(y) \tilde{\pi}_b(x). \end{aligned}$$

En appliquant le changement de variable $k - k' = q$, nous obtenons

$$\frac{1}{2} \int \frac{dx dy dq}{(2\pi)^8} \int dk \ \mathrm{tr} \left[G_0(k) i\gamma_5 \lambda_a G_0(k-q) i\gamma_5 \lambda_b \right] e^{iq(x-y)} \tilde{\pi}_a(y) \tilde{\pi}_b(x). \tag{2.218}$$

L'intégration divergente sur k comporte un cut-off rendu invariant d'échelle noté $\Lambda\chi$. Si nous utilisons une régularisation en d^4k, nous exploitons le changement de variable habituel

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} = \pi^2 \int_0^{\Lambda^2\chi^2} k^2 \ dk^2$$

et la dérivée par rapport au champ de dilaton aura d'après (2.46) la forme

$$\frac{\partial}{\partial\chi}\int_0^{\Lambda^2\chi^2} f(k^2)d(k^2) = 2\Lambda^2\chi_s f(\Lambda^2\chi_s^2). \tag{2.219}$$

Dans cette régularisation, l'équation (2.218) s'écrit donc :

$$\Lambda^2\chi_s\int\frac{dxdydq}{(2\pi)^4}\left\{\int\frac{dk}{(2\pi)^4}\ \mathrm{tr}\left[G_0(k)i\gamma_5\lambda_a G_0(k-q)i\gamma_5\lambda_b\right]\delta(k^2-\Lambda^2\chi_s^2)\right\} \times e^{iq(x-y)}\tilde{\pi}_a(y)\tilde{\pi}_b(x). \tag{2.220}$$

Afin de nous ramener à une forme $f(k^2)$ pour l'intégrant, nous exploitons l'artifice de Feynman donné en annexe B.2, et ensuite nous appliquons le changement de variable

$$k' = k - \frac{q}{2}(1-u),$$

ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
I_B &= \mathrm{tr}_\gamma\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[\frac{\not{k}-M_i}{k^2+M_i^2}i\gamma_5\frac{\not{k}-\not{q}-M_j}{(k-q)^2+M_j^2}i\gamma_5\right] \\
&= -4\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ \frac{k^2-kq+M_iM_j}{\left[k^2+M_i^2\right]\left[(k-q)^2+M_j^2\right]} \\
&= -4\int_{-1}^1\frac{du}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ \frac{k^2-\frac{q^2}{4}(1-u^2)+M_iM_j}{\left[k^2+\frac{1}{2}[M_i^2+M_j^2+u(M_i^2-M_j^2)]+\frac{1}{4}q^2(1-u^2)\right]^2}.
\end{aligned} \tag{2.221}$$

Nous notons $B_{ij}(q)$ l'expression

$$\begin{aligned}
B_{ij}(q) &= 2\Lambda^2\chi_s\mathrm{tr}_\gamma\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[\frac{\not{k}-M_i}{k^2+M_i^2}i\gamma_5\frac{\not{k}-\not{q}-M_j}{(k-q)^2+M_j^2}i\gamma_5\right]\delta(k^2-\Lambda^2\chi_s^2) \\
&= 2\Lambda^2\chi_s(-4)\int_{-1}^1\frac{du}{2} \\
&\quad\times\int\frac{\pi^2k^2dk^2}{(2\pi)^4}\ \frac{k^2-\frac{q^2}{4}(1-u^2)+M_iM_j}{\left[k^2+\frac{1}{2}[M_i^2+M_j^2+u(M_i^2-M_j^2)]+\frac{1}{4}q^2(1-u^2)\right]^2}\ \delta(k^2-\Lambda^2\chi_s^2) \\
&= -\frac{1}{4\pi^2}\Lambda^4\chi_s^3\int_{-1}^1 du\ \frac{\Lambda^2\chi_s^2-\frac{q^2}{4}(1-u^2)+M_iM_j}{\left[\Lambda^2\chi_s^2+\frac{1}{2}[M_i^2+M_j^2+u(M_i^2-M_j^2)]+\frac{1}{4}q^2(1-u^2)\right]^2}.
\end{aligned} \tag{2.222}$$

En pratiquant de la même façon que lors du calcul au troisième ordre des termes d'interaction (2.212-2.217), nous obtenons pour les différentes désintégrations du glueball :

$D \to \pi^0\pi^0$

$$N_c(g_{\pi u\bar{u}})^2 g_{D\chi}\left[B_{uu}(q_{\pi^0}) + B_{uu}(q_{\pi^0})\right] \tag{2.223}$$

$D \to \eta\eta$

$$N_c g_{D\chi}\Big\{(g_{\eta u\bar{u}})^2\left[B_{uu}(q_\eta) + B_{uu}(q_\eta)\right] + (g_{\eta s\bar{s}})^2\left[B_{ss}(q_\eta) + B_{ss}(q_\eta)\right]\Big\} \tag{2.224}$$

$D \to \eta\eta'$

$$N_c g_{D\chi}\Big\{g_{\eta u\bar{u}}g_{\eta' u\bar{u}}\left[B_{uu}(q_\eta) + B_{uu}(q_{\eta'})\right] + g_{\eta s\bar{s}}g_{\eta' s\bar{s}}\left[B_{ss}(q_\eta) + B_{ss}(q_{\eta'})\right]\Big\} \tag{2.225}$$

$D \to \pi^+\pi^-$

$$N_c g_{D\chi}(g_{\pi u\bar{u}})^2\left[B_{uu}(q_{\pi^+}) + B_{uu}(q_{\pi^-})\right] \tag{2.226}$$

$D \to K^+K^-$

$$N_c g_{D\chi}(g_{K u\bar{s}})^2\left[B_{us}(q_{K^+}) + B_{su}(q_{K^-})\right] \tag{2.227}$$

$D \to K_0\bar{K}_0$

$$N_c g_{D\chi}(g_{K_0 u\bar{s}})^2\left[B_{us}(q_{K_0}) + B_{su}(q_{\bar{K}_0})\right] \tag{2.228}$$

En combinant les deux composantes locales des amplitudes (2.212-2.217) et (2.223-2.228), nous avons finalement les expressions :

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{(l)}_{D\pi^0\pi^0} &= 2g_{D\chi}(g_{\pi u\bar{u}})^2 H_u(m_\pi, m_\pi, \xi = 0), && (2.229)\\
\mathcal{T}^{(l)}_{D\eta\eta} &= 2g_{D\chi}\Big\{(g_{\eta u\bar{u}})^2 H_u(m_\eta, m_\eta) + (g_{\eta s\bar{s}})^2 H_s(m_\eta, m_\eta) \\
&\qquad + g_{\eta u\bar{u}}(\sqrt{2}g_{\eta s\bar{s}})H_\xi\Big\}, && (2.230)\\
\mathcal{T}^{(l)}_{D\eta\eta'} &= 2g_{D\chi}\Big\{g_{\eta u\bar{u}}g_{\eta' u\bar{u}}H_u(m_\eta, m_{\eta'}) + g_{\eta s\bar{s}}g_{\eta' s\bar{s}}H_s(m_\eta, m_{\eta'}) \\
&\qquad + \left[g_{\eta u\bar{u}}(\sqrt{2}g_{\eta' s\bar{s}}) + g_{\eta' u\bar{u}}(\sqrt{2}g_{\eta s\bar{s}})\right]\frac{H_\xi}{2}\Big\}, && (2.231)\\
\mathcal{T}^{(l)}_{D\pi^+\pi^-} &= 2g_{D\chi}(g_{\pi u\bar{u}})^2 H_u(m_{\pi^+}, m_{\pi^-}, \xi = 0), && (2.232)\\
\mathcal{T}^{(l)}_{DK^+K^-} &= 2g_{D\chi}(g^*_{Ku\bar{s}})^2 H_{us}(m_{K^+}, m_{K^-}), && (2.233)\\
\mathcal{T}^{(l)}_{DK_0\bar{K}_0} &= 2g_{D\chi}(g^*_{Ku\bar{s}})^2 H_{us}(m_{K_0}, m_{\bar{K}_0}), && (2.234)
\end{aligned}$$

avec les grandeurs H exprimées ci-dessous :

$$H_u(m_1,m_2) = \frac{\chi_s}{2G_s}\left(1+\frac{2\xi}{3}\right)+\frac{N_c}{2}\left[B_{uu}(m_1)+B_{uu}(m_2)\right], \tag{2.235}$$

$$H_s(m_1,m_2) = \frac{\chi_s}{2G_s}\left(1+\frac{\xi}{3}\right)+\frac{N_c}{2}\left[B_{ss}(m_1)+B_{ss}(m_2)\right], \tag{2.236}$$

$$H_{us}(m_1,m_2) = \frac{\chi_s}{2G_s}+\frac{N_c}{2}\left[B_{us}(m_1)+B_{su}(m_2)\right], \tag{2.237}$$

$$H_\xi = \frac{\chi_s}{2G_s}\frac{2\xi}{3}. \tag{2.238}$$

Ces expressions des amplitudes locales font intervenir à la fois les couplages du scalaire au champ χ et les couplages des pseudo-scalaires aux quarks, mais sans aucun facteur qui rendrait compte de la propagation des quarks, via des intégrales sur des boucles de propagateurs fermioniques. Tout se passe comme si la composante en glu du scalaire se désintégrait instantanément en deux mésons, à la façon du graphique 6c de [15], le vertex se réduisant à un simple point.

Si nous travaillons avec une régularisation d^3k, nous gardons les mêmes expressions pour les amplitudes locales, mais avec des expressions modifiées pour B_{ij}. Nous avons

$$B_{ij}(m_q) = \Lambda\ \mathrm{tr}_\gamma \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[\frac{\not{k}-M_i}{k^2+M_i^2}i\gamma_5\frac{\not{k}-\not{q}-M_j}{(k-q)^2+M_j^2}i\gamma_5\right]\delta(|\vec{k}|-\Lambda\chi_s), \tag{2.239}$$

où le facteur Λ provient du développement en $\tilde{\chi}$ du cut-off, qui est égal à $\Lambda\chi$ et non plus à $\Lambda^2\chi^2$ comme en (2.219).
Afin de faire apparaître q^2 (nous considérons des mésons pseudo-scalaires sur leur couche de masse), nous appliquons, de la même façon que précédemment, un artifice de Feynman (voir annexe B.2) puis effectuons le changement de variable $k' = k-\frac{q}{2}(1-u)$, ce qui donne

$$\begin{aligned} B_{ij}(m_q) &= -4\Lambda\int_{-1}^{1}\frac{du}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{k^2-\frac{q^2}{4}(1-u^2)+M_iM_j}{\left[k^2+\frac{1}{2}[M_i^2+M_j^2+u(M_i^2-M_j^2)]+\frac{1}{4}q^2(1-u^2)\right]^2} \\ &\quad \times\delta(|\vec{k}|-\Lambda\chi_s). \end{aligned} \tag{2.240}$$

L'intégration sur k^0 donne, via le théorème des résidus,

$$\begin{aligned} B_{ij}(m_q) &= -2\Lambda\int_{-1}^{1}du\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{2|\vec{k}|^2+\frac{1}{2}[M_i^2+M_j^2+u(M_i^2-M_j^2)]+M_iM_j}{4\left[|\vec{k}|^2+\frac{1}{2}[M_i^2+M_j^2+u(M_i^2-M_j^2)]+\frac{1}{4}q^2(1-u^2)\right]^{3/2}} \\ &\quad \times\delta(|\vec{k}|-\Lambda\chi_s). \end{aligned} \tag{2.241}$$

Finalement, nous avons

$$B_{ij}(m_q) = -\frac{\Lambda}{\pi^2}\int_{-1}^{1} du\, (\Lambda\chi_s)^2 \frac{2(\Lambda\chi_s)^2 + \frac{1}{2}[M_i^2 + M_j^2 + u(M_i^2 - M_j^2)] + M_i M_j}{4\left[(\Lambda\chi_s)^2 + \frac{1}{2}[M_i^2 + M_j^2 + u(M_i^2 - M_j^2)] + \frac{1}{4}q^2(1-u^2)\right]^{3/2}}. \tag{2.242}$$

Expressions des largeurs de désintégration

Une fois que nous disposons des expressions des amplitudes *totales*, sommes des amplitudes *directes* et *locales* correspondantes, nous pouvons passer au calcul des largeurs de désintégration proprement dites, que nous confronterons avec les résultats expérimentaux. La largeur de désintégration d'une particule correspond physiquement à l'inverse de son temps de vie. La formule générale, appliquée à la désintégration d'un méson scalaire f_0 en deux mésons pseudo-scalaires α, β s'écrit, dans la limite de symétrie d'isospin,

$$\begin{aligned}\Gamma_{f_0\alpha\beta} &= \frac{N_I}{N}\frac{1}{2m_{f_0}}\frac{1}{(2\pi)^2}\iint \frac{d^3k_1}{2E_\alpha}\frac{d^3k_2}{2E_\beta}\left|\mathcal{T}_{f_0\alpha\beta}\right|^2 \delta(q-k_1-k_2)\\ &= \frac{N_I}{16N\pi}\frac{1}{m_{f_0}}\left|\mathcal{T}_{f_0\alpha\beta}\right|^2\\ &\quad\times\sqrt{\left[1-\left(\frac{m_\alpha+m_\beta}{m_{f_0}}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{m_\alpha-m_\beta}{m_{f_0}}\right)^2\right]},\\ &\qquad\qquad \alpha,\beta = \pi,\eta,\eta',K,\end{aligned} \tag{2.243}$$

avec $N_I = (2I+1)$. $N = 2$ dans le cas de particules identiques à la sortie de la désintégration, sinon $N = 1$. Dans (2.243), m_{f_0} dénote la masse du méson scalaire, q sa quadri-implusion, et k_1 and k_2 les quadri-impulsions des particules émergentes, dont les masses sont notées m_α et m_β. Le méson scalaire est considéré au repos ($\vec{q} = 0$) et les mésons pseudo-scalaires sur leur couche de masse. Dans le détail, nous avons donc :

$$\Gamma_{f_0\pi\pi} = \frac{3}{32\pi m_{f_0}}(\mathcal{T}_{f_0\pi^0\pi^0})^2\sqrt{1-\left(\frac{2m_\pi}{m_{f_0}}\right)^2}, \tag{2.244}$$

$$\Gamma_{f_0KK} = \frac{2}{16\pi m_{f_0}}(\mathcal{T}_{f_0K^+K^-})^2\sqrt{1-\left(\frac{2m_K}{m_{f_0}}\right)^2}, \tag{2.245}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{f_0\eta\eta'} &= \frac{1}{16\pi m_{f_0}}(\mathcal{T}_{f_0\eta\eta'})^2\\ &\quad\times\sqrt{\left(1-\left(\frac{m_\eta+m_{\eta'}}{m_{f_0}}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{m_\eta-m_{\eta'}}{m_{f_0}}\right)^2\right)},\end{aligned} \tag{2.246}$$

$$\Gamma_{f_0\eta\eta} = \frac{1}{32\pi m_{f_0}}(\mathcal{T}_{f_0\eta\eta})^2\sqrt{1-\left(\frac{2m_\eta}{m_{f_0}}\right)^2}. \tag{2.247}$$

D'après les derniers résultats expérimentaux [31], les largeurs de désintégration du glueball sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{total}} &= 112 \pm 10 \text{ MeV}, && (2.248)\\ \Gamma(\pi\pi)/\Gamma_{\text{total}} &= 0.454 \pm 0.104, && (2.249)\\ \Gamma(K\bar{K})/\Gamma_{\text{total}} &= 0.044 \pm 0.021, && (2.250)\\ \Gamma(\eta\eta')/\Gamma(\eta\eta) &= 0.29 \pm 0.1. && (2.251)\end{aligned}$$

Nous reviendrons sur ces données par la suite. Dans un premier temps, nous reprenons l'analyse exposée dans [86] et dédiée aux rapports de branchement appliqués à la fois aux amplitudes locales et aux amplitudes directes. Nous considérons pour ces rapports les largeurs corrigées des effets d'espace de phase, c'est-à-dire les grandeurs (2.244-2.247) sans les racines carrées qui les multiplient. Nous notons ces "largeurs corrigées" γ^2.

Nous commençons par l'étude des amplitudes locales, données en (2.229-2.234). En terme de constantes de couplage, en introduisant les effets de masse des quarks via le paramètre λ, nous avons :

$$\begin{aligned}\gamma^2_{(l)}(\pi\pi) &: \gamma^2_{(l)}(\eta\eta) : \gamma^2_{(l)}(\eta\eta') : \gamma^2_{(l)}(\eta'\eta') : \gamma^2_{(l)}(K\overline{K})\\ = 1 &: \frac{1}{3}\left(\frac{g^{*2}_{\eta u\overline{u}}}{g^{*2}_{\pi u\overline{u}}} + \lambda\frac{g^{*2}_{\eta s\overline{s}}}{g^{*2}_{\pi u\overline{u}}}\right)^2 : \frac{2}{3}\left(\frac{g^{*}_{\eta u\overline{u}}g^{*}_{\eta' u\overline{u}}}{g^{*2}_{\pi u\overline{u}}} + \lambda\frac{g^{*}_{\eta s\overline{s}}g^{*}_{\eta' s\overline{s}}}{g^{*2}_{\pi u\overline{u}}}\right)^2\\ &: \frac{1}{3}\left(\frac{g^{*2}_{\eta' u\overline{u}}}{g^{*2}_{\pi u\overline{u}}} + \lambda\frac{g^{*2}_{\eta' s\overline{s}}}{g^{*2}_{\pi u\overline{u}}}\right)^2 : \frac{4}{3}\left(\frac{g^{*2}_{K u\overline{s}}}{g^{*2}_{\pi u\overline{u}}}\right)^2\lambda.\end{aligned} \tag{2.252}$$

Dans cette équation, la grandeur $\sqrt{\lambda}$ est introduite à chaque fois qu'une paire $s\overline{s}$ est créée. Cette variable λ est le paramètre de violation de la symétrie de saveur qui est fixé par le rapport entre les taux de production de hadrons étranges et non étranges dans la région centrale des collisions hadroniques à haute énergie et/ou par les rapports de branchement des désintégrations radiatives $J/\Psi \to \gamma\eta/\gamma\eta'$ et $J/\Psi \to \gamma\phi\phi/\gamma\omega\omega$: $\lambda = 0.4 - 0.5$ [13, 15]. Elle est liée aux probabilités de production $u\overline{u} : d\overline{d} : s\overline{s} = 1 : 1 : \lambda$ et au rapport des masses constituantes des quarks $\lambda = M_u^2/M_s^2$ [11]. Finalement, en acceptant l'approximation selon laquelle les constantes de couplage peuvent être interprétées comme le contenu en $q\bar{q}$ des champs de mésons physiques, l'équation (2.252) se ramène à :

$$\begin{aligned}\gamma^2_{(l)}(\pi\pi) &: \gamma^2_{(l)}(\eta\eta) : \gamma^2_{(l)}(\eta\eta') : \gamma^2_{(l)}(\eta'\eta') : \gamma^2_{(l)}(K\overline{K})\\ = 1 &: \frac{1}{3}\left(\cos^2\theta + \lambda\sin^2\theta\right)^2 : \frac{2}{3}(1-\lambda)^2\sin^2\theta\cos^2\theta\\ &: \frac{1}{3}\left(\sin^2\theta + \lambda\cos^2\theta\right)^2 : \frac{4}{3}\lambda,\end{aligned} \tag{2.253}$$

avec

$$\begin{aligned}
\pi^0 &= u\overline{u} - d\overline{d}, \\
\pi^+ &= \sqrt{2}\, u\overline{d}, \\
\pi^- &= \sqrt{2}\, d\overline{u}, \\
\eta &= \sqrt{2}\,(\cos\theta\ n\overline{n} - \sin\theta\ s\overline{s}), \\
\eta' &= \sqrt{2}\,(\sin\theta\ n\overline{n} + \cos\theta\ s\overline{s}), \\
K &= \sqrt{2}\, u\overline{s}, \\
\overline{K} &= \sqrt{2}\, s\overline{u},
\end{aligned}$$

où

$$n\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u\bar{u} + d\bar{d}\right). \tag{2.254}$$

Ces compositions en quarks s'obtiennent à partir des représentations matricielles des champs mésoniques, données dans l'annexe B.5, les champs η et η' constituant un mélange des champs π_0 et π_8.
On retrouve ainsi les résultats de [15]. Nos expressions (2.229-2.234) des amplitudes locales conduiraient exactement aux relations (2.252) si

$$H_u : H_{us} : H_s = 1 : \sqrt{\lambda} : \lambda \tag{2.255}$$

et si H_ξ pouvait être négligé. Avec $q^2 = 0$ et $\chi_s = 400$ MeV, valeur du condensat qui conduit à des valeurs en très bon accord avec l'expérience pour les masses du nonet scalaire [85], nous avons :

$$H_u : H_{us} : H_s = 1 : 0.753 : 0.546, \tag{2.256}$$

ce qui est cohérent avec (2.255) si nous prenons $\lambda \approx 0.55$.
Un calcul exact, en tenant compte de H_ξ et avec chaque H calculé sur sa couche de masse, fournit :

$$\gamma^2_{(l)}(\pi\pi) : \gamma^2_{(l)}(\eta\eta) : \gamma^2_{(l)}(\eta\eta') : \gamma^2_{(l)}(K\overline{K}) = 1 : 0.193 : 0.011 : 0.641, \tag{2.257}$$

ce qui est en assez bon accord avec les résultats obtenus de (2.253) avec $\theta = 37°$ et $\lambda = 0.55$ [13] :

$$\gamma^2_{(l)}(\pi\pi) : \gamma^2_{(l)}(\eta\eta) : \gamma^2_{(l)}(\eta\eta') : \gamma^2_{(l)}(K\overline{K}) = 1 : 0.233 : 0.031 : 0.73. \tag{2.258}$$

Ces résultats justifient d'une certaine façon les hypothèses faites plus haut. Quoiqu'il en soit, ni le calcul exact, ni le calcul approché, ne donnent de résultats conformes avec l'expérience [86] : nous obtenons une valeur trop petite pour $\eta\eta'$, et une beaucoup trop grande pour $K\overline{K}$. Les résultats expérimentaux qui servent de référence sont donnés en (1.19), et sont repris ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\gamma^2(\pi\pi)\ &: \gamma^2(\eta\eta) : \gamma^2(\eta\eta') : \gamma^2(K\overline{K}) \\
&= 1 : 0.195 \pm 0.075 : 0.320 \pm 0.114 : 0.138 \pm 0.038.
\end{aligned}$$

Nous suivons maintenant la même démarche appliquée aux amplitudes *directes* de désintégration, qui peuvent être schématisées par des diagrammes de Feynman, et qui contribuent à l'amplitude totale du glueball $f_0(1500)$ en raison de son contenu en $q\bar{q}$ induit par son couplage aux mésons isoscalaires du nonet. Nous pouvons écrire, à partir de (2.190-2.196),

$$\begin{aligned}
\gamma^2_{(t)}(\pi\pi) \ &: \gamma^2_{(t)}(\eta\eta) : \gamma^2_{(t)}(\eta\eta') : \gamma^2_{(t)}(\eta'\eta') : \gamma^2_{(t)}(K\overline{K}) \\
= 1 \ &: \frac{1}{3}\left(\frac{g^{*2}_{\eta u\overline{u}}}{g^{*2}_{\pi u\overline{u}}} + \sqrt{2}\sqrt{\lambda}\frac{g_{f_0(1500)s\overline{s}}}{g_{f_0(1500)u\overline{u}}}\frac{g^{*2}_{\eta s\overline{s}}}{g^{*2}_{\pi u\overline{u}}}\right)^2 \\
&: \frac{2}{3}\left(\frac{g^{*}_{\eta u\overline{u}}g^{*}_{\eta' u\overline{u}}}{g^{*2}_{\pi u\overline{u}}} + \sqrt{2}\sqrt{\lambda}\frac{g_{f_0(1500)s\overline{s}}}{g_{f_0(1500)u\overline{u}}}\frac{g^{*}_{\eta s\overline{s}}g^{*}_{\eta' s\overline{s}}}{g^{*2}_{\pi u\overline{u}}}\right)^2 \\
&: \frac{1}{3}\left(\frac{g^{*2}_{\eta' u\overline{u}}}{g^{*2}_{\pi u\overline{u}}} + \sqrt{2}\sqrt{\lambda}\frac{g_{f_0(1500)s\overline{s}}}{g_{f_0(1500)u\overline{u}}}\frac{g^{*2}_{\eta' s\overline{s}}}{g^{*2}_{\pi u\overline{u}}}\right)^2 \\
&: \frac{1}{3}\left(\frac{g^{*2}_{Ku\overline{s}}}{g^{*2}_{\pi u\overline{u}}}\right)^2\left(\sqrt{\lambda} + \sqrt{2}\frac{g_{f_0(1500)s\overline{s}}}{g_{f_0(1500)u\overline{u}}}\right)^2.
\end{aligned}$$

Nous pouvons retrouver exactement les différents rapports de (2.253) si nous imposons que les constantes de couplage du glueball se trouvent dans le rapport suivant :

$$\frac{g_{f_0(1500)s\overline{s}}}{g_{f_0(1500)u\overline{u}}} = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}. \tag{2.259}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\gamma^2_{(t)}(\pi\pi) \ &: \gamma^2_{(t)}(\eta\eta) : \gamma^2_{(t)}(\eta\eta') : \gamma^2_{(t)}(\eta'\eta') : \gamma^2_{(t)}(K\overline{K}) \\
= 1 \ &: \frac{1}{3}(\cos^2\theta + \lambda\sin^2\theta)^2 : \frac{2}{3}(1-\lambda)^2\sin^2\theta\cos^2\theta \\
&: \frac{1}{3}(\sin^2\theta + \lambda\cos^2\theta)^2 : \frac{4}{3}\lambda.
\end{aligned} \tag{2.260}$$

Toutefois, la relation (2.259) est loin d'être satisfaite ici. Pour $\chi_s = 400$ MeV, nous avons $g_{f_0(1500)s\overline{s}}/g_{f_0(1500)u\overline{u}} = -0.46$ (voir la figure 2.4), dont le signe négatif est en accord avec les résultats de [57] et conduit à de très petites valeurs pour les rapports de branchement. Les amplitudes directes et locales vont donc donner des résultats très différents.
Notre modèle fournit les prédictions suivantes, à partir des expressions exactes (2.190-2.196) :

$$\gamma^2_{(t)}(\pi\pi) : \gamma^2_{(t)}(\eta\eta) : \gamma^2_{(t)}(\eta\eta') : \gamma^2_{(t)}(K\overline{K}) = 1 : 2.2\ 10^{-2} : 0.8\ 10^{-2} : 3.9\ 10^{-2}, \tag{2.261}$$

ce qui montre que les poids relatifs des désintégrations sont fortement modifés par rapport à (2.257).

Moyennant les hypothèses décrites plus haut, à savoir l'identification des constantes de couplage aux quarks avec les contenus $q\bar{q}$, ainsi que l'introduction des effets des masses de quarks via le paramètre λ, les deux contributions, directe et locale, satisferaient la règle de somme [15]

$$\sum_i \gamma_{t,l}^2(i) \div (2+\lambda)^2, \tag{2.262}$$

si toutefois la condition (2.259) est remplie dans le cas des contributions directes. Cette hypothèse n'est pas remplie ici. Par contre nos expressions sont consistantes avec une valeur $\lambda \approx 0.55$ dans le cas des contributions locales, donnant des résultats similaires à ceux de [13], mais en désaccord avec les données expérimentales (1.19).

Les figures 2.12 à 2.15 représentent le comportement en χ_s des largeurs de désintégration directes et totales du $f_0(1500)$ dans les mésons pseudo-scalaires $\pi\pi$, $\eta\eta$, $\eta\eta'$ et $K\overline{K}$, respectivement. La courbe pleine indique la largeur directe, correspondant au diagramme triangulaire. Dans nos graphiques de largeurs de désintégration, nous noterons Γ^t la largeur directe, et Γ^{tot} la largeur totale.

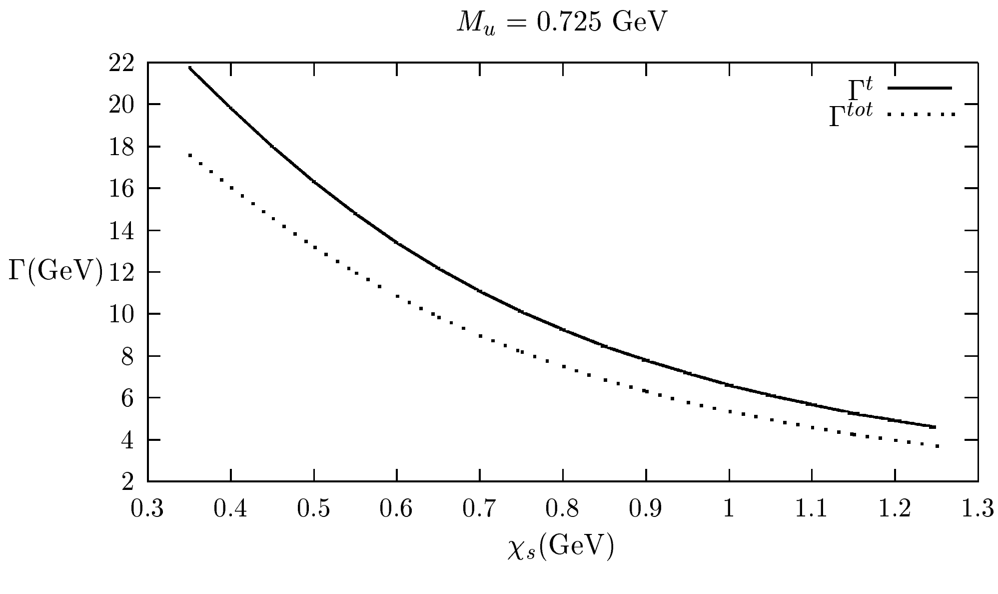

FIG. 2.12 – Largeurs directes et totales $f_0(1500) \to \pi\pi$ (d^4k)

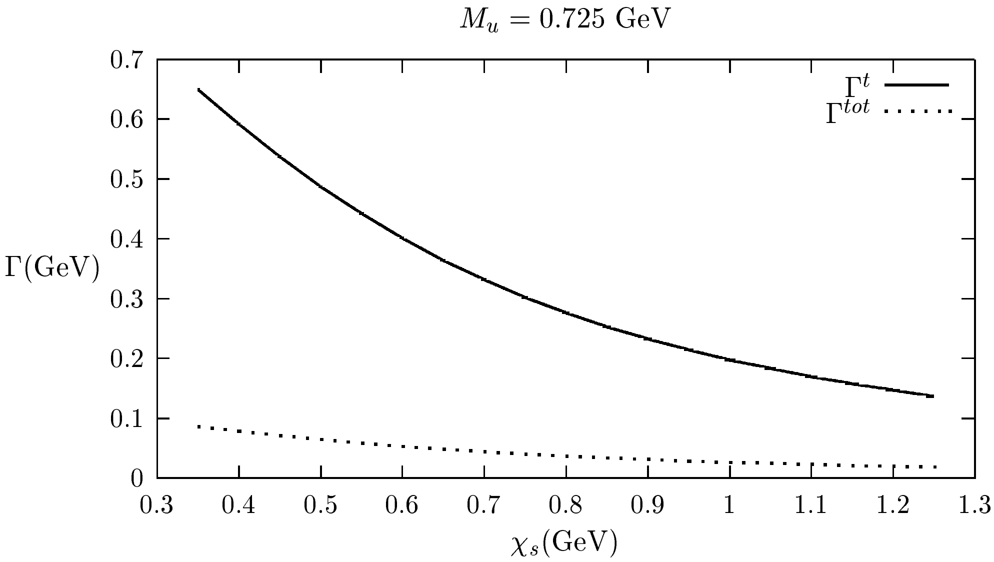

FIG. 2.13 – Largeurs directes et totales $f_0(1500) \to K\bar{K}$ (d^4k)

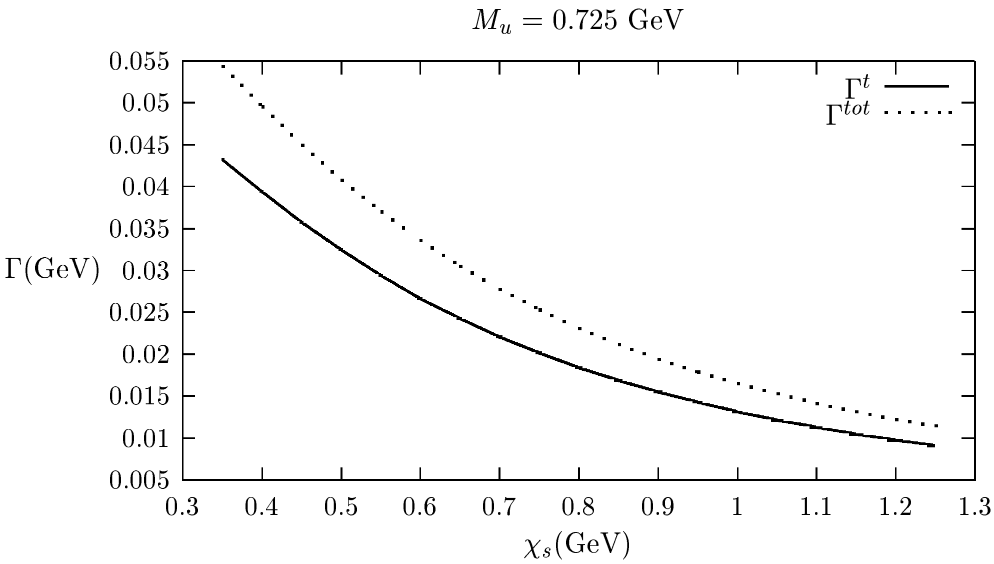

FIG. 2.14 – Largeurs directes et totales $f_0(1500) \to \eta\eta'$ (d^4k)

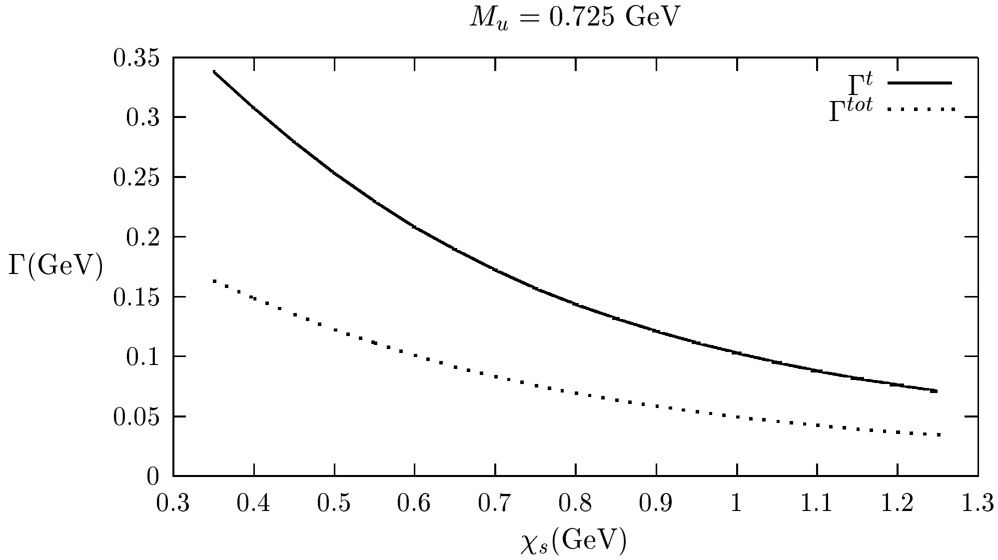

FIG. 2.15 – Largeurs directes et totales $f_0(1500) \to \eta\eta$ (d^4k)

Il apparaît immédiatement, quelque soit χ_s, que les valeurs de $\Gamma_{f_0\pi\pi}$ n'ont pas de signification physique, en regard des largeurs totales expérimentales (1.18, 2.248). L'origine de ces valeurs démesurément grandes réside entre autres dans la grande valeur de M_u qui affecte en même temps les valeurs de $g_{f_0(1500)u\overline{u}}$, $g_{\pi u\overline{u}}$ et G_{uuu}. Cette dernière grandeur, désignant l'intégration sur l'impulsion le long de la boucle triangulaire, est par ailleurs calculée ici sans cut-off sur la partie convergente (voir annexe C), convention qui a donné de bons résultats pour la désintégration électromagnétique du pion [27, 83]. Par la suite, nous verrons l'incidence de l'application du cut-off sur toutes les parties de l'intégrale, démarche qui peut paraître plus cohérente. Rappelons ici que la grande valeur de M_u nous a été imposée par la prise en compte du $a_0(1450)$ dans le nonet scalaire : dans le modèle NJL, la masse de ce méson vaut $2M_u$ [85]. Il faut toutefois rappeler que jusqu'à présent [83, 85] cette grande masse constituante avait permis d'obtenir de bons résultats à l'aide de notre modèle, notamment concernant les propriétés des mésons pseudo-scalaires. Par exemple, la désintégration électromagnétique du pion neutre π^0 n'est pas affectée par la valeur de M_u si le cut-off n'est pas placé sur l'intégrale convergente (voir section 2.6.2). Dans la perspective de réduire cette masse constituante, différentes voies peuvent être investiguées, toujours dans le cadre du modèle NJL ou d'une extension de ce modèle. Les options qui se présentent sont abordées succinctement ci-dessous, et seront développées plus loin.

Nous pouvons illustrer cette influence de M_u en étudiant la désintégration d'un méson scalaire d'une masse légèrement supérieure à 800 MeV, avec une masse constituante $M_u \approx$ 400 MeV. Nous obtenons alors des résultats en bon accord avec [95]. Dans ce cas, nous nous trouvons juste au-dessus du seuil, ce qui permet de manipuler les petites largeurs de désintégrations non physiques en deux quarks libres.

Ce problème qui apparaît désastreux dans le cas des pions est nettement moins prononcé pour les autres désintégrations. Ceci est notamment lié à la valeur négative du rapport $g_{f_0(1500)s\overline{s}}/g_{f_0(1500)u\overline{u}}$, qui donne lieu à des interférences destructives entre les amplitudes u et s et donc à une nette réduction des valeurs des largeurs. D'autre part, comme nous le mentionnons un peu plus haut, nous constatons que les masses plus élevées des mésons pseudo-scalaires issus de la désintégration atténuent la valeur de l'intégrale convergente sans cut-off, qui dans le cas du pion est très grande.

Considérons maintenant les largeurs totales, calculées à partir des amplitudes totales $\mathcal{T}^{(t)}_{f_0(1500)} + \mathcal{T}^{(l)}_{f_0(1500)}$ et représentées en pointillés sur les figures (2.12-2.15). A l'exception de la désintégration $\eta\eta'$, les largeurs totales sont réduites par rapport à la contribution de la boucle triangulaire $\mathcal{T}^{(t)}_{f_0(1500)}$, quelle que soit la valeur de χ_s. Toutefois, même pour des grandes valeurs de χ_s, le cas de la désintégration $\pi\pi$ reste problématique. Les rapports de branchement conservent ainsi des valeurs trop petites, pour tout χ_s. Avec $\chi_s = 400$ MeV, nous avons :

$$\gamma^2(\pi\pi) : \gamma^2(\eta\eta) : \gamma^2(\eta\eta') : \gamma^2(K\overline{K}) = 1 : 1.3\ 10^{-2} : 1.2\ 10^{-2} : 6.4\ 10^{-3}. \tag{2.263}$$

Une autre approche consisterait à considérer non plus le $a_0(1450)$, mais le $a_0(980)$, comme membre du nonet scalaire, ce qui ramènerait la masse constituante à une valeur nettement inférieure, $M_u = 490$ MeV. Malheureusement, nous sommes alors confrontés à une situation dans laquelle le secteur scalaire isoscalaire se situe bien au-delà du seuil si nous tentons de reproduire un glueball d'une masse de 1.5 GeV. Notre approximation de petites largeurs (c'est-à-dire de petites parties imaginaires pour les désintégrations non physiques des mésons scalaires en une paire quark-antiquark [85, 86]) n'est alors plus valide, et nos résultats numériques sont non fiables. Dans le souci d'être complet, nous donnons quand même ci-dessous les équivalents des équations (2.257, 2.261, 2.263) pour la valeur $M_u = 490$ MeV. Nous considérons alors le nonet $a_0(980)$, $f_0(980)$, $f_0(1370)$, $K_0^*(1430)$, toujours avec la masse du glueball fixée à 1.5 GeV. Nous avons alors, pour les désintégrations de ce dernier,

$$\gamma^2_{(l)}(\pi\pi) : \gamma^2_{(l)}(\eta\eta) : \gamma^2_{(l)}(\eta\eta') : \gamma^2_{(l)}(K\overline{K}) = 1 : 0.2045 : 0.1 : 0.947 \tag{2.264}$$

pour les rapports de branchement des amplitudes locales, à la façon de (2.257). L'équivalent de (2.261) s'écrit :

$$\gamma^2_{(t)}(\pi\pi) : \gamma^2_{(l)}(\eta\eta) : \gamma^2_{(t)}(\eta\eta') : \gamma^2_{(t)}(K\overline{K}) = 1 : 1.326 : 0.325 : 5.679. \tag{2.265}$$

Enfin, la contribution totale analogue à (2.263) donne

$$\gamma^2(\pi\pi) : \gamma^2(\eta\eta) : \gamma^2(\eta\eta') : \gamma^2(K\overline{K}) = 1 : 0.84 : 0.046 : 3.224. \tag{2.266}$$

Ne perdons pas de vue que ces résultats sont donnés ici à titre d'illustration uniquement, pour montrer qu'adopter une masse constituante plus faible conduit à des rapports de branchement plus réalistes. Ces résultats doivent toutefois être considérés avec beaucoup de précaution, car le $f_0(1500)$ se situe très au-delà du seuil, rendant nos approximations peu rigoureuses. Ce problème est lié à la nature non confinante du modèle NJL, qui nous contraint à considérer des masses constituantes élevées (M_s sera également grande, voir la table 2.2) afin d'étudier les désintégrations du $f_0(1500)$. Le méson scalaire isovecteur est alors assimilé au $a_0(1450)$, et le $a_0(980)$ sera laissé comme candidat pour une molécule $K\bar{K}$.

Dans la deuxième partie de ce mémoire, nous exploitons une version généralisée de NJL, due à C.M. Shakin et ses divers collaborateurs [32]-[51], qui intègre une modélisation du confinement via un potentiel linéaire à petite distance. Cette intégration du confinement a pour effet d'augmenter la masse du méson scalaire pour une même masse constituante, en d'autres termes elle permet de reproduire le $a_0(1450)$ avec une masse de quark plus petite.

Enfin, signalons l'existence d'une autre interprétation, exposée par exemple dans [89], qui identifie le plus léger glueball scalaire avec la résonance $f_0(1710)$. Dans ce cas, le $f_0(1500)$, toujours couplé au sein du triplet d'hybrides isoscalaires, aurait sa plus grande composante dans le canal $s\bar{s}$ [84], et sa largeur de désintégration en deux pions serait fortement réduite.

Afin d'analyser l'influence de la régularisation, nous confrontons ci-dessous les résultats obtenus pour les largeurs directes et totales, respectivement avec une régularisation d^4k et une régularisation d^3k.

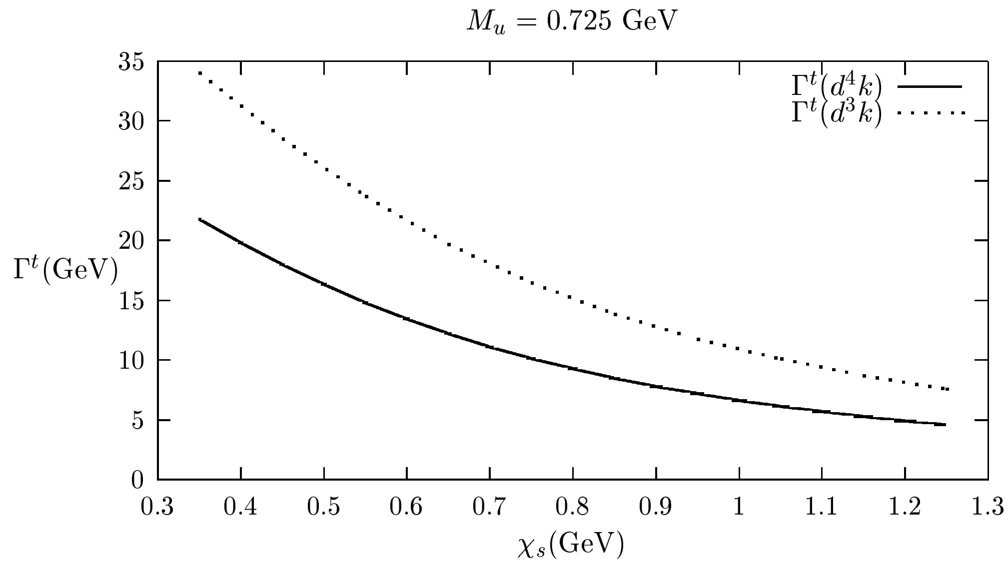

FIG. 2.16 – Largeurs directes $f_0(1500) \to \pi\pi$ (sans cut-off)

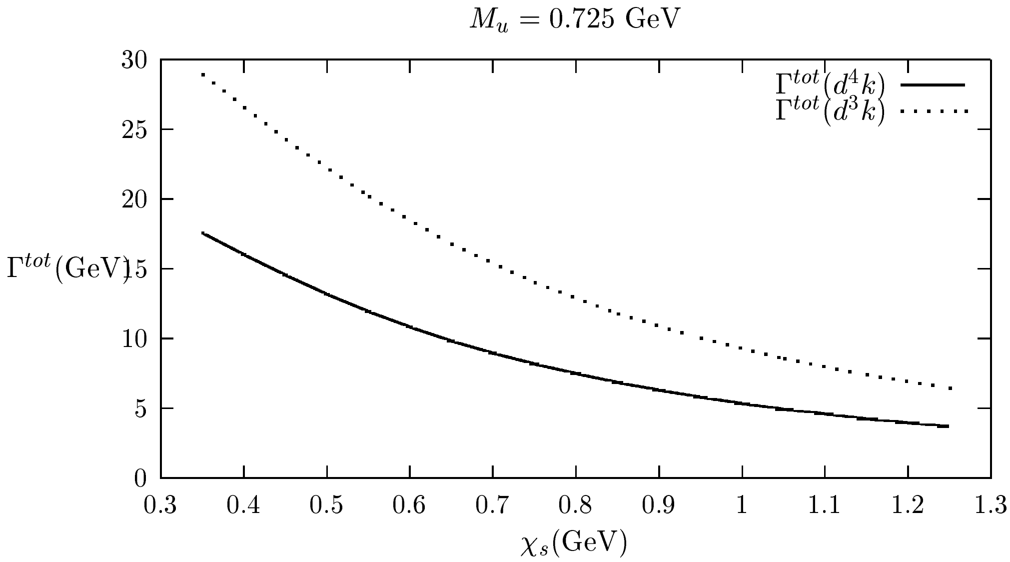

FIG. 2.17 – Largeurs totales $f_0(1500) \to \pi\pi$ (sans cut-off)

Nous illustrons cette influence du schéma de régularisation dans le cas de la désintégration en deux pions, représentée avec une régularisation d^4k sur la figure 2.12. Rappelons que nous ne plaçons pas de cut-off sur la partie convergente de la boucle triangulaire, que nous notons J_4 (voir annexe C), et donc cette intégrale convergente n'est pas influencée par la méthode de régularisation. Nous comparons sur la figure 2.16 les largeurs directes de $f_0(1500) \to \pi\pi$, et sur la figure 2.17 les largeurs totales.
Nous constatons que l'adoption de la régularisation d^3k donne lieu à un accroissement des largeurs, ce qui nous éloigne encore davantage des valeurs expérimentales. En se référant à l'expression de l'amplitude (2.190), nous observons que deux facteurs sont influencés par le choix de la régularisation. D'une part, la constante de couplage $|g_{Du\bar{u}}|$ représentée sur les graphiques 2.3 et 2.4 subit une augmentation sensible lors du passage à la régularisation d^3k, et d'autre part la boucle triangulaire G_{uuu} étudiée dans l'annexe C passe d'une valeur numérique de (-1.938293e-02) à (-2.104750e-02). L'amplitude intervenant au carré dans l'expression de la largeur, nous avons finalement les écarts observés sur les figures 2.16 et 2.17.

Nous calculons maintenant les grandeurs représentées sur les figures 2.12-2.15 avec la régularisation d^3k et nous plaçons de manière plus cohérente le cut-off sur toutes les intégrales, y compris celles ne présentant pas de divergences ultraviolettes (voir la fonction J_4 dans l'annexe C). Dans ce cas, les valeurs des intégrales convergentes J_4 dépendent de la régularisation choisie (d^3k ou d^4k) en raison de la non-renormalisabilité du modèle. Néanmoins, cette influence est relativement faible. Les résultats obtenus sont représentés sur les figures 2.18-2.21.

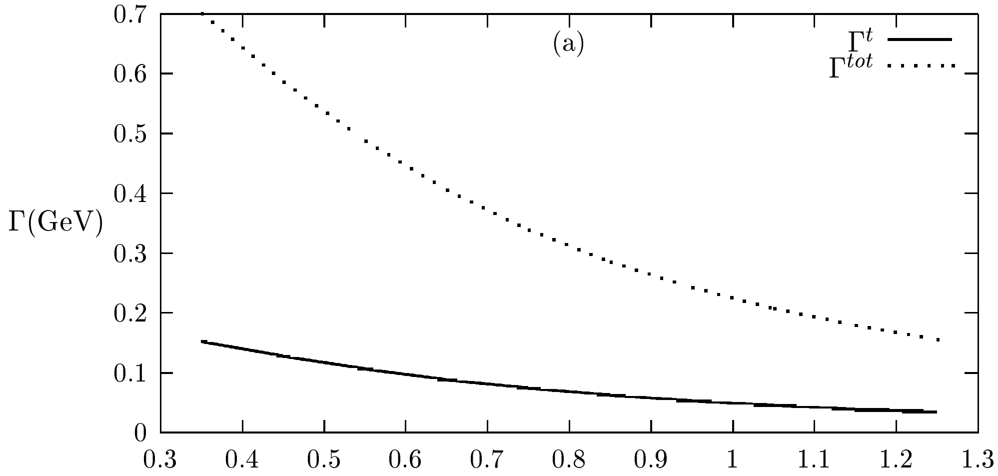

FIG. 2.18 – Largeurs directes et totales $f_0(1500) \to \pi\pi$ (d^3k et cut-off)

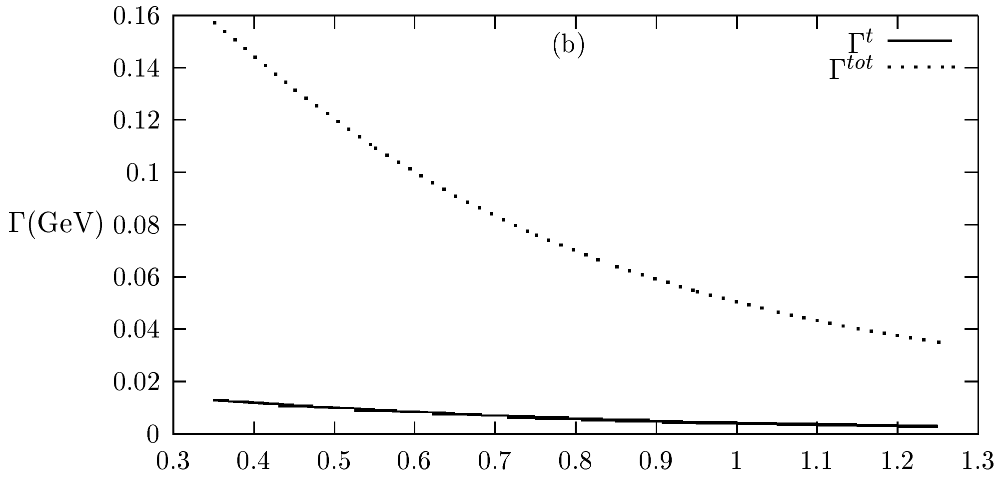

FIG. 2.19 – Largeurs directes et totales $f_0(1500) \to K\bar{K}$ (d^3k et cut-off)

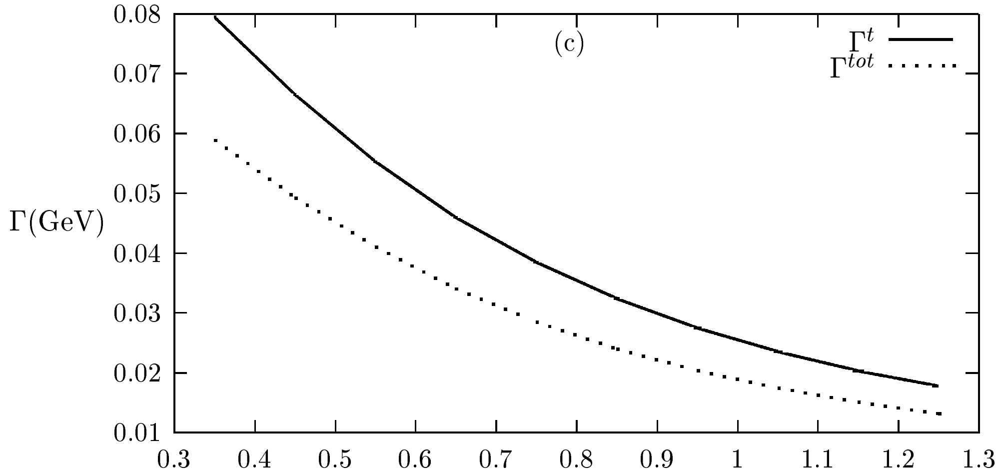

FIG. 2.20 – Largeurs directes et totales $f_0(1500) \to \eta\eta'$ (d^3k et cut-off)

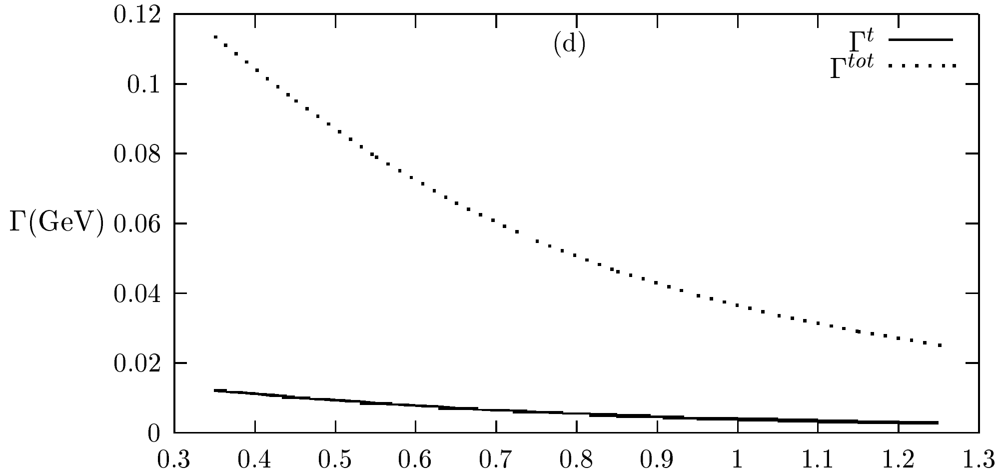

FIG. 2.21 – Largeurs directes et totales $f_0(1500) \to \eta\eta$ (d^3k et cut-off)

Nous constatons que cette introduction systématique du cut-off génère des résultats très différents. D'une part, nous assistons à une nette réduction des largeurs directes (excepté pour la désintégration $\eta\eta'$), ce qui fournit notamment des largeurs pour la désintégration $\pi\pi$ moins fantaisistes, et d'autre part, nous observons une inversion des rapports entre les largeurs directes et totales, inversion due au changement de signe des boucles triangulaires lorsqu'un cut-off est placé sur les intégrales convergentes.

Les rapports de branchement correspondant aux équations (2.261, 2.263) deviennent respectivement :

$$\gamma^2_{(t)}(\pi\pi) : \gamma^2_{(t)}(\eta\eta) : \gamma^2_{(t)}(\eta\eta') : \gamma^2_{(t)}(K\overline{K}) = 1 : 0.1 : 1.94 : 0.1 \tag{2.267}$$

et

$$\gamma^2(\pi\pi) : \gamma^2(\eta\eta) : \gamma^2(\eta\eta') : \gamma^2(K\overline{K}) = 1 : 0.2 : 0.3 : 0.3. \tag{2.268}$$

Les ratios des largeurs totales (2.268) sont en bon accord avec (1.19), à l'exception du $K\overline{K}$. Ce rapport de branchement est par contre en très bon accord avec les résultats de la table 1.1.
Les ratios des largeurs directes sont à l'inverse en mauvais accord avec (1.19), à l'exception du $K\overline{K}$.

2.6.2 Désintégrations électromagnétiques

Désintégration électromagnétique du glueball

Le calcul de la désintégration électromagnétique du glueball et des mésons scalaires isoscalaires a déjà fait l'objet d'une publication [85]. Les calculs y sont basés sur une régularisation en d^4k en métrique euclidienne. Dans le présent paragraphe, nous utilisons une régularisation en d^3k dans la métrique de Minkowski, et nous confronterons nos résultats avec ceux du chapitre 3, avec prise en compte du confinement.

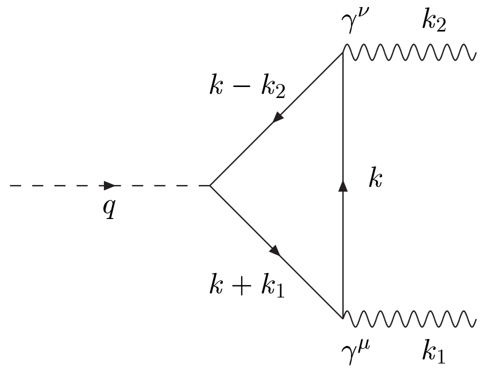

FIG. 2.22 – Désintégration électromagnétique du glueball

La désintégration électromagnétique d'un méson scalaire se calcule à l'aide de diagrammes tels que celui donné sur la figure 2.22. Dans le cas du glueball, noté D, il y a contribution de deux diagrammes, l'un relatif au quark u (ou d), l'autre relatif au quark s. L'amplitude de désintégration a l'expression suivante :

$$\mathcal{T}_{D\to\gamma\gamma} = N_c \; \epsilon^*_\mu(k_1)\epsilon^*_\nu(k_2) \left[(e_u^2 + e_d^2) g_{Du\bar{u}} \; P_u^{\mu\nu} + e_s^2 \; g_{Ds\bar{s}} \; P_s^{\mu\nu}\right], \tag{2.269}$$

où e_u, e_d et e_s sont respectivement les charges électriques des quarks u, d et s, que l'on peut trouver dans l'annexe B.1 :

$$\begin{aligned} e_u &= 2e/3, & (2.270)\\ e_d &= -e/3, & (2.271)\\ e_s &= -e/3, & (2.272) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{4\pi\alpha}, & (2.273)\\ \alpha &= 1/137. & (2.274) \end{aligned}$$

Les fonctions $P_u^{\mu\nu}$ et $P_s^{\mu\nu}$ représentent le calcul de la boucle triangulaire, respectivement en quark u et s. En métrique de Minkowski, nous avons :

$$P_a^{\mu\nu} = \mathrm{tr}_\gamma \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(\not{k} + \not{k}_1 + M_a)\gamma_\mu(\not{k} + M_a)\gamma_\nu(\not{k} - \not{k}_2 + M_a)}{[(k+k_1)^2 - M_a^2]\,[k^2 - M_a^2]\,[(k-k_2)^2 - M_a^2]}. \tag{2.275}$$

Le calcul de la trace dans l'espace de Dirac fournit pour le numérateur :

$$N_a^{\mu\nu} = 4M_a\Big\{g^{\mu\nu}\left[-k^2 - k_1k_2 + M_a^2\right] + (k_1^\nu k_2^\mu - k_1^\mu k_2^\nu) + 2\,(k_1^\mu k^\nu - k_2^\nu k^\mu) + 4k^\mu k^\nu\Big\}.$$

Nous savons que le produit des vecteurs de polarisation par les quadri-vecteurs correspondants doit être nul, autrement dit :

$$\begin{aligned} \epsilon_\mu^*(k_1)k_1^\mu &= 0, & (2.276)\\ \epsilon_\nu^*(k_2)k_2^\nu &= 0. & (2.277) \end{aligned}$$

Le numérateur débarrassé des contributions nulles dans (2.269) se réduit donc à :

$$N_a^{\mu\nu} = 4M_a\Big\{g^{\mu\nu}\left[-k^2 - k_1k_2 + M_a^2\right] + k_1^\nu k_2^\mu + 4k^\mu k^\nu\Big\}. \tag{2.278}$$

L'étape suivante consiste à développer cette expression sur une base complète des vecteurs k_1 et k_2. Nous écrivons :

$$P_a^{\mu\nu}/4M_a = Ag^{\mu\nu} + Bk_1^\mu k_1^\nu + Ck_2^\mu k_2^\nu + Dk_1^\mu k_2^\nu + Ek_2^\mu k_1^\nu, \tag{2.279}$$

où l'invariance de jauge

$$\begin{aligned} k_{1\mu}P_a^{\mu\nu} &= 0, & (2.280)\\ k_{2\nu}P_a^{\mu\nu} &= 0, & (2.281) \end{aligned}$$

requiert

$$k_1^\nu\left[A + E(k_1k_2)\right] + C(k_1k_2)k_2^\nu = 0,$$
$$k_2^\mu\left[A + E(k_1k_2)\right] + B(k_1k_2)k_1^\mu = 0.$$

En considérant les photons sur leur couche de masse ($k_1^2 = k_2^2 = 0$), nous en déduisons :

$$\begin{aligned} B &= 0, && (2.282)\\ C &= 0, && (2.283)\\ E &= -A/(k_1 k_2). && (2.284) \end{aligned}$$

Notre expression a donc la forme générique suivante (avec D qui ne sera pas confondu avec la notation du glueball) :

$$P_a^{\mu\nu}/4M_a = I_a^{\mu\nu} = A\left(g^{\mu\nu} - \frac{k_1^\nu k_2^\mu}{k_1 k_2}\right) + D k_1^\mu k_2^\nu. \tag{2.285}$$

Il nous reste à calculer A et D, en observant que D n'interviendra pas dans l'expression finale en raison des relations (2.269, 2.276, 2.277). Nous pouvons déjà extraire de l'expression de $P_a^{\mu\nu}$ (2.275, 2.278) les termes en $g^{\mu\nu}$ et $k_1^\nu k_2^\mu$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} I_a^{\mu\nu} &= \left[k_1^\nu k_2^\mu - (k_1 k_2) g^{\mu\nu}\right] J_4^a \\ &+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g^{\mu\nu}\left[-k^2 + M_a^2\right] + 4k^\mu k^\nu}{\left[(k+k_1)^2 - M_a^2\right]\left[k^2 - M_a^2\right]\left[(k-k_2)^2 - M_a^2\right]}, \end{aligned} \tag{2.286}$$

avec J_4^a désignant une fonction intégrable à l'infini :

$$J_4^a = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[(k+k_1)^2 - M_a^2\right]\left[k^2 - M_a^2\right]\left[(k-k_2)^2 - M_a^2\right]}. \tag{2.287}$$

Nous exprimons le deuxième terme de (2.286) dans la base adéquate, et calculons les coefficients du développement :

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g^{\mu\nu}\left[-k^2 + M_a^2\right] + 4k^\mu k^\nu}{\left[(k+k_1)^2 - M_a^2\right]\left[k^2 - M_a^2\right]\left[(k-k_2)^2 - M_a^2\right]} = A'\left(g^{\mu\nu} - \frac{k_1^\nu k_2^\mu}{k_1 k_2}\right) + D' k_1^\mu k_2^\nu. \tag{2.288}$$

En multipliant les deux membres successivement par $g^{\mu\nu}$, $k_1^\nu k_2^\mu$ et $k_1^\mu k_2^\nu$, nous avons :

$$4M_a^2 J_4^a = 3A' + D'(k_1 k_2) \tag{2.289}$$

ainsi que

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1 k_2)\left[-k^2 + M_a^2\right] + 4(kk_1)(kk_2)}{\left[(k+k_1)^2 - M_a^2\right]\left[k^2 - M_a^2\right]\left[(k-k_2)^2 - M_a^2\right]} = A'(k_1 k_2) + D'(k_1 k_2)^2, \tag{2.290}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1 k_2)\left[-k^2 + M_a^2\right] + 4(kk_1)(kk_2)}{\left[(k+k_1)^2 - M_a^2\right]\left[k^2 - M_a^2\right]\left[(k-k_2)^2 - M_a^2\right]} &= A'(k_1 k_2 - k_1 k_2) + D' k_1^2 k_2^2 \\ &= 0, \end{aligned} \tag{2.291}$$

car les photons sont sur leur couche de masse. Grâce à l'égalité des membres de gauche de (2.290) et (2.291), nous en déduisons immédiatement le système de deux équations à deux inconnues :

$$3A' + (k_1 k_2) D' = 4M_a^2 J_4^a$$

$$(k_1k_2)A' + (k_1k_2)^2 D' = 0$$

qui fournit

$$\begin{aligned} A' &= 2M_a^2 J_4^a, \\ D' &= -\frac{2M_a^2}{(k_1k_2)} J_4^a. \end{aligned}$$

En regroupant (2.286) et (2.288), nous écrivons finalement :

$$P_a^{\mu\nu} = 4M_a \left[k_1^\nu k_2^\mu - (k_1k_2)g^{\mu\nu}\right] \left[1 - \frac{2M_a^2}{(k_1k_2)}\right] J_4^a. \tag{2.292}$$

Nous obtenons donc une expression convergente, à partir de l'expression divergente initiale (2.286). Ceci provient de l'annulation de l'intégrale (2.290), due à la compensation de deux infinis. Il faut toutefois noter que si nous avions placé un cut-off sur cette intégrale, nous n'aurions pas obtenu 0.

Il est intéressant de vérifier l'annulation de l'intégrale, en partant cette fois directement de son expression. Nous écrivons le numérateur différemment, en utilisant

$$\begin{aligned} 2kk_1 &= (k+k_1)^2 - M^2 - (k^2 - M^2), \\ 2kk_2 &= k^2 - M^2 - \left[(k-k_2)^2 - M^2\right]. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1k_2)\left[-k^2 + M_a^2\right] + 4(kk_1)(kk_2)}{[(k+k_1)^2 - M_a^2][k^2 - M_a^2][(k-k_2)^2 - M_a^2]} \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-(k_1k_2)}{[(k+k_1)^2 - M_a^2][(k-k_2)^2 - M_a^2]} \\ &\quad + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\left[(k+k_1)^2 - M_a^2 - (k^2 - M_a^2)\right]\left[k^2 - M_a^2 - \left((k-k_2)^2 - M_a^2\right)\right]}{[(k+k_1)^2 - M_a^2][k^2 - M_a^2][(k-k_2)^2 - M_a^2]} \\ &= -(k_1k_2)Z + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k-k_2)^2 - M_a^2} + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k+k_1)^2 - M_a^2} \\ &\quad - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 - M_a^2}{[(k+k_1)^2 - M_a^2][(k-k_2)^2 - M_a^2]} - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - M_a^2}. \end{aligned} \tag{2.293}$$

Dans cette expression, les termes ne possédant qu'un facteur au dénominateur présentent une divergence quadratique pour les grandes impulsions, tandis que Z présente une divergence logarithmique. Les troisième et cinquième termes se compensent, car lorque le cut-off tend vers l'infini, tout changement de variable n'affecte plus la régularisation. Nous décomposons le quatrième terme de la façon suivante, après avoir appliqué le changement de variable $k' = k + k_1$ (pour rappel, $q = k_1 + k_2$) :

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 - M_a^2 - 2kk_1 - k_1^2}{[k^2 - M_a^2][(k-q)^2 - M_a^2]} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k-q)^2 - M_a^2} \\ &\quad - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2kk_1}{[k^2 - M_a^2][(k-q)^2 - M_a^2]}. \end{aligned}$$

Le deuxième terme du membre de droite se simplifie avec le terme similaire qui subsistait dans (2.293), et il nous reste donc :

$$I = -(k_1k_2)Z + Z_n,$$

avec

$$Z_n = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2kk_1}{[k^2 - M_a^2]\,[(k-q)^2 - M_a^2]}.$$

Nous développons Z_n à l'aide d'un artifice de Feynman (annexe B.2) :

$$Z_n = 2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_{-1}^{1} du \; \frac{2kk_1}{\{(1+u)(k^2 - M_a^2) + (1-u)\,[(k-q)^2 - M_a^2]\}^2}.$$

L'expression entre accolade au dénominateur peut s'écrire plus simplement, après le changement de variable $k' = k - (1-u)q/2$, et nous obtenons

$$Z_n = 4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_{-1}^{1} du \; \frac{kk_1 + \frac{1}{2}(1-u)k_1q}{4\left[k^2 - M_a^2 + \frac{q^2}{4}(1-u^2)\right]^2}.$$

En se rappelant que $k_1q = k_1k_2$, et que l'intégrale du produit de kk_1 et d'une fonction paire sur tout l'espace est nulle, nous arrivons à

$$Z_n = \frac{(k_1k_2)}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_{-1}^{1} du \; \frac{(1-u)}{\left[k^2 - M_a^2 + \frac{q^2}{4}(1-u^2)\right]^2}.$$

Encore une fois, l'intégrale impaire sur u disparaît, et nous nous ramenons à

$$I = -(k_1k_2)Z + \frac{(k_1k_2)}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_{-1}^{1} du \; \frac{(1-u)}{\left[k^2 - M_a^2 + \frac{q^2}{4}(1-u^2)\right]^2}.$$

Or, nous voyons immédiatement qu'en procédant de la même façon, la fonction Z s'écrit

$$Z = \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_{-1}^{1} du \; \frac{1}{\left[k^2 - M_a^2 + \frac{q^2}{4}(1-u^2)\right]^2}.$$

On a donc bien $I = 0$.

En regroupant les équations (2.269) et (2.292), ainsi que (2.270-2.272), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{D\to\gamma\gamma} &= N_c\frac{e^2}{9}\epsilon^*_\mu(k_1)\epsilon^*_\nu(k_2)\Bigg\{5g_{Du\bar{u}}\;4M_u\left[k_1^\nu k_2^\mu - (k_1k_2)g^{\mu\nu}\right]\left(1 - \frac{2M_u^2}{(k_1k_2)}\right)J_4^u \\
&\qquad + g_{Ds\bar{s}}\;4M_s\left[k_1^\nu k_2^\mu - (k_1k_2)g^{\mu\nu}\right]\left(1 - \frac{2M_s^2}{(k_1k_2)}\right)J_4^s\Bigg\} \\
&= 4N_c\frac{e^2}{9}\epsilon^*_\mu(k_1)\epsilon^*_\nu(k_2)\Bigg\{\left[5g_{Du\bar{u}}\;M_u\left(2M_u^2 - (k_1k_2)\right)J_4^u + g_{Ds\bar{s}}\;M_s\left(2M_s^2 - (k_1k_2)\right)J_4^s\right]g^{\mu\nu} \\
&\qquad + \left[5g_{Du\bar{u}}\;M_u\left(1 - \frac{2M_u^2}{(k_1k_2)}\right)J_4^u + g_{Ds\bar{s}}\;M_s\left(1 - \frac{2M_s^2}{(k_1k_2)}\right)J_4^s\right]k_1^\nu k_2^\mu\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Nous avons ainsi écrit l'amplitude sous la forme générique

$$\mathcal{T}_{D\to\gamma\gamma} = P\epsilon^*_\mu(k_1,\lambda_1)\epsilon^*_\nu(k_2,\lambda_2)\left\{Xg^{\mu\nu} + Yk_1^\nu k_2^\mu\right\},$$

avec

$$P = 4N_c\frac{e^2}{9} \tag{2.294}$$

et

$$X = 5g_{Du\bar{u}}M_u\left(2M_u^2 - (k_1k_2)\right)J_4^u + g_{Ds\bar{s}}M_s\left(2M_s^2 - (k_1k_2)\right)J_4^s, \tag{2.295}$$

$$Y = \frac{-X}{(k_1k_2)}. \tag{2.296}$$

Le carré de l'amplitude s'écrit donc, avec des notations abrégées,

$$|\mathcal{T}_{D\to\gamma\gamma}|^2 = 4P^2\left\{\epsilon^1_\mu\epsilon^2_\nu\left[Xg^{\mu\nu} + Yk_1^\nu k_2^\mu\right]\epsilon^1_{\mu'}\epsilon^2_{\nu'}\left[Xg^{\mu'\nu'} + Yk_1^{\nu'}k_2^{\mu'}\right]\right\}.$$

Nous devons maintenant sommer sur toutes les polarisations des photons, et en exploitant la relation

$$\sum_\lambda \epsilon^*_\mu(k,\lambda)\epsilon^*_\nu(k,\lambda) = -g_{\mu\nu}, \tag{2.297}$$

nous avons

$$\sum_{\lambda_1\lambda_2}|\mathcal{T}_{D\to\gamma\gamma}|^2 = 4P^2 g_{\mu\nu}g_{\mu'\nu'}\left[Xg^{\mu\nu} + Yk_1^\nu k_2^\mu\right]\left[Xg^{\mu'\nu'} + Yk_1^{\nu'}k_2^{\mu'}\right]. \tag{2.298}$$

Nous utilisons les relations

$$g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'}g_{\mu\nu}g_{\mu'\nu'} = 4, \tag{2.299}$$

$$g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'}g_{\mu\nu}k_{1\nu'}k_{2\mu'} = k_1k_2, \tag{2.300}$$

$$\begin{aligned} g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'}k_{1\nu}k_{2\mu}k_{1\nu'}k_{2\mu'} &= (k_1^0)^2(k_2^0)^2 - (k_1^0)^2|\vec{k_2}|^2 \\ &\quad -(k_2^0)^2|\vec{k_1}|^2 + |\vec{k_1}|^2|\vec{k_2}|^2. \end{aligned} \tag{2.301}$$

Dans le cas de deux photons sur leur couche de masse, la troisième expression est nulle, en vertu des relations

$$k_1^0 = k_2^0 = \frac{P^0}{2} \tag{2.302}$$

et

$$|\vec{k_1}| = |\vec{k_2}| = \frac{P^0}{2}, \tag{2.303}$$

où P^0 désigne la masse du méson scalaire incident.

Notons que dans le cas général de la désintégration d'un méson au repos en deux mésons de masses distinctes m_1 et m_2 (tous étant pris sur leur couche de masse), nous avons :

$$\begin{aligned}
|\vec{k_1}| &= |\vec{k_2}| \\
&= \frac{1}{4(P^0)^2}\left[\left((P^0)^2 - m_1^2 - m_2^2\right)^2 - 4m_1^2 m_2^2\right], \quad (2.304)\\
k_1^0 &= \sqrt{|\vec{k_1}|^2 + m_1^2}, \quad (2.305)\\
k_2^0 &= \sqrt{|\vec{k_2}|^2 + m_2^2}. \quad (2.306)
\end{aligned}$$

Ces relations sont obtenues à partir de la conservation de l'impulsion (méson incident au repos) :

$$\begin{aligned}
\vec{k_1} + \vec{k_2} &= \vec{0}, \\
k_1^0 + k_2^0 &= P^0.
\end{aligned}$$

L'expression (2.298) devient alors

$$\sum_{\lambda_1\lambda_2} |\mathcal{T}_{D\to\gamma\gamma}|^2 = 4P^2\left[4X^2 + 2XY(k_1k_2)\right].$$

La relation (2.296) permet d'écrire

$$\sum_{\lambda_1\lambda_2} |\mathcal{T}_{D\to\gamma\gamma}|^2 = 8P^2X^2.$$

En développant, dans le cas qui nous occupe où $m_D > 2M_u$ et $m_D < 2M_s$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda_1\lambda_2} |\mathcal{T}_{D\to\gamma\gamma}|^2 &= 8\times 16N_c^2\frac{e^4}{81}\Bigg\{\left[5g_{Du\bar{u}}M_u\left(2M_u^2 - (k_1k_2)\right)\Re e\ J_4^u + g_{Ds\bar{s}}M_s\left(2M_s^2 - (k_1k_2)\right)J_4^s\right]^2 \\
&\qquad + \left[5g_{Du\bar{u}}M_u\left(2M_u^2 - (k_1k_2)\right)\Im m\ J_4^u\right]^2\Bigg\}.
\end{aligned}$$

La largeur de désintégration est alors donnée par :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{D\to\gamma\gamma} &= \frac{1}{32\pi m_D}\sum_{\lambda_1\lambda_2}|\mathcal{T}_{D\to\gamma\gamma}|^2 \\
&= \frac{1}{32\pi m_D}\,128N_c^2\,\frac{16\pi^2\alpha^2}{81}\frac{(m_D)^4}{4} \\
&\quad\times\left\{\left[5g_{Du\bar{u}}M_u\left(1 - \frac{4M_u^2}{(m_D)^2}\right)\Re e\ J_4^u + g_{Ds\bar{s}}M_s\left(1 - \frac{4M_s^2}{(m_D)^2}\right)J_4^s\right]^2\right. \\
&\qquad\left. + \left[5g_{Du\bar{u}}M_u\left(1 - \frac{4M_u^2}{(m_D)^2}\right)\Im m\ J_4^u\right]^2\right\}, \quad (2.307)
\end{aligned}$$

où nous avons tenu compte de $k_1 k_2 = (m_D)^2/2$.
Nous avons finalement

$$\Gamma_{D\to\gamma\gamma} = \frac{16\pi\alpha^2(m_D)^3}{81}\Bigg\{25 g^2_{Du\bar{u}} M_u^2 \left(1-\frac{4M_u^2}{(m_D)^2}\right)^2 \left((\Re e\ J_4^u)^2 + (\Im m\ J_4^u)^2\right)$$
$$+ g^2_{Ds\bar{s}} M_s^2 \left(1-\frac{4M_s^2}{(m_D)^2}\right)^2 (J_4^s)^2$$
$$+10 g_{Du\bar{u}} g_{Ds\bar{s}} M_u M_s \left(1-\frac{4M_u^2}{(m_D)^2}\right)\left(1-\frac{4M_s^2}{(m_D)^2}\right) \Re e(J_4^u) J_4^s\Bigg\}. \tag{2.308}$$

Nous représentons ci-dessous les résultats obtenus pour la désintégration du glueball (de masse constante fixée à 1500 MeV), en fonction du paramètre χ_s.

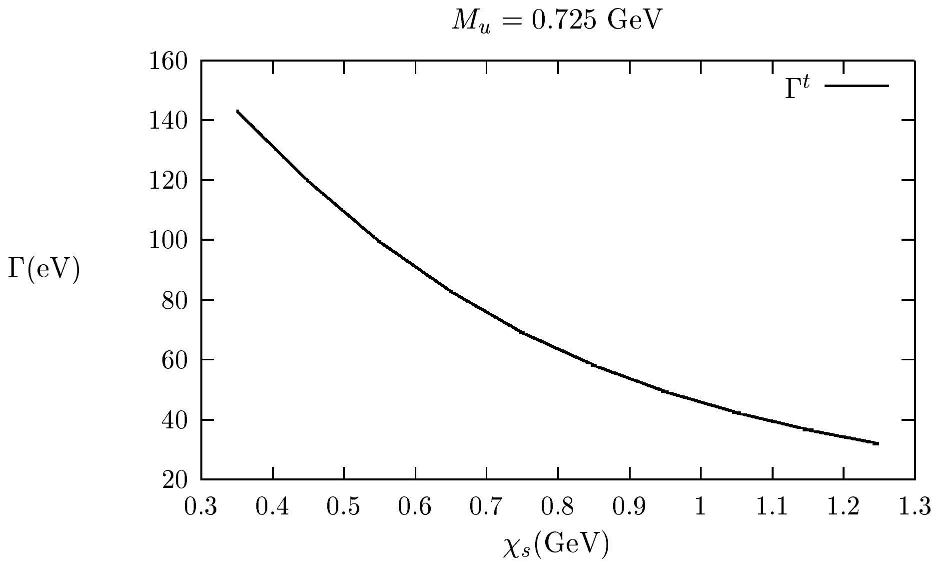

FIG. 2.23 – Largeur directe $D \to \gamma\gamma$ (d^3k ; sans cut-off)

Notons que le paramètre χ_s n'influence l'expression (2.308) que par l'intermédiaire des constantes de couplage aux quarks $g_{Du\bar{u}}$ et $g_{Ds\bar{s}}$, dont l'évolution a été représentée dans la figure 2.3. En effet, les intégrales J_4^a sont indépendantes de χ_s, que l'on place ou non un cut-off $\Lambda\chi_s$ (constant quand χ_s varie) sur ces intégrales convergentes.

La figure 2.23 montre le comportement de la largeur du glueball dans le cas où nous ne plaçons pas de cut-off sur les intégrales J_4 convergentes. Nos résultats sont comparables avec ceux de l'article [85], dans lequel le calcul en d^4k sans cut-off fournissait par exemple une valeur de 112 eV pour $\chi_s = 0.35$ GeV, contre 143 eV dans le graphique 2.23.

Nous représentons sur la figure 2.24 la largeur lorsque nous plaçons le cut-off sur toutes les intégrales, y compris les intégrales convergentes. Nous constatons une nette réduction de la largeur due à la présence du cut-off, dont on mesure une fois de plus l'importance dans notre formalisme.

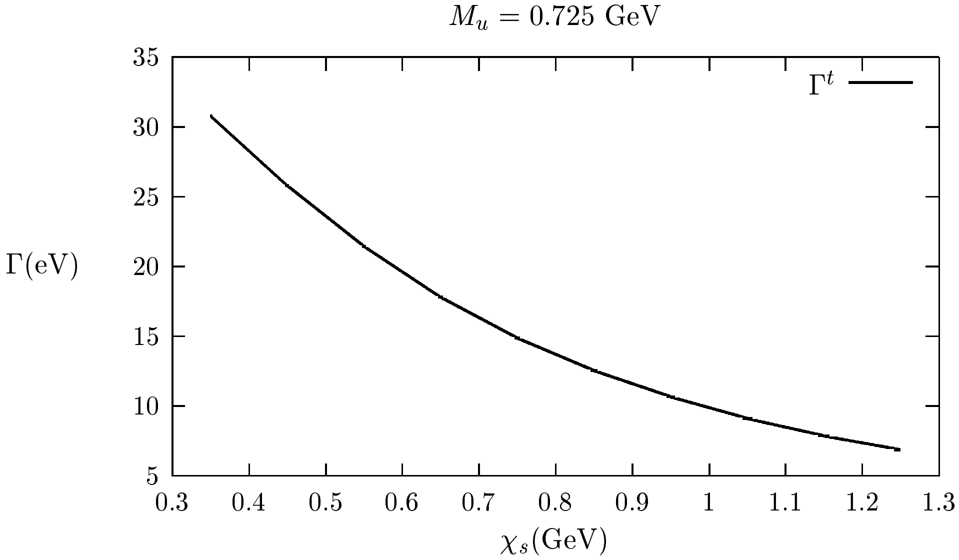

FIG. 2.24 – Largeur directe $D \to \gamma\gamma$ (d^3k ; avec cut-off)

Désintégration électromagnétique du pion

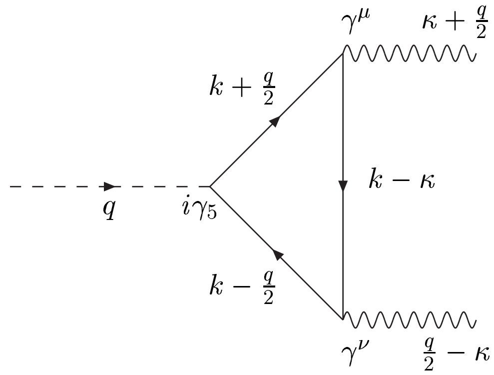

FIG. 2.25 – Désintégration électromagnétique du pion

La largeur de désintégration $\Gamma_{\pi_0\to\gamma\gamma}$ est due à l'anomalie chirale liée à la présence de fermions. Il s'agit de l'anomalie $SU(3)_A$ présente lorsqu'on considère le champ électromagnétique. Nous adoptons cette fois pour le diagramme triangulaire d'autres notations que celles de la section précédente. Les notations de la figure 2.25 sont celles utilisées par Shakin et ses collaborateurs [37, 39].

Sous l'hypothèse de symétrie d'isospin, la désintégration électromagnétique du pion ne requiert le calcul que d'une boucle triangulaire, correspondant à l'intégration sur la ligne de quark u (ou d) (figure 2.25). L'amplitude de désintégration se rapportant au diagramme direct est donnée par

$$\mathcal{T}_{\pi^0\to\gamma\gamma} = N_c(e_u^2 - e_d^2) g_{\pi q\bar{q}} \epsilon_\mu^*(\kappa + \frac{q}{2})\epsilon_\nu^*(\frac{q}{2} - \kappa) H^{\mu\nu}, \tag{2.309}$$

où $H^{\mu\nu}$ correspond à l'intégration sur la boucle triangulaire :

$$H^{\mu\nu} = \mathrm{tr}_\gamma \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(\not{k} - \not{\kappa} + M_u)\gamma^\mu(\not{k} + \frac{\not{q}}{2} + M_u)i\gamma_5(\not{k} - \frac{\not{q}}{2} + M_u)\gamma^\nu}{\left[(k+\frac{q}{2})^2 - M_u^2\right]\left[(k-\kappa)^2 - M_u^2\right]\left[(k-\frac{q}{2})^2 - M_u^2\right]}. \tag{2.310}$$

La trace dans la métrique de Minkowski se calcule aisément, et nous avons

$$\mathcal{T}_{\pi^0\to\gamma\gamma} = N_c \frac{e^2}{3} g_{\pi q\bar{q}} \epsilon_\mu^*(\kappa + \frac{q}{2})\epsilon_\nu^*(\frac{q}{2} - \kappa)\; 4M_u \epsilon^{\alpha\mu\nu\beta}\kappa^\alpha q^\beta J_4^u,$$

avec une nouvelle fois la fonction intégrable à l'infini

$$J_4^a = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[(k+\frac{q}{2})^2 - M_a^2\right]\left[(k-\kappa)^2 - M_a^2\right]\left[(k-\frac{q}{2})^2 - M_a^2\right]}. \tag{2.311}$$

Comme les photons sont pris sur leur couche de masse, et que le pion est au repos ($\vec{q} = 0$), nous avons par ailleurs, à partir des relations générales (C.5, C.7) :

$$\kappa_0 = 0, \tag{2.312}$$
$$|\vec{\kappa}| = \frac{m_\pi}{2}. \tag{2.313}$$

Le carré de l'amplitude directe aura donc la forme suivante ($q^i = 0$, $i = 1, 2, 3$) :

$$|\mathcal{T}_{\pi^0\to\gamma\gamma}|^2 = 16 M_u^2 N_c^2 \frac{e^4}{9} g_{\pi q\bar{q}}^2 m_\pi^2 (J_4^u)^2 \left|\epsilon_\mu^*\epsilon_\nu^*\epsilon^{\alpha\mu\nu 0}\kappa^\alpha \epsilon_{\mu'}^*\epsilon_{\nu'}^*\epsilon^{\alpha'\mu'\nu'0}\kappa^{\alpha'}\right|.$$

Nous calculons la somme sur les polarisations à l'aide de (2.297), en tenant compte du diagramme croisé et en développant les sommations d'indices muets :

$$\sum_{\lambda_1\lambda_2} |\mathcal{T}_{\pi^0\to\gamma\gamma}|^2 = 64 M_u^2 N_c^2 \frac{16\pi^2\alpha^2}{9} g_{\pi q\bar{q}}^2 m_\pi^2 (J_4^u)^2 2|\vec{\kappa}|^2.$$

La largeur de désintégration est donc égale à

$$\begin{aligned}\Gamma_{\pi^0\to\gamma\gamma} &= \frac{1}{32\pi m_\pi} \sum_{\lambda_1\lambda_2} |\mathcal{T}_{\pi^0\to\gamma\gamma}|^2 \\ &= \frac{16\pi\alpha^2}{9} M_u^2 N_c^2 g_{\pi q\bar{q}}^2 m_\pi^3 (J_4^u)^2. \end{aligned}\tag{2.314}$$

Le calcul de la fonction convergentes J_4 est détaillé dans l'annexe C. Avec nos paramètres en d^3k de la table 2.2, nous obtenons sans placer de cut-off

$$\Gamma_{\pi^0 \to \gamma\gamma} = 8.389 \text{ eV}.$$

Cette valeur est très proche de celle obtenue dans [83] avec une régularisation d^4k et des paramètres différents ($M_u = 300$ MeV). Nous sommes également très proches de la valeur expérimentale, qui est égale 7.70 ± 0.05 eV.

Par contre, l'introduction du cut-off dans l'intégrale convergente modifie une fois de plus le résultat de façon drastique. Nous avons

$$\Gamma_{\pi^0 \to \gamma\gamma} = 0.491 \text{ eV}. \tag{2.315}$$

Dans la référence [44], les auteurs proposent une solution au problème survenant lors du calcul des désintégrations électromagnétiques du méson π^0 dans le cadre du modèle NJL. Ils montrent qu'un résultat satisfaisant pour la largeur est obtenu si le cut-off sur les impulsions n'est pas introduit dans le calcul de l'intégrale convergente J_4^u, tandis qu'à peine la moitié de la valeur expérimentale est atteinte si le cut-off est pris en compte. Ce problème est résolu par l'introduction du couplage pseudo-scalaire - axial-vecteur à la fois pour le π^0 et le système $\eta - \eta'$. Nous ne considérons pas ce couplage dans ce travail.

Signalons également l'article [27] dans lequel est calculée la largeur électromagnétique du pion à l'aide du modèle NJL pur (avec et sans cut-off) et de notre modèle, pour lequel le cut-off n'est pas introduit dans l'intégrale convergente. Nous reprenons les résultats dans la table 2.3, avec $M_u = 0.3$ GeV.

	Exp.	NJL($\Lambda = 0.9$ GeV)	NJL($\Lambda = \infty$)	Notre modèle($\Lambda = \infty$)
$\Gamma_{\pi^0 \to \gamma\gamma}$ [eV]	7.7 ± 0.5	5.50	8.75	8.75

TAB. 2.3 – Comparaison entre différents modèles effectifs

Notre mauvais résultat obtenu en (2.315) est dû à la forte influence du cut-off sur la valeur de l'intégrale convergente J_4^u. Le résultat serait nettement meilleur si nous utilisions un cut-off plus grand, comme le montre la figure 2.26.

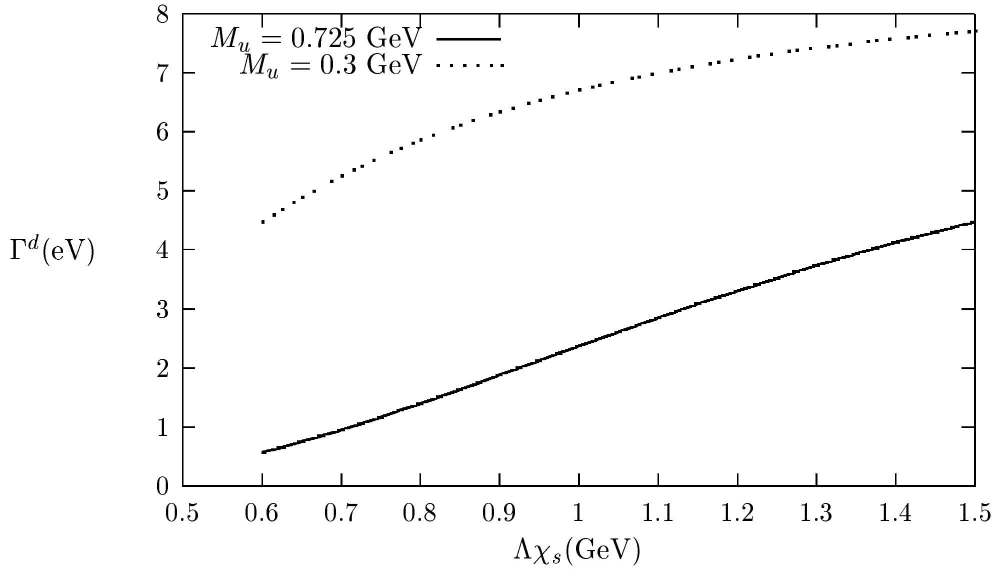

FIG. 2.26 – Dépendance de $\Gamma_{\pi^0\rightarrow\gamma\gamma}$ par rapport au cut-off sur J_4^u

Nous représentons également sur cette figure la dépendance de la largeur par rapport au cut-off avec $M_u = 0.3$ GeV, comme dans [27]. Nous constatons que les résultats sont en meilleur accord avec l'expérience si nous considérons $M_u = 0.3$ GeV. Malheureusement, notre grande masse constituante nous est imposée pour reproduire le $a_0(1450)$.

Enfin, nous évoquons la référence [24], dans laquelle les auteurs critiquent la méthode consistant à supprimer le cut-off lors de l'intégration sur la boucle triangulaire de la désintégration $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$. Ils mettent en doute la cohérence d'une telle démarche car d'après eux, une fois que le cut-off a été introduit, la théorie effective est définie et ne peux plus être modifiée lors du calcul des différentes grandeurs.

Chapitre 3

Le modèle de confinement

3.1 Historique du confinement

Deux caractéristiques fondamentales de QCD à basse énergie régissant le spectre des hadrons sont le confinement et la brisure de la symétrie chirale. Dans le secteur du plasma quarks-gluons, de nombreux travaux s'intéressent à l'existence possible de deux transitions de phase différentes, l'une associée au déconfinement, et l'autre à la restauration de la symétrie chirale. De nombreux modèles ont été construits afin de rendre compte de l'une ou l'autre de ces deux caractéristiques : le confinement dans le cas des modèles de sac [52, 53] et des modèles à potentiel non relativiste, et la brisure de la symétrie chirale dans le cas des divers modèles de Lagrangiens effectifs, comme [97, 123]. Parmi ces derniers, le modèle NJL [97, 98] et ses différentes extensions ont connu un net regain d'intérêt en raison de leur compatibilité avec de nombreuses caractéristiques importantes de QCD à basse énergie, comme les symétries de saveur des quarks en incluant des termes explicites de brisure de symétrie liés à la masse des quarks, ainsi qu'un schéma simple de brisure spontanée de la symétrie chirale. Cette brisure spontanée concerne la transition des quarks courants en quarks constituants due à l'apparition d'un condensat de quarks non nul et de bosons légers pseudo-scalaires de Nambu-Goldstone. Malheureusement, ces modèles NJL et dérivés n'incorporent pas un mécanisme fiable de confinement. Par ailleurs, plusieurs des modèles cités ci-dessus ne décrivent pas les états liés d'une façon invariante de Lorentz.

Nous décrivons ici quelques modélisations du confinement incorporées dans le modèle NJL. Les auteurs de [23] présentent une adaptation du modèle NJL incluant la condensation des gluons ainsi qu'une masse non perturbative du gluon qui fournit un mécanisme possible de confinement des quarks. Le terme d'interaction des quarks via l'échange de gluons est modifié à l'aide des transformations de Fierz et seules sont retenues les contributions singulet de couleur $q\bar{q}$. Après introduction de champs de mésons bilocaux dans les secteurs scalaire, pseudo-scalaire, vecteur et axial-vecteur, l'action effective devient bilinéaire dans les champs de quarks et l'intégration sur les degrés de liberté de quarks conduit à une action effective bilocale. Un propagateur de gluon effectif est choisi de manière à garantir dans l'espace de Minkowski l'absence d'un pôle pour le propagateur de quark. Une telle propriété est généralement considérée comme une réalisation possible du confinement des quarks.

Une généralisation non locale et covariante du modèle NJL est proposée dans [28]. Le modèle NJL décrit l'interaction des fermions via un couplage à quatre points, local et invariant chiral. La nature locale de l'interaction NJL simplifie considérablement les développements analytiques, mais conduit à des diagrammes en boucle divergents qui doivent donc être régularisés. Le schéma de régularisation fait alors partie intégrante du modèle et introduit un cut-off comme paramètre supplémentaire. De nombreuses procédures de régularisation ont été utilisées dans la littérature, comme par exemple les cut-offs à trois ou quatre dimensions sur les impulsions, ou la régularisation de Pauli-Villars (voir la deuxième référence de [79]). Toutefois, aucune de ces procédures ne présente d'interprétation claire par rapport à la théorie sous-jacente, QCD. Par exemple, placer un cut-off ultraviolet sur le propagateur de quark malmène l'espace d'Hilbert. Les auteurs de [28] montrent qu'une alternative intéressante au modèle NJL local est suggérée par le modèle en instantons étudié par Dyakonov et Petrov [61]. La non localité de l'interaction fournit un cut-off naturel aux intégrales sur les boucles de quarks, et par ailleurs cette non localité est choisie avec une forme séparable, ce qui simplifie considérablement les équations de Schwinger-Dyson et de Bethe-Salpeter en comparaison des modèles basés sur des forces quark-quark générées par échange de gluons. Les auteurs montrent de plus qu'un certain choix du facteur de forme dans cette interaction peut conduire au confinement des quarks. Ce confinement n'apparaît que pour une valeur suffisamment grande de la masse dynamique, le propagateur de quark ne possédant alors plus de pôles réels dans l'espace de Minkowski.

Buballa et Krewald [29] ont également étudié un modèle de la forme de celui développé dans [28], avec un choix différent du facteur de forme. Toutefois, ce modèle nécessite toujours un cut-off explicite car le facteur de forme ne régularise pas les intégrales dans les boucles fermioniques.

Un formalisme Schwinger-Dyson Bethe-Salpeter (DSBS) est appliqué à l'étude des états liés quark-antiquark dans [115]. Le formalisme DSBS sert de pont entre les modèles en quarks non relativistes et des approches plus rigoureuses, comme la théorie de jauge sur réseau. Ce formalisme peut rendre compte des principales caractéristiques de QCD, telles que la brisure de symétrie chirale, le confinement et la liberté asymptotique. Un propagateur de gluon effectif représente les interactions entre quarks, et le propagateur de quark obtenu en résolvant l'équation de Schwinger-Dyson ne présente pas de pôle réel avec $p^2 > 0$, ce qui est requis pour avoir une description du confinement.

Dans [74], est proposée une modélisation du confinement, compatible avec le respect de la symétrie chirale et également exactement covariante. A la connaissance des auteurs, leur modèle combinait pour la première fois ces trois éléments, bien qu'il existât des modèles avec symétrie chirale et confinement construits à l'aide d'un potentiel instantané, et donc non covariant. L'exacte covariance est obtenue ici en travaillant dans l'espace des impulsions, où les non-localités et les dépendances en énergie peuvent être traitées plus facilement. Le potentiel de confinement est constitué d'une partie constante, permettant d'ajuster l'échelle d'énergie, et d'une généralisation relativiste de la partie linéaire censée apparaître lors des calculs de jauge sur réseau, dans l'approximation "quenched". Ce potentiel est choisi tel que seuls les singulets de couleur soient confinés, et sa structure en spin est choisie de façon à le rendre compatible avec la symétrie chirale. Dans l'esprit du modèle de Nambu - Jona-Lasinio [97], les auteurs supposent la brisure spontanée de la symétrie chirale, conférant aux quarks une masse constituante engendrée dynamiquement via sa self-interaction avec les forces confinantes. Le pion émerge alors comme le boson de Goldstone associé avec cette brisure dynamique de la symétrie.

Cette référence [74] nous intéresse particulièrement car elle pose les bases du modèle que C.M. Shakin et ses collaborateurs ont développé et que nous adopterons dans ce chapitre. L'équation relativiste de la fonction vertex de l'état lié possède une structure de Dirac respectant la symétrie chirale, structure de Dirac que l'on retrouve dans l'équation de Hartree-Fock pour la self-énergie du quark. Cette structure n'est pas unique (voir plus loin, par exemple les confinement vecteur et axial-vecteur des travaux de Shakin *et al.*), mais elle doit conduire à une masse nulle du boson de Goldstone dans la limite chirale de la masse courante du quark. Nous disposons donc d'un modèle qui généralise la brisure dynamique de la symétrie de NJL via des interactions agissant sur une distance arbitraire, et non plus ponctuelles comme dans NJL, et ce modèle incorpore les principales caractéristiques de QCD à basse énergie, à savoir la brisure de la symétrie chirale et le confinement. Les paramètres ainsi que la structure du confinement doivent être adaptés afin de reproduire le spectre des mésons. Dans leur publication suivante [75], les deux auteurs étendent leur première approche : ils présentent de nouvelles solutions dans le secteur des quarks légers et montrent que la symétrie chirale et le confinement peuvent être réalisés de façon complètement découplée.

Enfin, nous citons deux références qui abordent les phénomènes de confinement avec des approches originales et intéressantes.

Dans [108], les auteurs ont recherché des informations sur le confinement des quarks en étudiant le propagateur de gluon dans la jauge de Landau. Dans une théorie ne confinant pas les quarks obtenue en retirant explicitement les vertex confinants, une grande partie de l'interaction attractive est supprimée dans la région des impulsions intermédiaires. Une relation est établie entre le confinement des quarks et la force infrarouge du facteur de forme gluonique dans la jauge de Landau.

V.N. Gribov étudie dans [68] la structure analytique des fonctions de Green de quark et de gluon dans le cadre de la théorie du confinement basée sur le phénomène de l'attraction super-critique des quarks légers. L'auteur discute également du problème de l'unitarité dans une théorie confinante. Dans ce travail inachevé, Gribov envisageait de mettre à jour le lien entre les interactions électro-faibles et les interactions fortes, et en particulier le rôle des pions dans le confinement, afin de présenter une solution explicite pour les états liés et de construire un modèle analytique pour les fonctions de Green de quark et de gluon correspondant au confinement.

3.2 Introduction du confinement dans le modèle

3.2.1 Action effective

L'introduction du confinement est nécessaire pour éviter les désintégrations non physiques en paires quark-antiquark qui se produisent au-dessus du seuil, diminuant la fiabilité des résultats numériques à mesure que l'on considère des énergies supérieures. L'étude des désintégrations du glueball, identifié ici à la résonance $f_0(1500)$, reste possible sans recours au confinement lorsque la masse constituante du quark u est fixée afin de reproduire le méson scalaire isovecteur $a_0(1450)$, ce qui conduit à une masse $M_u = 725$ MeV pour laquelle le glueball ne se situera que légèrement au-dessus du seuil en énergie égal à $2M_u = 1450$ MeV. Par contre, lorsque le méson scalaire isovecteur est identifié au $a_0(980)$, donnant $M_u = 490$ MeV, une étude basée sur le modèl NJL sans confinement n'a plus de sens pour des domaines en énergie de l'ordre de 1500 MeV.

Le confinement est introduit dans le modèle par incorporation au niveau du Lagrangien d'une partie confinante $\mathcal{L}_{conf}$. Cette modélisation est reprise des travaux de Shakin, dont un premier aperçu peut être trouvé dans [37, 39, 42, 43]. A l'instar de ce dernier, nous optons ici pour la forme du confinement vecteur de Lorentz (L.V. confinement), qui s'écrit

$$\mathcal{L}_{conf} = \bar{q}(x)\gamma^{\mu}q(x)V^c(x-y)\bar{q}(y)\gamma_{\mu}q(y). \tag{3.1}$$

Cette forme est la plus fréquemment rencontrée, et vérifie la symétrie chirale du Lagrangien à masses courantes nulles.

Dans un de leurs premiers articles traitant du sujet [37], Shakin *et al.* recourent à une forme de confinement baptisée forme V-A (vecteur - axial-vecteur) qui respecte également la symétrie chirale et qui s'écrit

$$\mathcal{L}_{conf} = \bar{q}(x)\gamma^{\mu}q(x)V^c(x-y)\bar{q}(y)\gamma_{\mu}q(y) - \bar{q}(x)\gamma^{\mu}\gamma_5 q(x)V^c(x-y)\bar{q}(y)\gamma_{\mu}\gamma_5 q(y). \tag{3.2}$$

Cette forme de confinement fournit des équations plus simples pour l'équation de la self-énergie des quarks (3.47, 3.48) ainsi que pour les équations des fonctions vertex, ces dernières se réduisant à une simple fonction scalaire à la place des quatre fonctions que nous devrons manipuler ici (notées Γ^{+-}, Γ^{-+}, Γ^{++} et Γ^{--}, à la fois dans les secteurs scalaire et pseudo-scalaire). Cependant, l'auteur ne recommande pas cette modélisation du confinement car il a constaté qu'elle ne donne pas des résultats satisfaisants pour l'étude du spectre des mésons. Nous nous limiterons donc au modèle de confinement vecteur.

Signalons enfin le modèle de confinement scalaire, qui a été populaire en raison de la bonne représentation des effets spin-orbite dans les systèmes de quarks lourds, mais que nous n'exploiterons pas car il ne respecte pas la symétrie chirale :

$$\mathcal{L}_{conf} = \bar{q}(x)q(x)V^c(x-y)\bar{q}(y)q(y). \tag{3.3}$$

Nous adoptons un potentiel de la forme suivante, avec r désignant le module de la grandeur tridimensionnelle $\vec{r}$:

$$V^c(r) = \kappa r \exp^{-\mu r} . \tag{3.4}$$

Nous introduisons donc deux paramètres supplémentaires dans le modèle. Le paramètre κ est la tension de corde, tandis que μ est un paramètre destiné à lisser les singularités de la transformée de Fourier de $V^c(r)$. Notons que nous n'avons pas un confinement absolu, le potentiel (3.4) atteignant son maximum $V^c_{\max} = (\kappa/\mu)e^{-1}$ en $r = \mu^{-1}$. Toutefois, les états $q\bar{q}$ dans le champ confinant sont séparés à l'intérieur de la barrière de potentiel. Nous pouvons donc trouver des états liés dans la région intérieure du potentiel jusqu'à des énergies égales à $E_{\max} = M_a + M_b + V^c_{\max}$, M_a et M_b étant les masses constituantes. Si le paramètre μ est suffisamment petit (de l'ordre de quelques centièmes de GeV), l'expression (3.4) s'assimile à un potentiel linéaire sur une distance de plusieurs fermis, toute réduction de μ permettant d'obtenir une meilleure approximation d'un potentiel linéaire. Autrement dit, pour des niveaux d'énergie en-deçà de $V^c_{\max}$ (de l'ordre du GeV avec nos paramètres), $V^c(r)$ se comporte pratiquement comme le potentiel linéaire $V(r) = \kappa r$. D'autre part, les effets de pénétration de la barrière de potentiel sont négligeables [42]. Il faut noter, comme indiqué dans [41], que les facteurs relativistes intervenant dans nos équations portent la valeur *effective* de $V^c_{\max}$ à un niveau supérieur. Avec les valeurs $\kappa = 0.0575$ GeV^2 et $\mu = 0.02$ GeV que nous utiliserons fréquemment dans la suite, nous avons $V^c_{\max} = 1.06$ GeV et la valeur effective du maximum est portée à environ 1.7 GeV. Nous avons également $r_{max} \approx 10$ fm.

La transformée de Fourier de (3.4) se calcule facilement (voir annexe B.6), en négligeant le transfert d'énergie via le champ confinant (induisant la non-dépendance en k^0 de V^c dans l'espace des impulsions) :

$$V^c(\vec{k} - \vec{k}') = -4\pi\kappa \left\{ \frac{2}{[(\vec{k} - \vec{k}')^2 + \mu^2]^2} - \frac{8\mu^2}{[(\vec{k} - \vec{k}')^2 + \mu^2]^3} \right\} . \tag{3.5}$$

Notons que $\triangle^2 = (\vec{k} - \vec{k}')^2$ ne décrit pas le transfert d'énergie. Si nous avions placé le quark sur sa couche de masse, nous aurions eu $\triangle^2 = -[E(\vec{k}) - E(\vec{k}')]^2 + (\vec{k} - \vec{k}')^2$. Dans [74, 75], Gross et Milana montrent qu'autoriser le transfert d'énergie nuit à la convergence des équations intégrales et nécessite l'insertion de facteurs de forme. Nous ne considérons pas cet aspect dans le cadre de ce travail.

L'introduction du potentiel de confinement (3.4) nous conduit à étudier une interaction non locale, ce qui rend plus ardu le processus de bosonisation. On peut trouver dans [119] une méthode de hadronisation basée sur le formalisme des intégrales de chemin dans le cadre des interactions non locales, qui nécessitent de manipuler des champs mésoniques non locaux. L'équation de Schwinger-Dyson (équation du gap) et l'équation de Bethe-Salpeter pour la fonction vertex quark-méson sont dérivées dans le cas d'un noyau d'interaction séparable. Dans [26], ces équations sont obtenues dans le cas d'une interaction à quatre points non locale et covariante. Ce modèle est développé par les auteurs pour pallier les insuffisances des modèles de type NJL qui implémentent l'interaction à l'aide de forces de contact. Ces modèles décrivent bien le phénomène de brisure spontanée de la symétrie chirale et reproduisent les théorèmes à basse énergie de la physique hadronique, mais ils ne sont pas appropriés pour la description des quarkonia lourds ni pour celle du spectre de masse des mésons excités, description qui peut être réalisée de façon satisfaisante par l'équation de Schrödinger non relativiste avec des potentiels confinants phénoménologiques de portée finie. Toutefois, à la fois les modèles de potentiel non relativistes et le modèle NJL relativiste n'ont qu'une région de validité en énergie limitée. Les auteurs de [26] présentent une généralisation du modèle chiral non local avec une interaction instantanée covariante, et l'introduction de champs mésoniques bilocaux covariants. Une bosonisation exacte de QCD à deux dimensions (mésons et diquarks) est présentée dans [62] à l'aide de la technique des intégrales de chemin bilocales. Les développements analytiques qui vont suivre s'inspirent notamment de ce travail.

Nous ajoutons la partie confinante (3.1) à la densité lagrangienne donnée en (1.12). Nous obtenons alors

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{q}(x)(i\partial\!\!\!/ - m^0)q(x) + G_s \sum_{i=0}^{8} \left[\left(\bar{q}(x)\frac{\lambda^i}{\sqrt{2}}q(x) \right)^2 + \left(\bar{q}(x)i\gamma_5\frac{\lambda^i}{\sqrt{2}}q(x) \right)^2 \right] \\ &\quad + \int d^4y\ \bar{q}(x)\gamma^\mu q(x)V^c(x-y)\bar{q}(y)\gamma_\mu q(y). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Nous appliquons les transformations de Fierz (voir annexe B.3) dans les trois espaces sur la partie confinante $\mathcal{L}_{conf}$ donnée en (3.1).
Dans l'espace des saveurs $SU(3)_F$, la transformée de Fierz s'obtient en utilisant la relation [62]

$$\delta_{ij}\delta_{kl} = \sum_{e=0}^{8} (\frac{\lambda^e}{\sqrt{2}})_{il}(\frac{\lambda^e}{\sqrt{2}})_{kj}. \tag{3.7}$$

Dans l'espace de couleur $SU(3)_C$, nous conservons seulement la partie singulet de couleur car dans la suite nous nous limitons à l'étude de champs mésoniques. Cela va se traduire par la mise en évidence d'un facteur $\frac{1}{3}$ devant toutes les expressions :

$$\delta_{ij}\delta_{kl} = \frac{1}{3}\delta_{il}\delta_{kj} + \text{octet}. \tag{3.8}$$

Enfin, dans l'espace de Dirac, nous avons

$$(\gamma^\mu)_{rs}(\gamma_\mu)_{tu} = (\mathbb{1})_{ru}(\mathbb{1})_{ts} + (i\gamma_5)_{ru}(i\gamma_5)_{ts} + (i\frac{\gamma^\mu}{\sqrt{2}})_{ru}(i\frac{\gamma_\mu}{\sqrt{2}})_{ts} + (i\frac{\gamma^\mu\gamma_5}{\sqrt{2}})_{ru}(i\frac{\gamma_\mu\gamma_5}{\sqrt{2}})_{ts}. \tag{3.9}$$

Il faut prendre garde que lors de la transformation de Fierz, il se produit une permutation impaire des champs de quarks, ce qui introduit un facteur (-1).

La partie confinante transformée de Fierz s'écrit donc, avec sommation sur l'indice muet e de 0 à 8, et en omettant dans la suite le signe d'intégration $\int d^4y$,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{conf} &= -\frac{1}{3}\Bigg\{ \left[\bar{q}(x)\frac{\lambda^e}{\sqrt{2}}q(y)\right] V^c(x-y) \left[\bar{q}(y)\frac{\lambda^e}{\sqrt{2}}q(x)\right] \\
&\quad + \left[\bar{q}(x)i\gamma_5\frac{\lambda^e}{\sqrt{2}}q(y)\right] V^c(x-y) \left[\bar{q}(y)i\gamma_5\frac{\lambda^e}{\sqrt{2}}q(x)\right] \\
&\quad + \left[\bar{q}(x)i\frac{\gamma^\mu}{\sqrt{2}}\frac{\lambda^e}{\sqrt{2}}q(y)\right] V^c(x-y) \left[\bar{q}(y)i\frac{\gamma_\mu}{\sqrt{2}}\frac{\lambda^e}{\sqrt{2}}q(x)\right] \\
&\quad + \left[\bar{q}(x)i\frac{\gamma^\mu\gamma_5}{\sqrt{2}}\frac{\lambda^e}{\sqrt{2}}q(y)\right] V^c(x-y) \left[\bar{q}(y)i\frac{\gamma_\mu\gamma_5}{\sqrt{2}}\frac{\lambda^e}{\sqrt{2}}q(x)\right]\Bigg\} \\
&= -\frac{1}{3}\Big\{ S^e(x,y)V^c(x-y)S^e(y,x) + P^e(x,y)V^c(x-y)P^e(y,x) \\
&\quad + V^e_\mu(x,y)V^c(x-y)V^e_\mu(y,x) + A^e_\mu(x,y)V^c(x-y)A^e_\mu(y,x)\Big\},
\end{aligned}
$$

où nous avons introduit les champs auxiliaires $S^e(x,y)$, $P^e(x,y)$, $V^e_\mu(x,y)$ et $A^e_\mu(x,y)$. Par ailleurs, nous pouvons écrire le terme d'interaction NJL sous la forme

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{int} &= G_s\sum_{e=0}^{8} \Bigg\{ \left[\bar{q}(x)\frac{\lambda^e}{\sqrt{2}}q(y)\right] \delta(x-y) \left[\bar{q}(y)\frac{\lambda^e}{\sqrt{2}}q(x)\right] \\
&\quad + \left[\bar{q}(x)i\gamma_5\frac{\lambda^e}{\sqrt{2}}q(y)\right] \delta(x-y) \left[\bar{q}(y)i\gamma_5\frac{\lambda^e}{\sqrt{2}}q(x)\right]\Bigg\} \\
&= G_s\sum_{e=0}^{8}\Big\{ S^e(x,y)\delta(x-y)S^e(y,x) + P^e(x,y)\delta(x-y)P^e(y,x)\Big\}. \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

Nous regroupons alors les termes du Lagrangien et introduisons les différents champs mésoniques à l'aide du développement suivant :

$$
\mathbb{1} = \int D\phi(x,y)D\varphi(x,y)\exp\left[i\int d^4x\int d^4y\ \varphi(x,y)\left[\phi(x,y)-f(x,y)\right]\right], \qquad (3.11)
$$

où $f(x,y)$ est la composante en quarks correspondante. Multiplier la fonctionnelle génératrice par l'identité revient à additionner au Lagrangien les termes dans l'exponentielle. Nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \bar{q}(x)\Big\{ (i\partial\!\!\!/ - m^0)\delta(x-y) - \sigma^e(x,y)\frac{\lambda^e}{\sqrt{2}} - \pi^e(x,y)i\gamma_5\frac{\lambda^e}{\sqrt{2}} - \rho^e_\mu(x,y)i\frac{\gamma_\mu}{\sqrt{2}}\frac{\lambda^e}{\sqrt{2}} \\
&\qquad - a^e_\mu(x,y)i\frac{\gamma_\mu\gamma_5}{\sqrt{2}}\frac{\lambda^e}{\sqrt{2}}\Big\}q(y) \\
&\quad + \left[G_s\delta(x-y) - \frac{1}{3}V^c(x-y)\right]\left[S^e(x,y)S^e(y,x) + P^e(x,y)P^e(y,x)\right] \\
&\quad - \frac{1}{3}V^c(x-y)\left[V^e_\mu(x,y)V^e_\mu(y,x) + A^e_\mu(x,y)A^e_\mu(y,x)\right] \\
&\quad + \sigma^e(x,y)S^e(x,y) + \pi^e(x,y)P^e(x,y) + \rho^e_\mu(x,y)V^e_\mu(x,y) + a^e_\mu(x,y)A^e_\mu(x,y).
\end{aligned}
$$

Afin d'éliminer les champs intermédiaires S, P, V_μ et A_μ, nous leur appliquons le changement de variable

$$\phi(x,y) \to \phi(x,y) + \alpha\varphi(y,x), \tag{3.12}$$

avec α donné en (3.16). Des calculs simples montrent que, sous ce changement de variable, et à la condition que

$$\begin{aligned} A(x-y) &= A(y-x), & (3.13)\\ B(x-y) &= B(y-x), & (3.14) \end{aligned}$$

l'expression générale

$$\Big[aA(x-y) + bB(x-y)\Big]\phi(x,y)\phi(y,x) + \varphi(x,y)\phi(x,y) \tag{3.15}$$

s'écrit sous la forme

$$\Big[aA(x-y) + bB(x-y)\Big]\phi(x,y)\phi(y,x) + \frac{1}{2}\,\alpha\varphi(x,y)\varphi(y,x),$$

avec α calculé pour annuler les termes en $\phi\varphi$ dans l'expression (3.15) à laquelle nous avons appliqué le changement de variable (3.12). Nous obtenons

$$\alpha = -\frac{1}{2[aA(x-y) + bB(x-y)]}. \tag{3.16}$$

L'expression finale est alors

$$\Big[aA(x-y) + bB(x-y)\Big]\phi(x,y)\phi(y,x) - \frac{1}{4}\,\frac{1}{aA(x-y) + bB(x-y)}\,\varphi(x,y)\varphi(y,x). \tag{3.17}$$

Dans notre cas, nous avons $A(x-y) = \delta(x-y)$ et $B(x-y) = V^c(x-y)$, et les conditions (3.13, 3.14) sont effectivement remplies car la fonction de potentiel est en $r = |\vec{x} - \vec{y}|$.
Le premier terme de (3.17), quadratique en ϕ, disparaît lors de l'intégration gaussienne sur ces champs. Le Lagrangien se ramène donc à la forme plus simple

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \;=\; & \bar{q}(x)\Big\{(i\partial\!\!\!/ - m^0)\delta(x-y) - \sigma_e(x,y)\frac{\lambda^e}{\sqrt{2}} - \pi_e(x,y)i\gamma_5\frac{\lambda^e}{\sqrt{2}} - \rho_{\mu e}(x,y)i\frac{\gamma_\mu}{\sqrt{2}}\frac{\lambda^e}{\sqrt{2}} \\ & \quad - a_{\mu e}(x,y)i\frac{\gamma_\mu\gamma_5}{\sqrt{2}}\frac{\lambda^e}{\sqrt{2}}\Big\}q(y) \\ & - \frac{1}{4}\frac{1}{G_s\delta(x-y) - \frac{1}{3}V^c(x-y)}\Big[\sigma^e(x,y)\sigma^e(y,x) + \pi^e x,y)\pi^e(y,x)\Big] \\ & + \frac{3}{4V^c(x-y)}\Big[\rho^e_\mu(x,y)\rho^e_\mu(y,x) + a^e_\mu(x,y)a^e_\mu(y,x)\Big]. \end{aligned}$$

Nous travaillons dans l'espace de Minkowski. L'intégration sur les champs de quarks s'effectue via la relation suivante :

$$\int dq(x)\int d\bar{q}(x)\;\exp\left[i\int d^4x\;\bar{q}(x)Oq(x)\right] = N\det O, \tag{3.18}$$

où N est une constante de normalisation que nous laissons tomber.
En exploitant

$$\ln\det O = \mathrm{Tr}\ln O, \tag{3.19}$$

nous obtenons alors l'expression de l'action effective :

$$\begin{aligned}
I &= -i\mathrm{Tr}\ln\Big\{(i\partial\!\!\!/ - m^0)\delta(x-y) - \sigma^e(x,y)\frac{\lambda^e}{\sqrt{2}} - \pi^e(x,y)i\gamma_5\frac{\lambda^e}{\sqrt{2}} - \rho^e_\mu(x,y)i\frac{\gamma_\mu}{\sqrt{2}}\frac{\lambda^e}{\sqrt{2}} \\
&\qquad - a^e_\mu(x,y)i\frac{\gamma_\mu\gamma_5}{\sqrt{2}}\frac{\lambda^e}{\sqrt{2}}\Big\} \\
&\quad - \frac{1}{4}\int d^4x\int d^4y\ \sigma^e(x,y)\ \frac{1}{G_s\delta(x-y)-\frac{1}{3}V^c(x-y)}\ \sigma^e(y,x) \\
&\quad - \frac{1}{4}\int d^4x\int d^4y\ \pi^e(x,y)\ \frac{1}{G_s\delta(x-y)-\frac{1}{3}V^c(x-y)}\ \pi^e(y,x) \\
&\quad + \frac{3}{4}\int d^4x\int d^4y\Big[\rho^e_\mu(x,y)V^{-1}(x-y)\rho^e_\mu(y,x) + a^e_\mu(x,y)V^{-1}(x-y)a^e_\mu(y,x)\Big].
\end{aligned} \tag{3.20}$$

3.2.2 Equations du gap

Les équations du gap s'obtiennent en annulant la dérivée première de l'action (3.20) par rapport aux champs de mésons, prise aux points stationnaires (équations de Schwinger-Dyson). Dans un premier temps, nous restons dans l'espace des coordonnées, puis nous passons dans celui des impulsions. Nous considérons des parties stationnaires invariantes par translation, c'est-à-dire que nous avons $\varphi^s(x,y) = \varphi^s(x-y)$. Par ailleurs, nous exploitons la relation

$$\frac{\partial}{\partial\sigma(r,s)}\int d^4x\int d^4y\ \sigma(x,y)V^{-1}(x-y)\sigma(y,x) = 2V^{-1}(r-s)\sigma(r,s), \tag{3.21}$$

en notant V pour V^c afin d'alléger la présentation. Cette dérivation nous amène à inverser l'expression matricielle

$$\begin{aligned}
D(x-y) &= (i\partial\!\!\!/ - m^0)\delta(x-y) - \sigma^s_e(x,y)\frac{\lambda^e}{\sqrt{2}} - \pi^s_e(x,y)i\gamma_5\frac{\lambda^e}{\sqrt{2}} \\
&\qquad -\rho^s_{\mu e}(x,y)i\frac{\gamma_\mu}{\sqrt{2}}\frac{\lambda^e}{\sqrt{2}} - a^s_{\mu e}(x,y)i\frac{\gamma_\mu\gamma_5}{\sqrt{2}}\frac{\lambda^e}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

L'invariance du vide par parité exige

$$\pi^s_i = 0,$$
$$a^s_{\mu i} = 0,$$

tandis que les propriétés des matrices de Gell-Mann nous permettent d'écrire

$$\sigma^s_a = 0, \quad \rho^s_{\mu a} = 0, \qquad \text{avec } a = 1,2,4,5,6,7.$$

Par ailleurs, l'expression du champs stationnaire σ_3^s montre que ce dernier est nul dans l'hypothèse de symétrie d'isospin. Il en est de même pour le champs $\rho_{\mu 3}^s$.
Nous conservons donc 4 champs stationnaires non nuls, respectivement σ_0^s, σ_8^s, $\rho_{\mu 0}^s$, $\rho_{\mu 8}^s$. La matrice $D(x-y)$ aux points stationnaires présente alors la forme diagonale suivante dans l'espace des saveurs :

$$D(r-s) = \begin{pmatrix} U & 0 & 0 \\ 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & S \end{pmatrix},$$

où

$$U = i\partial\!\!\!/ - m_u - \frac{\sigma_0^s}{\sqrt{3}} - \frac{\sigma_8^s}{\sqrt{6}} - i\frac{\gamma^\mu}{\sqrt{6}}\rho_{\mu 0}^s - i\frac{\gamma^\mu}{2\sqrt{3}}\rho_{\mu 8}^s,$$

$$S = i\partial\!\!\!/ - m_s - \frac{\sigma_0^s}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_8^s - i\frac{\gamma^\mu}{\sqrt{6}}\rho_{\mu 0}^s + i\frac{\gamma^\mu}{\sqrt{3}}\rho_{\mu 8}^s.$$

En posant

$$M_u(r-s) = m_u + \frac{\sigma_0^s}{\sqrt{3}} + \frac{\sigma_8^s}{\sqrt{6}}, \tag{3.22}$$

$$M_s(r-s) = m_s + \frac{\sigma_0^s}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_8^s, \tag{3.23}$$

ainsi que

$$B_u(r-s) = \frac{\rho_{\mu 0}^s}{\sqrt{6}} + \frac{\rho_{\mu 8}^s}{2\sqrt{3}}, \tag{3.24}$$

$$B_s(r-s) = \frac{\rho_{\mu 0}^s}{\sqrt{6}} - \frac{\rho_{\mu 8}^s}{\sqrt{3}}, \tag{3.25}$$

nous pouvons écrire de façon concise les équations relatives à chaque champ stationnaire non nul, en annulant la dérivée première par rapport à chacun de ces champs, respectivement. Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial \sigma_0^s} = 0 \Leftrightarrow \sigma_0^s &= 2\left[G_s - \frac{1}{3}V\right] iN_c \mathrm{tr}_{\lambda,\gamma} \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_0 \begin{pmatrix} U^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & U^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & S^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} iN_c \left[G_s - \frac{1}{3}V\right] \mathrm{tr}_\gamma (2U^{-1} + S^{-1}) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} iN_c \left[G_s - \frac{1}{3}V\right] \mathrm{tr}_\gamma \left(\frac{2}{i\partial\!\!\!/ - \Sigma_u} + \frac{1}{i\partial\!\!\!/ - \Sigma_s}\right),
\end{aligned}$$

où nous avons posé

$$\Sigma_a = i B\!\!\!/_a + M_a. \tag{3.26}$$

De la même façon, nous obtenons pour les trois autres champs stationnaires non nuls :

$$\sigma_8^s = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} i N_c \left[G_s - \frac{1}{3} V \right] \mathrm{tr}_\gamma \left(\frac{2}{i\not\partial - \Sigma_u} - \frac{2}{i\not\partial - \Sigma_s} \right), \tag{3.27}$$

$$\rho_{\mu 0}^s = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} N_c V \mathrm{tr}_\gamma \left(\frac{2\gamma_\mu}{i\not\partial - \Sigma_u} + \frac{\gamma_\mu}{i\not\partial - \Sigma_s} \right), \tag{3.28}$$

$$\rho_{\mu 8}^s = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} N_c V \mathrm{tr}_\gamma \left(\frac{2\gamma_\mu}{i\not\partial - \Sigma_u} - \frac{2\gamma_\mu}{i\not\partial - \Sigma_s} \right). \tag{3.29}$$

Notons que si nous posons $m_s = m_u$, σ_8^s et $\rho_{\mu 8}^s$ deviennent nuls à leur tour.

Nous pouvons maintenant écrire les équations du gap décrivant les self-energies Σ_u et Σ_s, en considérant la relation matricielle dans l'espace des saveurs :

$$\Sigma(r-s) = \frac{\lambda_0}{\sqrt{2}} \sigma_0^s(r-s) + \frac{\lambda_8}{\sqrt{2}} \sigma_8^s(r-s) + i\frac{\gamma_\mu}{\sqrt{2}} \frac{\lambda_0}{\sqrt{2}} \rho_{\mu 0}^s(r-s) + i\frac{\gamma_\mu}{\sqrt{2}} \frac{\lambda_8}{\sqrt{2}} \rho_{\mu 8}^s(r-s). \tag{3.30}$$

Cette équation matricielle fournit les équations du gap pour chacune des trois saveurs des quarks, avec bien sûr $\Sigma_u = \Sigma_d$. Nous constatons comme dans le cas sans confinement l'absence de couplage entre les composantes u et s des self-énergies, et nous obtenons

$$\Sigma_u(r-s) = 2N_c i \left[G_s - \frac{1}{3} V(r-s) \right] \mathrm{tr}_\gamma \frac{1}{i\not\partial - \Sigma_u(r-s)} + iV(r-s)\gamma^\mu \mathrm{tr}_\gamma \frac{\gamma_\mu}{i\not\partial - \Sigma_u(r-s)}, \tag{3.31}$$

$$\Sigma_s(r-s) = 2N_c i \left[G_s - \frac{1}{3} V(r-s) \right] \mathrm{tr}_\gamma \frac{1}{i\not\partial - \Sigma_s(r-s)} + iV(r-s)\gamma^\mu \mathrm{tr}_\gamma \frac{\gamma_\mu}{i\not\partial - \Sigma_s(r-s)}. \tag{3.32}$$

Ces équations sont identiques à celles que nous aurions obtenues dans le cadre de $SU(2)_F$, comme c'est le cas sans confinement [83]. Nous omettons dans la suite l'indice de saveur (u ou s) car les équations (3.31) et (3.32) n'en dépendent pas.

Nous écrivons maintenant ces équations du gap dans l'espace des impulsions. D'une facon générale, nous partons d'une équation du type

$$\sigma(r-s) = V(r-s)G(r-s),$$

que nous pouvons développer en utilisant nos conventions habituelles pour les transformées de Fourier, en posant $r - s = x$:

$$\phi(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2}\ \phi(k) e^{ikx},$$

$$\phi(k) = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^2}\ \phi(x) e^{-ikx},$$

$$\delta(y-z) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2}\ e^{ik(y-z)}.$$

Nous avons alors

$$\int \frac{d^4x}{(2\pi)^2}\,\sigma(x)e^{-ikx} = \int d^4k' \int \frac{d^4y}{(2\pi)^2}\,V(y)e^{-i(k-k')y} \int \frac{d^4z}{(2\pi)^2}\,G(z)e^{-ik'z}$$

et donc

$$\sigma(k) = \int d^4k'\, V(k-k')G(k'). \tag{3.34}$$

En considérant la forme générale suivante pour la self-énergie :

$$\Sigma(k) = B(k^2)\not{k} + M(k^2), \tag{3.35}$$

l'équation du gap dans l'espace des impulsions s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\Sigma(k) &= 2N_c i \int d^4k' \left[G_s - \frac{1}{3}V(k-k')\right] \mathrm{tr}_\gamma \frac{1}{\not{k}'[1-B(k'^2)] - M(k'^2)} \\ &\quad + i\gamma_\mu \int d^4k'\; V(k-k')\mathrm{tr}_\gamma \frac{\gamma_\mu}{\not{k}'[1-B(k'^2)] - M(k'^2)}.\end{aligned}$$

En exploitant la relation

$$\gamma^\mu \mathrm{tr}_\gamma \gamma_\mu \not{k} = 4\not{k},$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}B(k^2)\not{k} + M(k^2) &= i\int d^4k'\; \frac{4N_c n_f G_s - 4V(k-k')}{[1-B(k'^2)]^2\, k'^2 - M^2(k'^2)}\; M(k'^2) \\ &\quad + i\int d^4k'\; \frac{2V(k-k')\not{k}'[1-B(k'^2)]}{[1-B(k'^2)]^2\, k'^2 - M^2(k'^2)}.\end{aligned}$$

En identifiant les termes dans l'espace de Dirac, et en multipliant par k_μ la deuxième équation, nous avons

$$M(k^2) = i\int d^4k'\; \frac{4N_c n_f G_s - 4V(k-k')}{[1-B(k'^2)]^2\, k'^2 - M^2(k'^2)}\; M(k'^2), \tag{3.36}$$

$$B(k^2)k^2 = i\int d^4k'\; \frac{2V(k-k')(k.k')\left[1-B(k'^2)\right]}{[1-B(k'^2)]^2\, k'^2 - M^2(k'^2)}. \tag{3.37}$$

Nous retrouvons les équations (A1) et (A2) de l'appendice de [37], qui constituent les équations du gap dans le cadre du confinement vecteur.

Nous pouvons retrouver graphiquement les équations (3.36, 3.37) à partir du schéma ci-dessous :

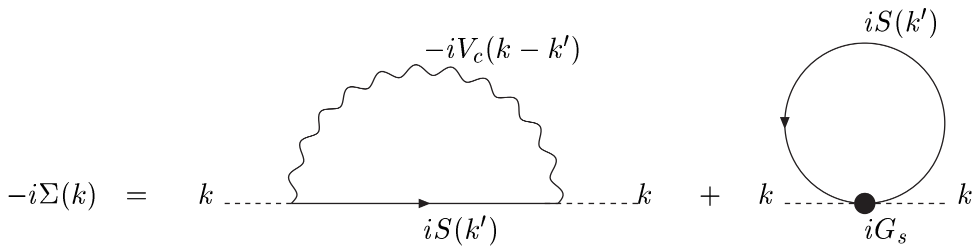

FIG. 3.1 – Equation du gap avec confinement

Avec confinement vecteur, en se reportant à la figure 3.1, nous écrivons

$$\begin{aligned} -i(B\not{k}+M) &= \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\left\{-iV^c(k-k')i\gamma^\mu \frac{i}{\not{k}'-B\not{k}'-M}i\gamma_\mu - \mathrm{tr}\; iG_s\frac{i}{\not{k}'-B\not{k}'-M}\right\} \\ &= \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\left\{V^c(k-k')i\gamma^\mu \frac{(1-B)\not{k}'+M}{(1-B)^2\not{k}'^2-M^2}i\gamma_\mu + \mathrm{tr}\; G_s\frac{(1-B)\not{k}'+M}{(1-B)^2\not{k}'^2-M^2}\right\}. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Le terme en tr est multiplié par un facteur (-1), comme l'exige l'intégration sur une boucle fermionique.
Avec

$$\gamma^\mu \not{k}'\gamma_\mu = -2\not{k}'$$

et

$$\gamma^\mu\gamma_\mu = 4\times \mathbb{1},$$

nous obtenons

$$B\not{k}+M = i\int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\left\{-V^c(k-k')\frac{-2(1-B)\not{k}'+4M}{(1-B)^2\not{k}'^2-M^2} + 4N_cn_fG_s\frac{M}{(1-B)^2\not{k}'^2-M^2}\right\}.$$

En identifiant les termes, nous avons

$$\begin{aligned} M(k^2) &= i\int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\,\frac{-4V^c(k-k')+4N_cn_fG_s}{\left[1-B(k'^2)\right]^2k'^2-M^2(k'^2)}\,M(k'^2), \qquad (3.39) \\ B(k^2)\not{k} &= 2i\int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\,\frac{\left[1-B(k'^2)\right]V^c(k-k')\not{k}'}{\left[1-B(k'^2)\right]^2k'^2-M^2(k'^2)}. \end{aligned}$$

En multipliant la deuxième égalité par $\not{k}$ et en prenant la trace, nous obtenons

$$B(k^2)k^2 = 2i\int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\,\frac{\left[1-B(k'^2)\right]V^c(k-k')(k.k')}{\left[1-B(k'^2)\right]^2k'^2-M^2(k'^2)}. \tag{3.40}$$

Nous avons donc bien retrouvé les relations (3.36, 3.37).

En se référant à [88], nous pouvons discuter plus en détail les différentes contributions aux équations (3.36) et (3.37). En effet, le premier terme du membre de droite dans (3.36) constitue le terme de Hartree, tandis que les termes comprenant le potentiel $V^c(k-k')$ sont des contributions de Fock. Dans [88], l'auteur distingue les contributions scalaires et pseudo-scalaires à la self-énergie dans $SU(2)_F$, ainsi que les composantes de Hartree et de Fock. Nous avons, dans le cas simple sans confinement, la contribution scalaire

$$\begin{aligned}\Sigma^s &= \Sigma^s_{Hartree} + \Sigma^s_{Fock} \\ &= G_s\left[\mathrm{Tr}[ig(p)] - ig(p)\right],\end{aligned} \tag{3.41}$$

avec $g(p)$ désignant le propagateur fermionique donné en (2.128) dans l'espace de Minkowski :

$$g(p) = \frac{1}{\not{p} - \Sigma} = \frac{\not{p} + \Sigma}{p^2 - \Sigma^2}.$$

Bien entendu, sans confinement, nous avons $\Sigma = C^{te} = M$, la self-énergie se ramenant à une constante identifiée à la masse constituante du modèle NJL. Quant à la self-énergie associée avec le vertex pseudo-scalaire, nous avons

$$\begin{aligned}\Sigma^{ps} &= \Sigma^{ps}_{Hartree} + \Sigma^{ps}_{Fock} \\ &= G_s\left[(i\gamma_5\vec{\tau})\mathrm{Tr}[ig(p)i\gamma_5\vec{\tau}] - (i\gamma_5\vec{\tau})ig(p)i\gamma_5\vec{\tau}\right].\end{aligned} \tag{3.42}$$

Nous constatons directement l'annulation de la composante pseudo-scalaire du terme de Hartree, puisque $\mathrm{tr}\gamma_5 = \mathrm{tr}\gamma_5\gamma_\mu = 0$. En développant et en sommant les différentes contributions, nous obtenons

$$\Sigma = \Sigma^s + \Sigma^{ps} = iG_s\left[4N_c n_f + 2\right]\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{\Sigma}{p^2-\Sigma^2}, \tag{3.43}$$

où le deuxième terme entre crochets, appelé contribution d'échange, est la contribution de Fock. Comme le modèle NJL doit être considéré comme une théorie effective issue de QCD dans la limite des grands N_c, nous pouvons conserver le terme de Hartree comme une approximation suffisante, et ignorer la contribution de Fock qui est d'ordre N_c^{-1}. Nous nous ramenons donc au premier terme du membre de droite de (3.36), relatif à l'interaction à quatre quarks du modèle NJL.

Dans $SU(3)_F$, les calculs sont similaires, en prêtant toutefois attention au fait que la matrice des propagateurs fermioniques n'est plus multiple de la matrice unité, mais une matrice diagonale. Comme dans $SU(2)_F$, la composante pseudo-scalaire du terme de Hartree s'annule, et ce dernier se réduit donc à sa composante scalaire :

$$\begin{aligned}(\Sigma^s_{Hartree})_f &= iG_sN_c\sum_a(\lambda^a)_{ff}\sum_g\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}(\lambda^a)_{gg}\mathrm{tr}_\gamma S^g(p) \\ &= iG_s 8N_c\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{\Sigma_f}{p^2-\Sigma_f^2}.\end{aligned} \tag{3.44}$$

Nous constatons ainsi que la self-énergie d'un quark d'une saveur donnée est reliée au propagateur fermionique de cette saveur seulement, et nous retrouvons comme dans $SU(2)_F$ le premier terme du membre de droite de (3.36). Par ailleurs, dans $SU(3)_F$, nous pouvons montrer que les contributions d'échange (contributions de Fock) provenant des termes scalaire et pseudo-scalaire se compensent exactement [88], donc nous n'avons plus le terme d'échange qui apparaissait dans (3.43).

Nous nous préoccupons maintenant des termes dans (3.36) et (3.37) qui font intervenir le potentiel de confinement. Ces termes proviennent du premier terme de (3.38), que nous pouvons réécrire comme suit :

$$\begin{aligned}(B\not{k} + M) &= \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} V^c(k-k') i\gamma^\mu \frac{i}{\not{k}' - B\not{k}' - A} i\gamma_\mu \\ &= -\int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} V^c(k-k') \gamma^\mu \frac{i}{\not{k}' - B\not{k}' - A} \gamma_\mu . \end{aligned} \tag{3.45}$$

En comparant aux expressions (3.41) et (3.42), nous constatons que Shakin, de même que Gross et Milana [74], ne prennent en compte que la partie de Fock pour le confinement vecteur. Notons que nous avons bien le signe '$-$' qui apparaît dans (3.41) et (3.42) devant les parties de Fock.

Evidemment, en posant $\kappa = 0$ dans (3.36, 3.37), nous retrouvons l'équation du gap du modèle NJL, avec une self-énergie constante :

$$M = i \int \frac{d^4k^{'}}{(2\pi)^4} \; \frac{4N_c n_f G_s}{k^2 - M^2} \; M. \tag{3.46}$$

Shakin montre que pour de petites valeurs de κ, de l'ordre de celle que nous choisissons ($\kappa = 0.0575$ GeV^2), $B(k^2)$ garde une valeur très petite, et que $M(k^2)$ varie peu avec k^2. Dans [37], il obtient pour la grandeur $B(k^2)$ (adimensionnelle) des valeurs qui restent inférieures à 0.1, tandis que $M(k^2)$ est de l'ordre de 300 MeV. En vue de simplifier le formalisme, nous considérons à la manière de Shakin que $\Sigma(k) = C^{te} = M$, M dénotant la masse constituante du quark, supposée constante en bonne approximation [37].

Si nous avions adopté la forme V-A du confinement (3.2), nous aurions obtenu des équations du gap simplifiées [37], avec

$$B(k^2) = 0 \tag{3.47}$$

et

$$M(k^2) = i \int \frac{d^4k^{'}}{(2\pi)^4} \; \frac{4N_c n_f G_s + 8V^c(k-k^{'})}{k^{'2} - M^2(k^{'2})} \; M(k^{'2}). \tag{3.48}$$

En posant $\kappa = 0$ dans (3.48), nous retrouvons évidemment une fois de plus l'équation du gap sans confinement (3.46).
Signalons ici l'intéressant article [60] dans lequel la self-énergie des quarks est étudiée dans le cadre de différents modèles inspirés par le modèle NJL.

3.3 Fonctions vertex et diagrammes de polarisation

La modélisation du confinement, introduit initialement via la partie confinante $\mathcal{L}_{conf}$, se ramène en pratique à l'introduction de fonctions vertex à l'intersection des lignes de quarks. Dans le cadre du confinement vecteur, les fonctions vertex scalaire et pseudo-scalaire vérifient respectivement les équations intégrales suivantes, dans le cas où une seule saveur de quark (de masse constituante M, posée pour M_u ou M_s) est présente :

$$\bar{\Gamma}_S(P,k) \;=\; \mathbb{1} - i\int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\left[\gamma^\rho g(k'+P/2)\bar{\Gamma}_S(P,k')g(k'-P/2)\gamma_\rho V^c(\vec{k}-\vec{k}')\right], \tag{3.49}$$

$$\bar{\Gamma}_5(P,k) \;=\; \gamma_5 - i\int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\left[\gamma^\rho g(k'+P/2)\bar{\Gamma}_5(P,k')g(k'-P/2)\gamma_\rho V^c(\vec{k}-\vec{k}')\right]. \tag{3.50}$$

Les barres au-dessus des fonctions Γ indiquent que leur expression fait intervenir des matrices de Dirac. Nous constatons que ces fonctions vertex dépendent de l'énergie incidente P^0 et de l'impulsion des quarks. La notation Γ ne peut être confondue avec celle des largeurs de désintégration, les indices étant toujours explicites.

Ces équations intégrales consistent en la somme d'une série d'interactions confinantes représentées par les lignes discontinues verticales de la figure 3.2, dans laquelle le triangle plein schématise la fonction vertex, scalaire ou pseudo-scalaire (dans ce dernier cas, la matrice γ_5 remplace la matrice unité du premier terme).

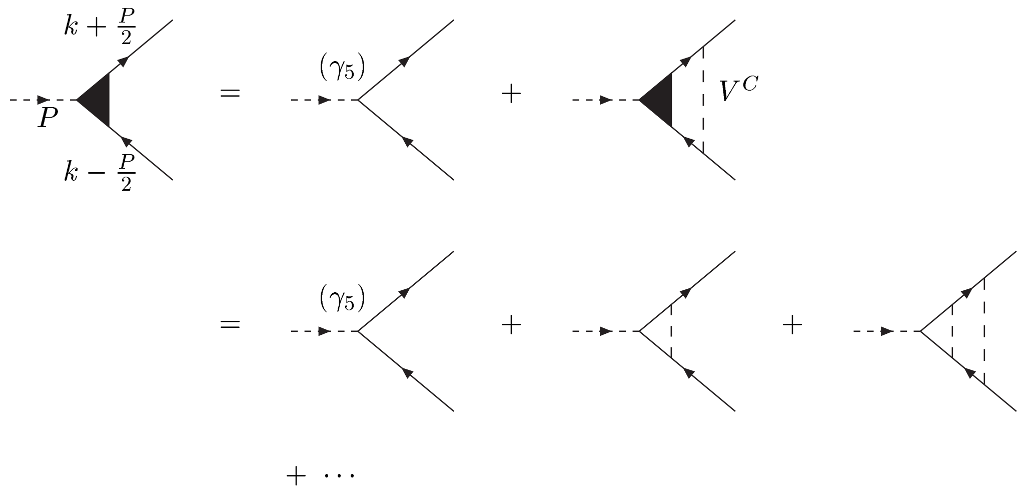

FIG. 3.2 – Fonction vertex (3.49-3.50)

Signalons dès à présent une propriété intrinsèque de notre modèle de confinement. Il est important de savoir qu'il existe des solutions pour les équations (3.49) et (3.50) lorsque nous laissons tomber le premier terme du membre de droite ("driving term"), et considérons alors des équations homogènes, qui constituent un problème aux valeurs propres. Les solutions de ces équations homogènes sont précisément les fonctions vertex des états liés dans le potentiel confinant. Comme de tels états existent, $\bar{\Gamma}_S(P,k)$ et $\bar{\Gamma}_5(P,k)$ présenteront des singularités en $q^2 = m_i^2$, où les m_i^2 sont les masses des états liés dans le champ confinant. Il s'ensuit que les diagrammes de polarisation que nous allons introduire en (3.71) et (3.72) présenteront également des pôles en $q^2 = m_i^2$. Cette propriété caractérise le problème aux états liés considéré par Gross et Milana [74].

Nous passons maintenant au calcul de ces fontions vertex. Afin de nous ramener à des grandeurs scalaires, nous définissons dans un premier temps les fonctions vertex $\Gamma_5^{+-}, \Gamma_5^{-+}, \Gamma_S^{+-}$ et Γ_S^{-+} :

$$\begin{aligned}
\Lambda^+(\vec{k})\bar{\Gamma}_5(P,k)\Lambda^-(-\vec{k}) &= \Gamma_5^{+-}(P,k)\Lambda^+(\vec{k})\gamma_5\Lambda^-(-\vec{k}), && (3.51)\\
\Lambda^-(-\vec{k})\bar{\Gamma}_5(P,k)\Lambda^+(\vec{k}) &= \Gamma_5^{-+}(P,k)\Lambda^-(-\vec{k})\gamma_5\Lambda^+(\vec{k}), && (3.52)\\
\Lambda^+(\vec{k})\bar{\Gamma}_S(P,k)\Lambda^-(-\vec{k}) &= \Gamma_S^{+-}(P,k)\Lambda^+(\vec{k})\Lambda^-(-\vec{k}), && (3.53)\\
\Lambda^-(-\vec{k})\bar{\Gamma}_S(P,k)\Lambda^+(\vec{k}) &= \Gamma_S^{-+}(P,k)\Lambda^-(-\vec{k})\Lambda^+(\vec{k}), && (3.54)
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé les opérateurs de projection de Dirac :

$$\begin{aligned}
\Lambda^+(\vec{k}) &= \frac{\not{k}+M}{2M},\ k^\mu = [E(\vec{k}),\vec{k}], && (3.55)\\
\Lambda^-(-\vec{k}) &= \frac{\tilde{\not{k}}+M}{2M},\ \tilde{k}^\mu = [-E(\vec{k}),\vec{k}], && (3.56)
\end{aligned}$$

où

$$E(\vec{k}) = \sqrt{|\vec{k}|^2 + M^2}. \tag{3.57}$$

Nous définissons également les fonctions Γ_S^{++} et Γ_S^{--}, que nous utiliserons dans la suite, par exemple en (3.85) :

$$\begin{aligned}
\Lambda^+(\vec{k})\bar{\Gamma}_S(P,k)\Lambda^+(\vec{k}) &= \Gamma_S^{++}(P,k)\Lambda^+(\vec{k})\Lambda^+(\vec{k})\\
&= \Gamma_S^{++}(P,k)\Lambda^+(\vec{k}), && (3.58)\\
\Lambda^-(-\vec{k})\bar{\Gamma}_S(P,k)\Lambda^-(-\vec{k}) &= \Gamma_S^{--}(P,k)\Lambda^-(-\vec{k})\Lambda^-(-\vec{k})\\
&= \Gamma_S^{--}(P,k)\Lambda^-(-\vec{k}). && (3.59)
\end{aligned}$$

Les opérateurs de projection interviennent dans l'expression du propagateur fermionique dans la métrique de Minkowski :

$$\begin{aligned}
g(k) &= (\not{k} - M + i\epsilon)^{-1}\\
&= \frac{M}{E(\vec{k})}\left[\frac{\Lambda^+(\vec{k})}{k^0 - E(\vec{k}) + i\epsilon} - \frac{\Lambda^-(-\vec{k})}{k^0 + E(\vec{k}) - i\epsilon}\right]. && (3.60)
\end{aligned}$$

En considérant un méson incident au repos ($\vec{P}=0$), ainsi qu'un potentiel confinant sans transfert d'énergie, l'expression (3.5) ne faisant pas intervenir k^0, nous obtenons les équations suivantes (voir annexe D) :

$$\begin{aligned}\Gamma_S^{+-}(P^0,|\vec{k}|) = 1 - 4\pi \int \frac{|\vec{k}'|^2 d|\vec{k}'|}{(2\pi)^3} \frac{-4|\vec{k}'|^2}{E(\vec{k}')} \frac{\Gamma_S^{+-}(P^0,|\vec{k}'|)}{(P^0)^2 - \left(2E(\vec{k}')\right)^2} \\ \times \left[\int_{-1}^{1} V^c(\vec{k}-\vec{k}')d(\cos\theta) + \frac{M^2}{2|\vec{k}||\vec{k}'|}\int_{-1}^{1}\cos\theta\, V^c(\vec{k}-\vec{k}')d(\cos\theta)\right]\end{aligned} \tag{3.61}$$

et

$$\Gamma_S^{-+}(P^0,|\vec{k}|) = \Gamma_S^{+-}(P^0,|\vec{k}|), \tag{3.62}$$

ainsi que

$$\Gamma_5^{+-}(P^0,|\vec{k}|) = 1 - \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\left[\frac{M^2 - 2E(\vec{k})E(\vec{k}')}{E(\vec{k})E(\vec{k}')}\right]\frac{\Gamma_5^{+-}(P^0,|\vec{k}'|)V^c(\vec{k}-\vec{k}')}{P^0 - 2E(\vec{k}')}, \tag{3.63}$$

$$\Gamma_5^{-+}(P^0,|\vec{k}|) = 1 + \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\left[\frac{M^2 - 2E(\vec{k})E(\vec{k}')}{E(\vec{k})E(\vec{k}')}\right]\frac{\Gamma_5^{-+}(P^0,|\vec{k}'|)V^c(\vec{k}-\vec{k}')}{P^0 + 2E(\vec{k}')}. \tag{3.64}$$

Comme nous l'indiquons dans l'annexe D, l'intégration sur k'^0 conduit à des équations couplées pour deux fonctions vertex, l'une avec le quark sur sa couche de masse positive (Γ^{+-}) et l'autre avec l'antiquark sur sa couche de masse négative (Γ^{-+}). Dans les références [74, 75], Gross et Milana montrent que les termes de couplage dans ces équations sont petits si les quarks ont une masse suffisamment élevée. Nous négligeons donc ces termes de couplage (donnant lieu à des "Z-graphs"), et nous nous ramenons ainsi aux équations intégrales (3.61, 3.63, 3.64), découplées pour chacune des fonctions vertex.

Ces équations intégrales sont résolues via un système d'équations linéaires obtenu par discrétisation. Signalons sans rentrer dans les détails qu'il s'agit d'équations intégrales linéaires inhomogènes de Fredholm du second type, dont la forme générique est

$$f(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)f(s)ds + g(t), \tag{3.65}$$

avec $f(t)$ désignant la fonction inconnue et $g(t)$ une fonction connue. La fonction $K(t,s)$ est appelée fonction kernel.

De telles équations sont habituellement résolues en recourant à la méthode de Nystrom, qui nécessite une règle de quadrature appropriée. Cette méthode implique un nombre d'opérations de l'ordre de $O(N^3)$, N représentant le nombre de points de discrétisation. Il convient donc de prendre une règle de quadrature d'ordre élevé pour garder N aussi petit que possible, et dans cette optique la quadrature de Gauss-Legendre est la plus efficace, du moins pour des fonctions kernel non singulières. La discrétisation aux points de quadrature s'écrit donc

$$f(t_i) = \lambda \sum_{j=1}^{N} w_j K(t_i, s_j) f(s_j) + g(t_i), \tag{3.66}$$

où w_j désigne les poids de la règle de quadrature. Nous avons donc un système de N équations linéaires à N inconnues qui peut être résolu par une méthode classique de décomposition triangulaire, telle la méthode de décomposition LU. Une fois obtenues les solutions aux points de quadrature t_i, la fonction inconnue pourra être déterminée en tout point de l'intervalle $[a, b]$ par interpolation. Afin de préserver la précision lors de l'interpolation, Nystrom préconise comme formule d'interpolation la relation initiale, c'est-à-dire

$$f(t) = \sum_{j=1}^{N} w_j K(t, s_j) f(s_j) + g(t). \tag{3.67}$$

On obtient ainsi les valeurs de $f(t)$ pour tout point situé dans l'intervalle $[a, b]$.

Bien que cette méhode ne présente pas de difficulté numérique majeure, il faut être prudent lorsque nous nous trouvons au-dessus du seuil de création d'une paire quark-antiquark, c'est-à-dire lorsque $P^0 > 2M$. En effet, dans ce cas, l'expression $P^0 - 2E(\vec{k})$ s'annule au pôle k_o :

$$k_o = \sqrt{\frac{(P^0)^2}{4} - M^2}. \tag{3.68}$$

Si k_o se situe dans l'intervalle $[a, b]$, la fonction kernel dans (3.61) et (3.63) semble devenir singulière en ce point, mais l'annulation de la fonction vertex au numérateur en ce même point va rendre le kernel fini au pôle, et permettre la résolution de l'équation intégrale. Notons que les équations du gap (3.36, 3.37) sont des équations de Fredholm non linéaires et sont beaucoup plus délicates à résoudre.

Le graphique 3.3 montre les fonctions Γ_S^{+-} (3.53) pour une énergie incidente égale à celle du glueball au repos ($P^0 = 1500$ MeV), et pour les deux masses constituantes des quarks obtenues avec les paramètres de confinement suivants :

$$\begin{aligned} \kappa &= 0.0575 \text{ GeV}^2, \qquad (3.69)\\ \mu &= 0.02 \text{ GeV}. \qquad (3.70) \end{aligned}$$

Comme nous le verrons plus loin, le choix de ces paramètres conduit à des masses constituantes M_u et M_s égales respectivement à 605 MeV et 757 MeV si nous reproduisons le $a_0(1450)$. Les valeurs (3.69) et (3.70) se rapportent à notre premier schéma de confinement, auquel nous ferons référence sous le nom de *premier schéma*.

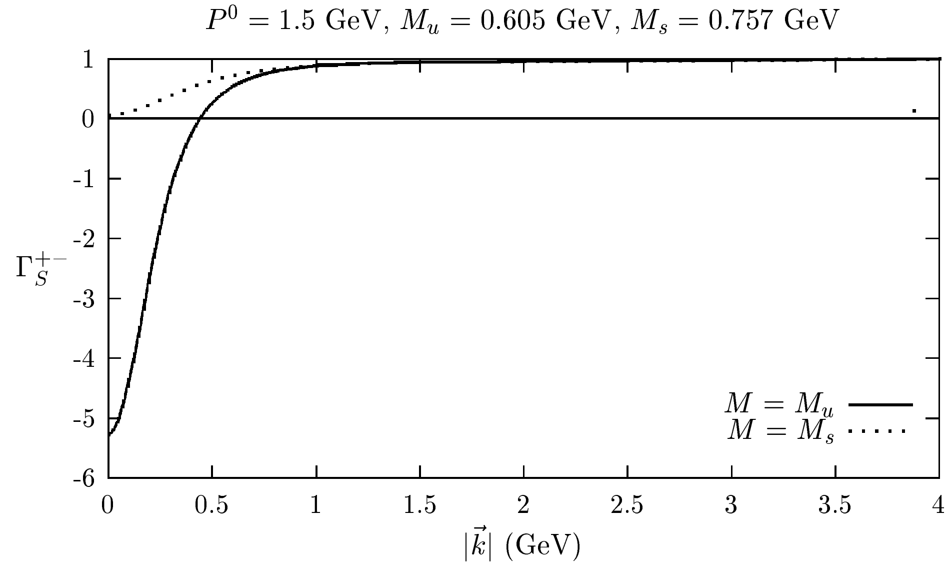

FIG. 3.3 – Vertex scalaire, premier schéma

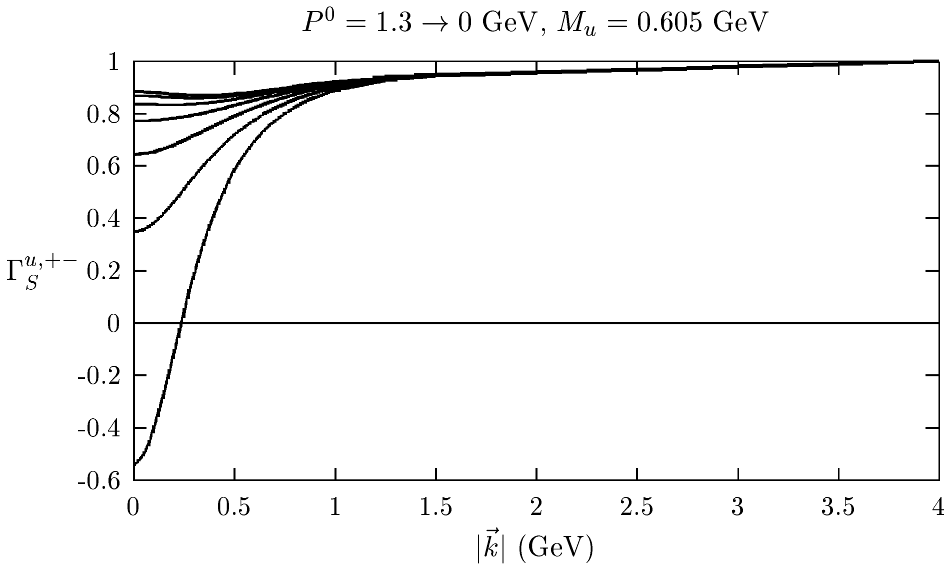

FIG. 3.4 – Comportement du vertex scalaire en fonction de P^0

L'évolution caractéristique d'une fonction vertex en fonction de l'énergie incidente est représentée sur le graphique 3.4. Celui-ci illustre que c'est uniquement lorsque P^0 est supérieur au double de la masse constituante M_u (ici pour $P^0 = 1300$ MeV) que la fonction vertex s'annule, au point $|\vec{k}| = k_o$ (3.68). Lorsque la masse de la particule tend vers 0, la fonction vertex se rapproche de l'unité, réduisant les effets du confinement. Par ailleurs, nous constatons une réduction significative de la fonction lorsque $|\vec{k}|$ devient petit, et la valeur asymptotique égale à l'unité est approchée pour tout P^0 si $|\vec{k}|$ est suffisamment grand, notre potentiel ayant une valeur maximum de l'ordre du GeV dans le cadre du premier schéma ($V_{\max} = (\kappa/\mu)e^{-1} = 1.06$ GeV en $r = \mu^{-1} = 10$ fm).

Les fonctions vertex pseudo-scalaires (3.51, 3.52) se présentent sous une forme semblable à celle des vertex scalaires, mais ont deux expressions distinctes pour $\Gamma_5^{+-}(P^0, |\vec{k}|)$ et $\Gamma_5^{-+}(P^0, |\vec{k}|)$ (3.63, 3.64). Notons que dans le premier schéma (dans lequel nous reproduisons le $a_0(1450)$ avec les paramètres (3.69, 3.70), les mésons pseudo-scalaires ne se situeront jamais au-dessus du seuil en énergie, donc nous n'aurons pas d'annulation de la fonction vertex. Par exemple, les deux graphiques suivants donnent la forme des vertex pseudo-scalaires du quark u pour le méson η' (figure 3.5) et pour le pion (figure 3.6).

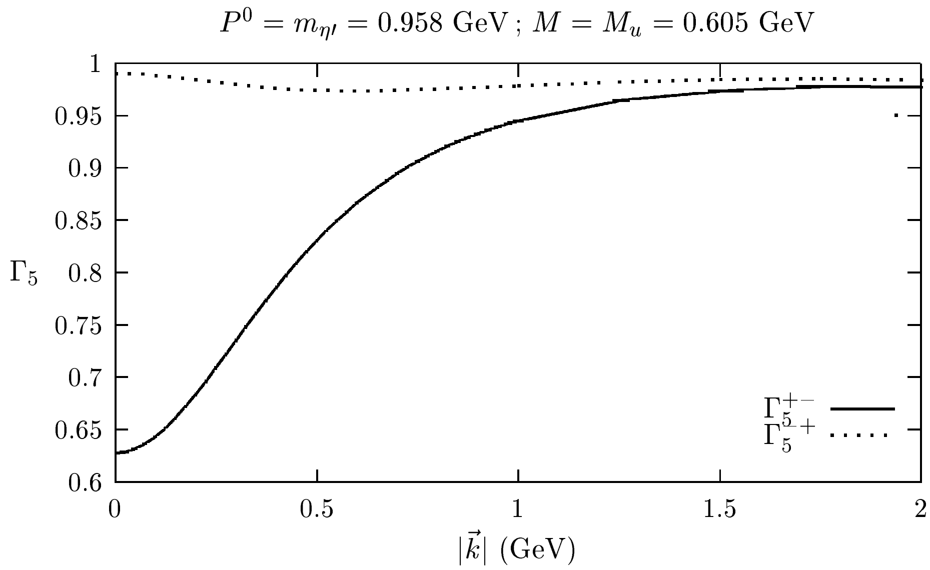

FIG. 3.5 – Vertex pseudo-scalaire, premier schéma

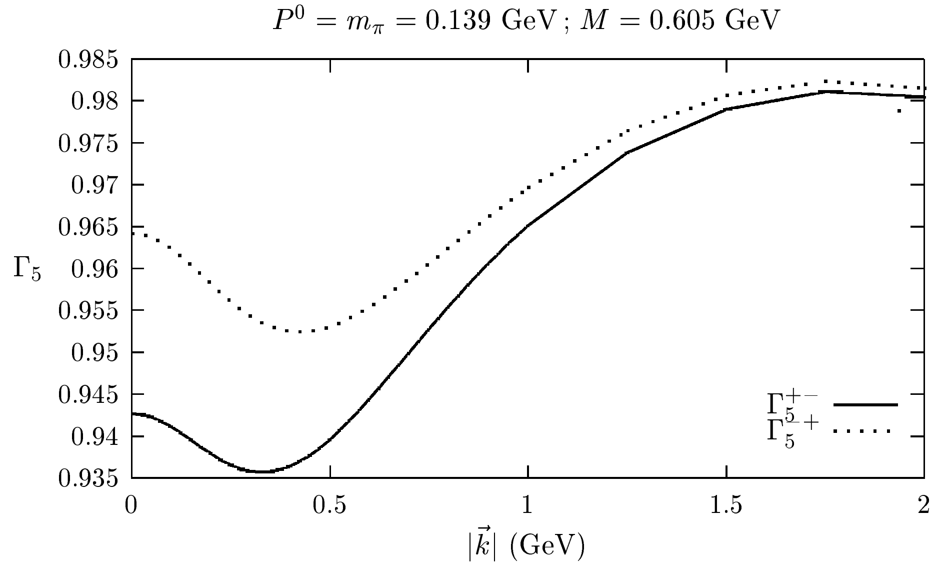

Fig. 3.6 – Vertex pseudo-scalaire, premier schéma

Nous constatons que dans le cas du pion, le vertex reste proche de 1.

Enfin, le graphique 3.7 se rapporte à un vertex pseudo-scalaire mixte, qui se trouve à la jonction de deux lignes de quarks de saveur différente, ici u et s. Ce type de vertex se présentera lors de la désintégration d'un méson scalaire en deux kaons.

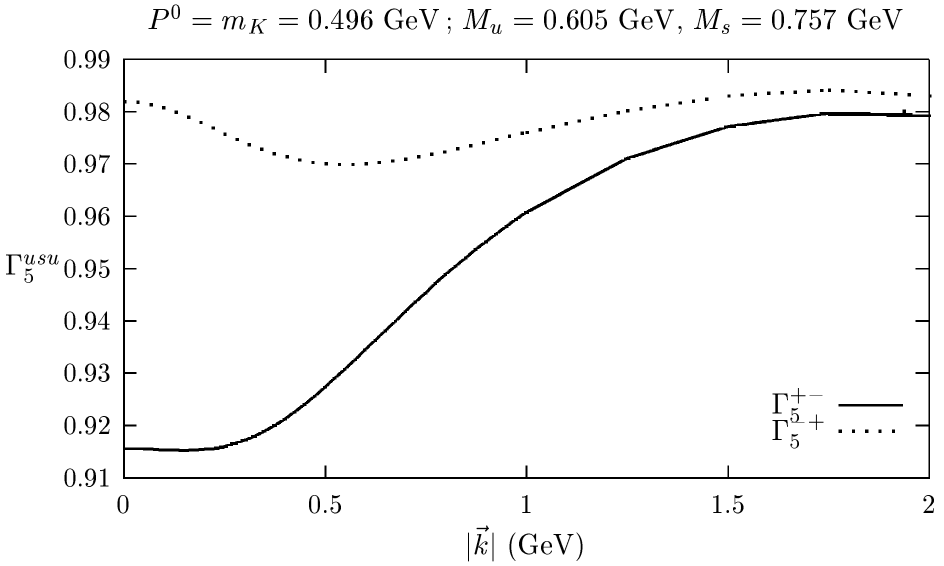

Fig. 3.7 – Vertex pseudo-scalaire mixte

Les diagrammes de polarisation, représentés par une boucle formée de deux lignes de quarks, interviennent fréquemment dans les développements analytiques, comme nous l'avons vu dans la première partie de ce travail (chapitre 2). Sans confinement, les intégrales de polarisation scalaire et pseudo-scalaire sont données dans la métrique de Minkowski en (2.126, 2.127). Nous rappelons leurs expressions :

$$\begin{aligned} J_5^a(P^0) &= -4N_c n_f \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\Lambda\chi_s} d|\vec{k}||\vec{k}|^2 \frac{E_a(\vec{k})}{(P^0)^2 - 4E_a^2(\vec{k})}, \\ J_S^a(P^0) &= -4N_c n_f \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\Lambda\chi_s} d|\vec{k}| \frac{|\vec{k}|^4}{E_a(\vec{k})\left[(P^0)^2 - 4E_a^2(\vec{k})\right]}, \end{aligned}$$

avec

$$E_a(|\vec{k}|) = \sqrt{|\vec{k}|^2 + M_a^2}.$$

Ces intégrales ont une coupure non physique lorsqu'on se situe au-dessus du seuil, c'est-à-dire, avec $\vec{P} = 0$, lorsque

$$P^2 = (P^0)^2 - |\vec{P}|^2 = (P^0)^2 > 4M_a^2.$$

Au-dessus de ce seuil de création d'une paire quark-antiquark, les intégrales sont complexes, avec une partie imaginaire croissante à mesure que l'on s'éloigne du seuil, conduisant à des résultats numériques non fiables. Ce problème est résolu par l'introduction des fonctions vertex définies précédemment (3.61, 3.62, 3.63 et 3.64) et modélisant le confinement (une fois de plus, nous ne reprenons pas l'indice de saveur) :

$$\hat{J}_S(P^2) = iN_c n_f \mathrm{tr}_\gamma \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, g(k+P/2)\bar{\Gamma}_S(P,k)g(k-P/2), \quad (3.71)$$

$$\hat{J}_5(P^2) = iN_c n_f \mathrm{tr}_\gamma \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, i\gamma_5 g(k+P/2)i\bar{\Gamma}_5(P,k)g(k-P/2). \quad (3.72)$$

La notation $\hat{J}$ désigne les intégrales de polarisation calculées avec confinement. Dans les diagrammes ci-dessous, les lignes pleines sont des propagateurs de quarks, la partie hachurée est le vertex confinant, et les lignes verticales représentent le potentiel d'interaction. La somme des diagrammes correspond à un développement perturbatif de l'interaction confinante.

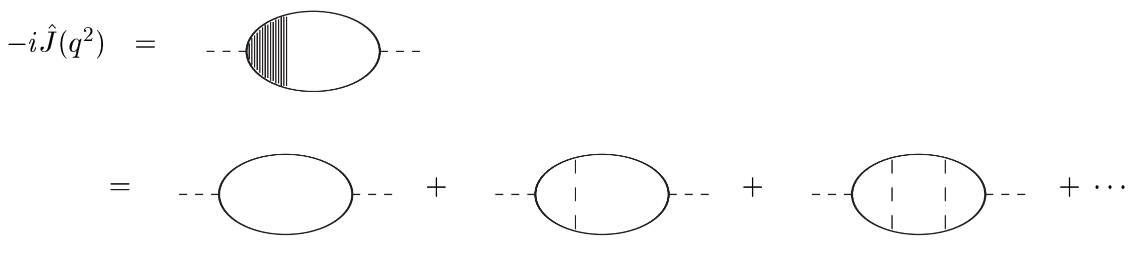

FIG. 3.8 – Diagramme de polarisation avec confinement

A l'aide des fonctions vertex exprimées en (3.61, 3.62, 3.63 et 3.64), et en considérant toujours un méson incident au repos, nous obtenons, après avoir effectué l'intégration sur k^0 (voir annexe D.1) :

$$\hat{J}_S(P_0) = -2N_c n_f \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\frac{\Gamma_S^{+-}(P_0,|\vec{k}|)}{P^0 - 2E(\vec{k})} - \frac{\Gamma_S^{-+}(P_0,|\vec{k}|)}{P^0 + 2E(\vec{k})} \right] \frac{|\vec{k}|^2}{E^2(\vec{k})}, \tag{3.73}$$

$$\hat{J}_5(P_0) = -2N_c n_f \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\frac{\Gamma_5^{+-}(P_0,|\vec{k}|)}{P^0 - 2E(\vec{k})} - \frac{\Gamma_5^{-+}(P_0,|\vec{k}|)}{P^0 + 2E(\vec{k})} \right]. \tag{3.74}$$

Une propriété fondamentale du modèle est que $\Gamma_{S,5}^{+-}(P_0,|\vec{k}|) = 0$ quand $P_0 - 2E(\vec{k}) = 0$, ce qui supprime le seuil non physique $q\bar{q}$, et permet de travailler avec des diagrammes de polarisation réels.

3.4 Détermination des paramètres. Calcul des masses et des constantes de couplage.

3.4.1 Calcul des paramètres. Etats excités radialement. Limitations du modèle.

Notre modèle généralisé contient maintenant neuf paramètres, parmi lesquels les sept paramètres du modèle non confinant de la première partie, auxquels il faut ajouter les deux paramètres de confinement κ et μ. Nous avons ainsi les masses constituantes des quarks (M_u, M_s), les forces de l'interaction NJL (G_s, b^2), le cut-off Λ, le paramètre de l'anomalie axiale ξ, le condensat de gluons χ_s, et les paramètres de confinement.

Comme dans [43], nous adoptons dans un premier temps la valeur $\kappa = 0.0575$ GeV^2. Par contre, nous considérons des valeurs différentes de μ, selon que le méson scalaire isovecteur est assimilé au $a_0(1450)$ (*premier schéma* : $\mu = 0.02$ GeV), ou au $a_0(980)$ (*deuxième schéma* : $\mu = 0.01$ GeV et $\mu = 0.0075$ GeV), pour des raisons qui seront expliquées en-dessous de l'équation (3.81).

Par ailleurs, tout comme dans le chapitre 2, six des sept paramètres restants sont ajustés pour reproduire les valeurs expérimentales des grandeurs suivantes : f_π, m_π, m_K, $m_{\eta'}$, m_{a_0} et $m_{f_0(1500)}$, données dans la table 2.1, que nous reprenons ici :

f_π(GeV)	m_π(GeV)	m_K(GeV)	$m_{\eta'}$(GeV)	m_{a_0}(GeV)	$m_{f_0(1500)}$(GeV)
0.093	0.139	0.496	0.958	1.450 (0.980)	1.5

TAB. 3.1 – Valeurs expérimentales servant à fixer les paramètres du modèle

Notons que l'introduction du confinement nous permet maintenant de reproduire le $a_0(980)$, c'est-à-dire de considérer une masse constituante M_u nettement plus petite, mais avec laquelle nous aurons quand même accès aux niveaux d'énergie de l'ordre de 1500 MeV, ce qui n'était pas le cas dans le modèle sans confinement.

Il reste donc un seul paramètre libre correspondant au champ de dilaton χ_s. Le glueball est toujours assimilé au $f_0(1500)$.

La première étape consiste, comme dans le cas sans confinement, à déterminer M_u, Λ (apparaissant dans le cut-off $\Lambda\chi_s$ des fonctions $\hat{J}$) et G_s en vérifiant l'équivalent des trois équations (2.122, 2.124, 2.125), adaptées à notre nouveau formalisme :

– La relation de Goldberger-Treiman

$$M_u = g_{\pi q\bar{q}}\ f_\pi \tag{3.75}$$

avec

$$g_{\pi q\bar{q}}^{-2} = \frac{\partial}{\partial q^2}\left[\hat{J}_5^u(q^2)\right]_{q^2=m_\pi^2}, \tag{3.76}$$

– les équations de masse pour le pion et le scalaire isovecteur a_0 :

$$1 - \frac{G_s}{\chi_s^2}\hat{J}_5^u(m_\pi^2) \quad = \quad 0, \tag{3.77}$$

$$1 - \frac{G_s}{\chi_s^2}\hat{J}_S^u(m_{a_0}^2) \quad = \quad 0. \tag{3.78}$$

La masse constituante M_s est calculée en résolvant l'équation de masse du kaon :

$$1 - \frac{G_s}{\chi_s^2}\hat{J}_5^{us}(m_K^2) = 0, \tag{3.79}$$

dans laquelle $\hat{J}_5^{us}$ est le diagramme de polarisation pseudo-scalaire contenant un propagateur de quark u et un propagateur de quark s. La constante de couplage aux quarks du kaon est donnée par :

$$g_{Ku\bar{s}}^{-2} = \frac{\partial}{\partial q^2}\left[\hat{J}_5^{us}(q^2)\right]_{q^2=m_K^2}. \tag{3.80}$$

Les forces b^2 et ξ des anomalies d'échelle et axiale, de même que la masse du méson η et les constantes de couplage aux quarks u et s de η et η', sont obtenues de la même façon que dans la première partie, en introduisant le confinement dans les diagrammes de polarisation de la matrice (2.72).

premier schéma de confinement

Nous donnons dans la table 3.2 les valeurs des paramètres et des constantes de couplage pseudo-scalaires dans le cadre du premier schéma de confinement. Le méson scalaire isovecteur est le $a_0(1450)$.

m_{a_0} (GeV)	1.45
κ (GeV^2)	0.0575
μ (GeV)	0.02
Mu (GeV)	0.605
Ms (GeV)	0.757
$\Lambda\chi_s$ (GeV)	0.643
G_s/χ_s^2 (GeV^{-2})	15.01
ξ	0.280
$m_{\eta'}$(GeV)	0.958
m_η(GeV)	0.475
$g_{\pi q\bar{q}}$	6.505
$g_{Kq\bar{q}}$	7.155
$g_{\eta' u\bar{u}}$	2.316
$g_{\eta' s\bar{s}}$	5.133
$g_{\eta u\bar{u}}$	5.059
$g_{\eta s\bar{s}}$	-4.048
$m_{\sigma 1}$ (GeV)	1.450
$m_{\sigma 2}$ (GeV)	1.785

TAB. 3.2 – Paramètres et couplages pseudo-scalaires avec confinement (premier schéma)

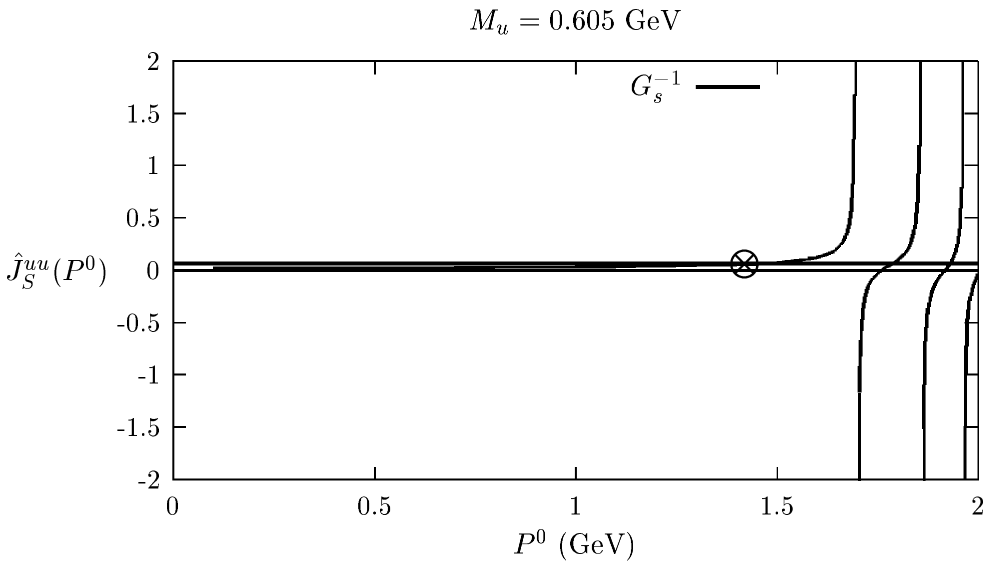

FIG. 3.9 – Etats excités du $a_0(1450)$, premier schéma

Afin d'illustrer une propriété spécifique de notre modèle de confinement, nous représentons graphiquement sur la figure 3.9 la solution de l'équation (3.78), qui correspond à l'abscisse de la première intersection de la fonction $\hat{J}^u_S$ avec la ligne horizontale représentant G_s^{-1}. Cette intersection est repérée par le signe $\otimes$ et se situe en $P^0 = 1.45$ GeV dans le cadre du premier schéma. Nous observons que le tracé des fonctions $\hat{J}_S$ en fonction de l'énergie du méson incident (P^0) présente à partir d'une certaine valeur de P^0 une succession d'asymptotes verticales, qui vont se rapprocher à mesure que P^0 augmente, rendant la détermination de $\hat{J}_S$ de moins en moins précise. Ce phénomène constitue une limitation du modèle. La limite des énergies supérieures à partir de laquelle il n'est plus possible d'obtenir des solutions aux équations vertex (3.49, 3.50) et donc de calculer les diagrammes de polarisation $\hat{J}$ est donnée par la grandeur

$$\Xi = 2M_u + \frac{\kappa}{\mu e} , \tag{3.81}$$

que Shakin nomme "limite du continuum", et qui représente une limite intrinsèque de validité du modèle. Le deuxième terme de l'expression (3.81) n'est autre que la valeur maximum du potentiel confinant (3.4).

Avec le premier schéma de confinement ($\kappa = 0.0575$ GeV^2, $\mu = 0.02$ GeV et $M_u = 0.605$ GeV), nous avons $\Xi = 2.268$ GeV et nous observons la première asymptote verticale du diagramme de polarisation du quark u en $P^0 = 1.7$ GeV. Nous pouvons jouer sur les deux paramètres de confinement κ et μ afin d'étendre le domaine d'applicabilité. Nous constatons que toute augmentation de κ se traduit par une diminution de M_u, et une augmentation de Ξ. Cette propriété est illustrée dans la table 3.3, où nous faisons varier κ en conservant $\mu = 0.02$ GeV.

κ (GeV^2)	0.01	0.02	0.04	0.0575	0.1
Mu (GeV)	0.699	0.677	0.636	0.605	0.540
$\Lambda\chi_s$ (GeV)	0.584	0.593	0.616	0.643	0.721
G_s/χ_s^2 (GeV^{-2})	20.44	19.3	17.0	15.0	11.0
Ξ (GeV)	1.581	1.721	2.008	2.268	2.919

TAB. 3.3 – Influence de la tension de corde κ, avec $\mu = 0.02$ GeV

Par ailleurs, nous observons une augmentation du cut-off et une diminution de la constante de couplage NJL. L'accroissement de la limite Ξ s'accompagne logiquement d'une translation vers la droite de la première asymptote verticale. Par exemple, si nous considérons $\kappa = 0.04$ GeV^2, la première singularité apparaît en $P^0 = 1.65$ GeV, alors que nous avons $P^0 = 1.7$ GeV avec $\kappa = 0.0575$ GeV^2 (voir figure 3.9).

L'autre possibilité consiste à réduire le paramètre μ. Nous ne considérerons pas des valeurs supérieures à $\mu = 0.02$ GeV, dans le souci de conserver un potentiel assimilable en bonne approximation à un potentiel linéaire dans la limite égale à son maximum $r_{\max} = \mu^{-1}$ $= 10$ fm si $\mu = 0.02$ GeV. En conservant $\kappa = 0.0575$ GeV^2 et en réduisant μ de moitié ($\mu = 0.01$ GeV), nous avons une (légère) réduction de M_u et une importante augmentation de Ξ :

μ (GeV)	0.02	0.01
Mu (GeV)	0.605	0.592
$\Lambda\chi_s$ (GeV)	0.643	0.635
G_s/χ_s^2 (GeV^{-2})	15.0	15.42
Ξ (GeV)	2.268	3.299

TAB. 3.4 – Influence du paramètre μ avec $\kappa = 0.0575$ GeV^2

Réduire μ permet donc d'étendre le domaine en énergie (la première asymptote ne subissant toutefois qu'une légère translation, passant de $P^0 = 1.7$ GeV à $P^0 = 1.705$ GeV), avec cependant la nécessité de plus gros efforts de calcul (augmentation du nombre de pas de discrétisation dans les équations intégrales définissant les fonctions vertex), en raison de l'expression du potentiel dans l'espace des impulsions (3.5).

Dans le cadre du premier schéma ($M_u = 605$ MeV), nous illustrons sur la figure 3.10 l'influence de la masse constituante du quark sur les fonctions diagrammes de polarisation. Nous considérons cette fois la masse constituante $M_s = 757$ MeV, et représentons le diagramme de polarisation scalaire.

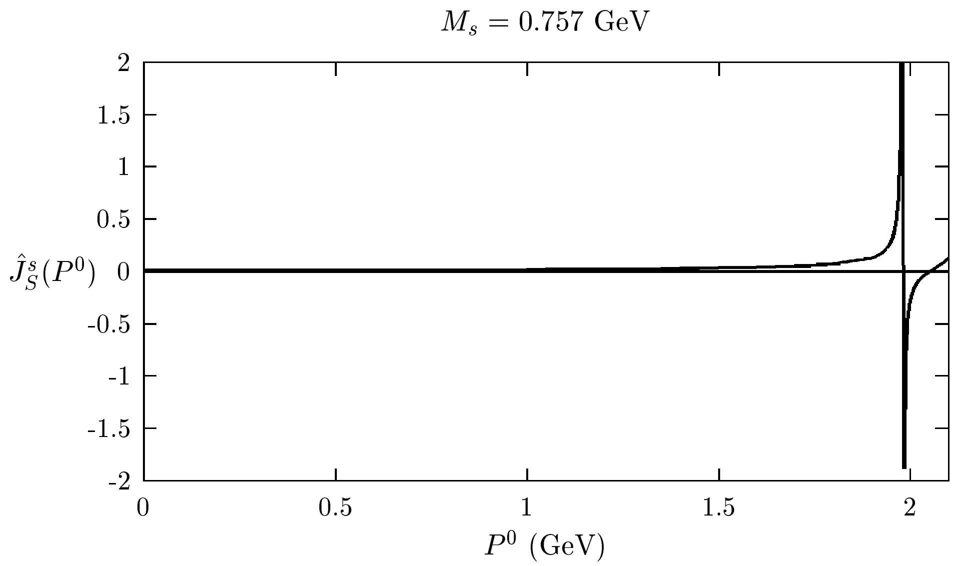

FIG. 3.10 – Diagramme de polarisation du quark s, premier schéma

Nous constatons, conformément à la relation (3.81), que la première asymptote subit par rapport au graphique 3.9 une translation vers des énergies supérieures.

Nous nous intéressons maintenant à l'équation de masse pour le pion (3.77). D'après les données expérimentales, les deux premiers états excités du pion sont respectivement $\pi(1300)$ et $\pi(1800)$. Avec les paramètres de confinement du premier schéma, nous obtenons les états excités $\pi(1750)$ et $\pi(2000)$ (repérés par des cercles sur la figure 3.11), assez éloignés des valeurs expérimentales.

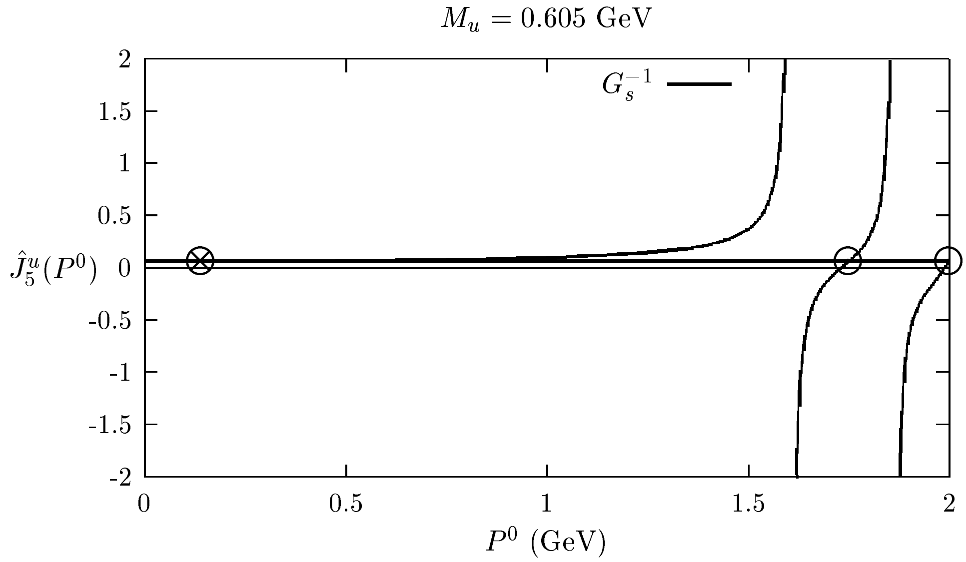

FIG. 3.11 – Etats excités du pion (premier schéma)

L'abscisse du pion $\pi(139)$ est déterminée par la première intersection des courbes, indiquée par le signe $\otimes$. Les points d'intersection des courbes correspondant aux solutions de l'équation (3.77) déterminent les énergies des états $\pi(1S)$, $\pi(2S)$ et $\pi(3S)$.

deuxième schéma de confinement

Lorsque nous assimilons le méson scalaire isovecteur au $a_0(980)$, et non plus au $a_0(1450)$, nous choisissons de conserver la valeur $\kappa = 0.0575$ GeV^2 et de réduire de moitié la valeur de μ afin de rendre plus facilement accessible le domaine en énergie du glueball (1.5 GeV). Nos paramètres de confinement sont donc [$\kappa = 0.0575$ GeV^2, $\mu = 0.01$ GeV] et nous obtenons $M_u = 0.365$ GeV. Nous appelons *deuxième schéma* ce choix de paramètres, qui donne comme limite du continuum $\Xi = 2.845$ GeV (Notons que nous aurions eu seulement $\Xi = 1.794$ GeV, avec $M_u = 0.368$ GeV, si nous avions conservé $\mu = 0.02$ GeV).

De la même façon que sur la figure 3.9, nous représentons graphiquement sur la figure 3.12 la solution de l'équation (3.78).

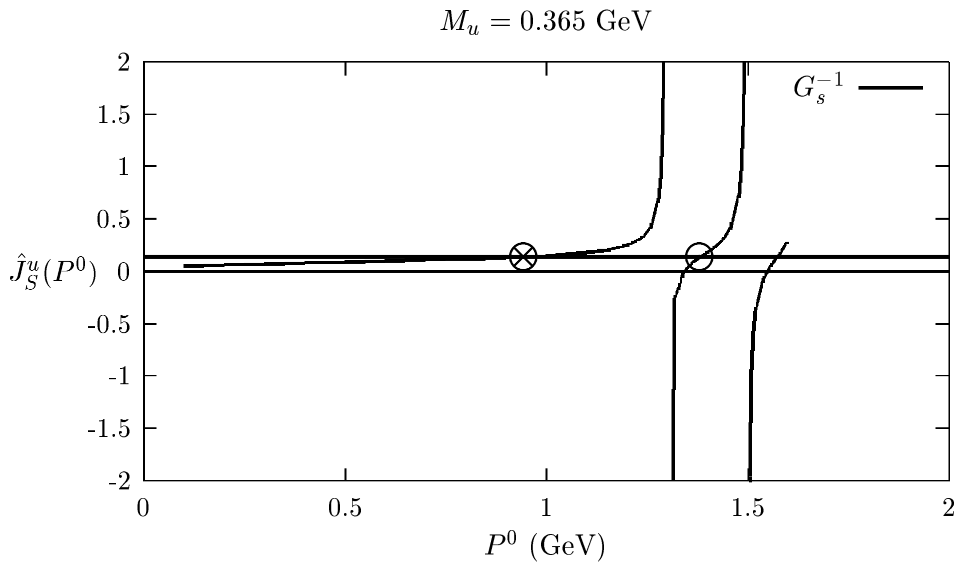

FIG. 3.12 – Etats excités du $a_0(980)$, deuxième schéma

Nous observons que la première asymptote se situe en $P^0 = 1.28$ GeV, nettement en-deçà de la valeur $P^0 = 1.7$ GeV du premier schéma. Les intersections de $\hat{J}_S^u(P^0)$ et G_s^{-1} déterminent les masses des états $a_0(1P)$, $a_0(2P)$ et $a_0(3P)$, qui sont les états $n\bar{n}$ respectivement $1\ ^3P_0$, $2\ ^3P_0$ et $3\ ^3P_0$. La première intersection des deux courbes indique la masse du méson scalaire isovecteur, ici assimilé au $a_0(980)$, tandis que le premier état excité radialement est $a_0(1385)$ (indiqué par un cercle), relativement proche de la valeur expérimentale (1.45 GeV).

Rappelons que les singularités de la fonction $\hat{J}_S(P^0)$ apparaissent pour les valeurs de P^0 solutions de l'équation (3.49) rendue homogène (voir discussion sous la figure 3.2). Ces valeurs de P^0 sont les énergies des états liés dans le champ confinant. Nous constatons que ces états sont déplacés vers des énergies inférieures quand l'interaction NJL attractive est prise en compte via les solutions de l'équation (3.78).

Dès à présent, avant même de calculer dans la section 3.4.2 les masses des mésons scalaires isoscalaires associés aux $f_0(980)$, $f_0(1370)$ et $f_0(1500)$ respectivement, nous constatons qu'un problème numérique va inévitablement se poser en raison de la position sur la figure 3.12 de la deuxième singularité de la fonction $\hat{J}_S^u$, située presque exactement en $P^0 = 1.5$ GeV. En effet, nous ne pourrons diagonaliser rigoureusement la matrice des propagateurs inverses (3.82) évaluée à la masse du glueball, et nos résultats ne seront pas fiables.

Une réponse possible à ce problème consiste à modifier un des paramètres de confinement du deuxième schéma. Nous choisissons de réduire sensiblement la valeur de μ (passant de 0.01 GeV à 0.0075 GeV) et de conserver κ (0.0575 GeV^2). Les résultats comparatifs dans le secteur pseudo-scalaire sont donnés dans la table 3.5.

	deuxième schéma	deuxième schéma bis
m_{a_0} (GeV)	0.980	0.980
κ (GeV^2)	0.0575	0.0575
μ (GeV)	0.01	0.0075
Mu (GeV)	0.365	0.362
Ms (GeV)	0.576	0.566
$\Lambda\chi_s$ (GeV)	0.807	0.822
G_s/χ_s^2 (GeV^{-2})	6.99	6.72
ξ	0.415	0.414
$m_{\eta'}$ (GeV)	0.958	0.958
m_η(GeV)	0.470	0.472
$g_{\pi q\bar{q}}$	3.925	3.892
$g_{Kq\bar{q}}$	4.279	4.042
$g_{\eta' u\bar{u}}$	1.065	1.092
$g_{\eta' s\bar{s}}$	2.916	2.831
$g_{\eta u\bar{u}}$	2.934	2.886
$g_{\eta s\bar{s}}$	-2.582	-2.605
$m_{\sigma 1}$ (GeV)	0.980	0.980
$m_{\sigma 2}$ (GeV)	1.452	1.438

TAB. 3.5 – Deuxième schéma et deuxième schéma modifié

Ce nouveau choix de paramètres augmente la région de validité du modèle, Ξ passant de 2.845 GeV à 3.544 GeV. Dans le même temps, les asymptotes du graphique (3.12) sont légèrement déplacées vers la droite, le diagramme $\hat{J}_S^u$ ne présentant plus de singularité pour $P^0 = m_D = 1.5$ GeV.

Comme sur la figure 3.11, nous représentons les états excités du pion. Les résultats sont en meilleur accord avec l'expérience dans le cadre du second schéma, qui fournit $\pi(1375)$ et $\pi(1725)$ (figure 3.13).

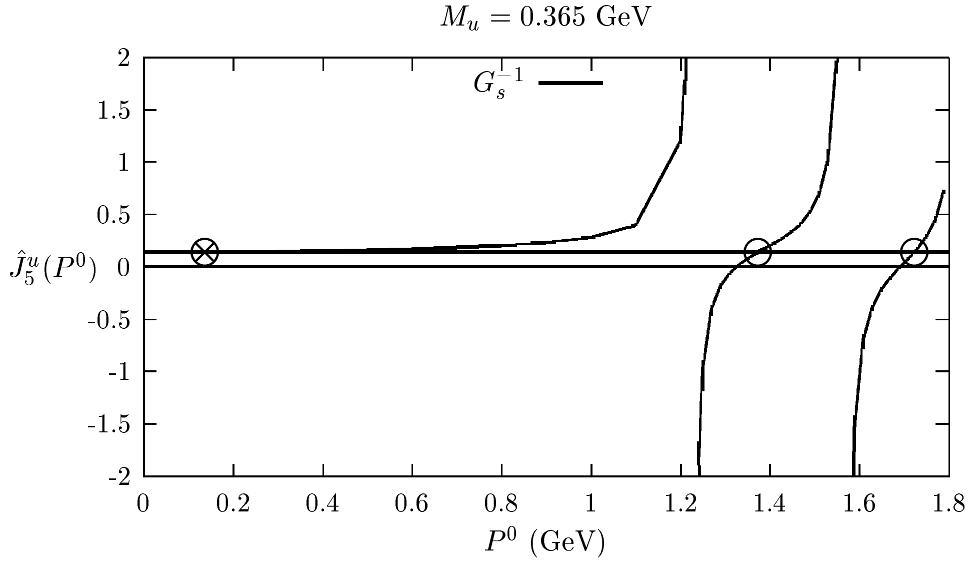

FIG. 3.13 – Etats excités du pion (deuxième schéma)

3.4.2 Secteur scalaire isoscalaire

La détermination des masses et des constantes de couplage des mésons scalaires isoscalaires se base sur la diagonalisation de la matrice des propagateurs inverses, dont l'expression avec confinement est la suivante :

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}(2\hat{J}_S^u + \hat{J}_S^s) + \frac{\chi^2}{G_s} & \frac{\sqrt{2}}{3}(\hat{J}_S^s - \hat{J}_S^u) & \Gamma^{0\chi}(\chi_s, \Lambda, G_s) \\ \frac{\sqrt{2}}{3}(\hat{J}_S^s - \hat{J}_S^u) & -\frac{1}{3}(\hat{J}_S^u + 2\hat{J}_S^s) + \frac{\chi^2}{G_s} & \Gamma^{8\chi}(\chi_s, \Lambda, G_s) \\ \Gamma^{0\chi}(\chi_s, \Lambda, G_s) & \Gamma^{8\chi}(\chi_s, \Lambda, G_s) & \Gamma^{\chi\chi}(\chi_s, \Lambda, G_s) \end{pmatrix}. \tag{3.82}$$

Ici, contrairement à la référence [86], tous les calculs sont basés sur une régularisation d^3k, requise par l'introduction du confinement. Les expressions des termes $\Gamma^{i\chi}$ sont données en (2.140, 2.141, 2.142).

Les masses des mésons scalaires dans chacun des deux schémas sont représentées sur les graphiques 3.14 et 3.18, respectivement. Des différences notables sont constatées suivant que nous considérons comme méson scalaire isovecteur le $a_0(1450)$ (premier schéma) ou le $a_0(980)$ (deuxième schéma bis). Dans le premier schéma, les mésons scalaires isoscalaires résultant du couplage avec le dilaton sont identifiés avec les résonances $f_0(1370)$ et $f_0(1710)$, tandis que dans le second, nous reproduisons les résonances $f_0(980)$ et $f_0(1370)$. Dans les deux cas, nous observons que lorsque χ_s augmente, le couplage entre les trois champs initiaux se réduit, et le système tend vers un découplage en mésons pur $u\bar{u}$ et pur $s\bar{s}$. Ce découplage progressif se manifeste aussi dans les tracés des constantes de couplage aux quarks. Dans le cas du dilaton, le couplage aux quarks u et s se réduit quand χ_s augmente, tandis que le couplage à l'état de pur glu grandit, comme nous pouvons l'observer sur les

figures 3.15 et 3.19. En comparant ces deux graphiques, nous notons la très nette réduction en module du couplage au quark u, et l'augmentation du couplage au quark s, quand nous passons au schéma reproduisant le $a_0(980)$.
Les graphiques se rapportant au premier schéma de confinement sont donnés ci-dessous.

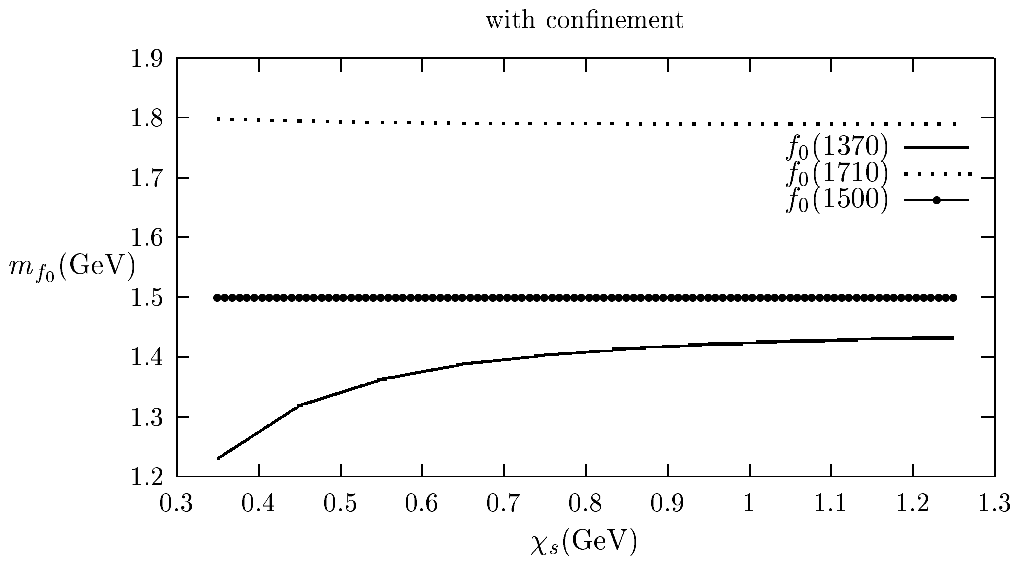

FIG. 3.14 – Masses des mésons scalaires isoscalaires (premier schéma)

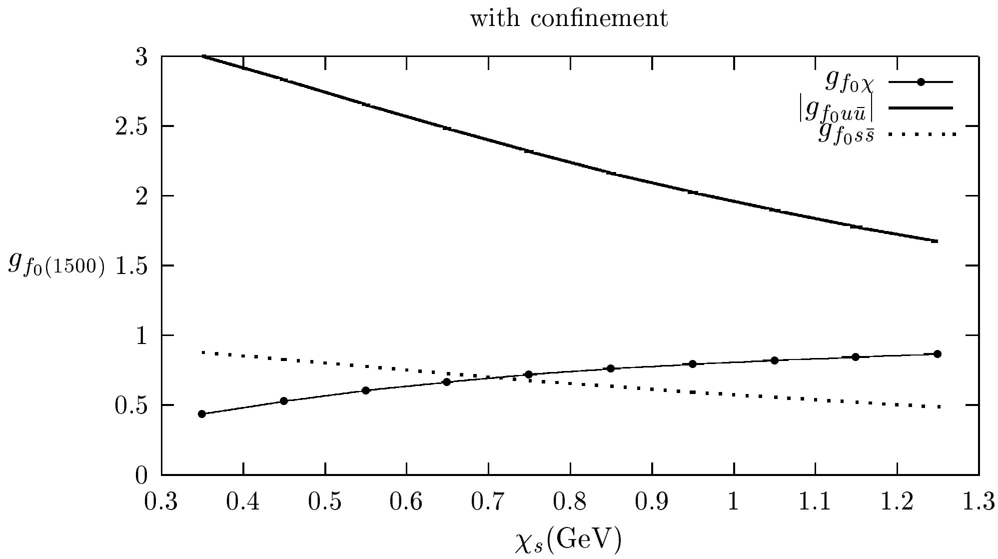

FIG. 3.15 – Constantes de couplage du dilaton $f_0(1500)$ (premier schéma)

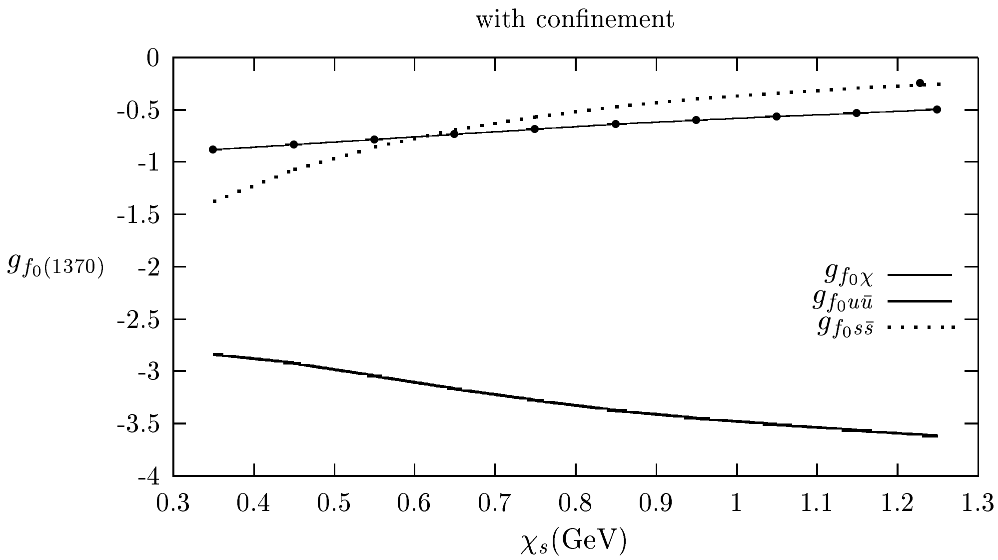

FIG. 3.16 – Constantes de couplage du $f_0(1370)$ (premier schéma)

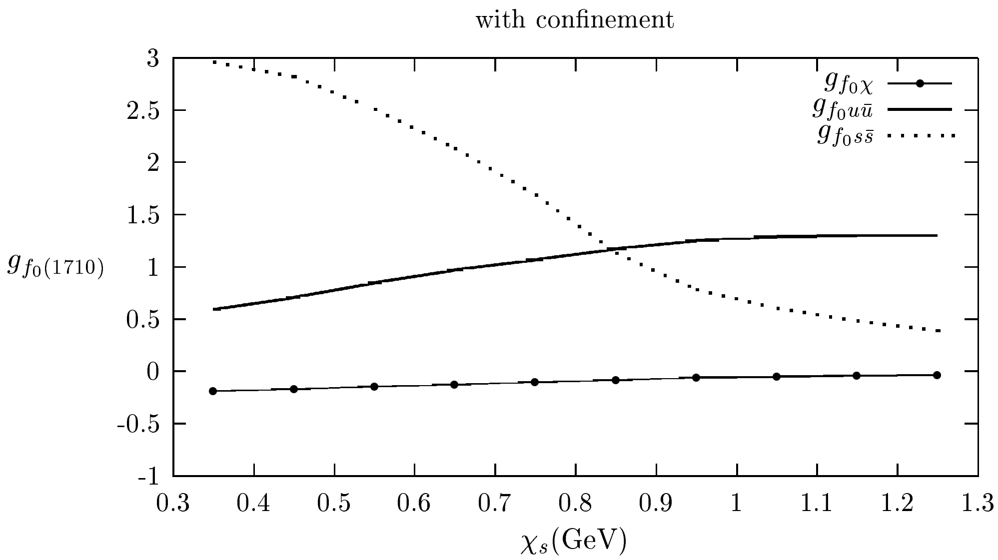

FIG. 3.17 – Constantes de couplage du $f_0(1710)$ (premier schéma)

Le graphique 3.14 fournit la dépendance en χ_s des masses des trois mésons scalaires isoscalaires, et sur les figures 3.15 à 3.17 nous représentons les constantes de couplage aux quarks du dilaton $f_0(1500)$, du $f_0(1370)$ et du $f_0(1710)$, respectivement.

Nous constatons que les résultats relatifs au $f_0(1710)$ ne sont pas en accord avec le découplage vers un état pur $s\bar{s}$, la constante de couplage au quark u augmentant, tandis que celle relative au quark s diminue. Ce comportement paradoxal est dû au comportement de la fonction $\hat{J}_S^u$ (voir graphique 3.9) qui, dans la région en énergie située au-delà de la première asymptote verticale (située en $P^0 = 1.7$ GeV), présente une pente pouvant subir des variations brusques en fonction de P^0. Nous atteignons ici une limite de notre modèle de confinement, qui fournit des résultats en opposition avec nos prévisions lorsque nous calculons les constantes de couplage du $f_0(1710)$. Nous avons vérifié que ce phénomène subsiste lorsque nous adoptons d'autres jeux de paramètres, par exemple [$\kappa = 0.0575$ GeV^2, $\mu = 0.01$ GeV] qui fournit $M_u = 0.592$ GeV, ou [$\kappa = 0.04$ GeV^2, $\mu = 0.02$ GeV] qui fournit $M_u = 0.636$ GeV.

Nous passons maintenant au deuxième schéma (bis) de confinement, qui utilise les paramètres de la troisième colonne de la table 3.5 et dans lequel nous reproduisons cette fois le $a_0(980)$. Nous représentons les masses et les constantes de couplage sur les figures 3.18 et 3.19-3.21, respectivement. Nous constatons cette fois un découplage adéquat vers des états respectivement pur glu, pur $u\bar{u}$ et pur $s\bar{s}$. Signalons en particulier sur la figure 3.19 la nette réduction du couplage $g_{Du\bar{u}}$ par rapport au premier schéma (figure 3.15), le glueball étant cette fois fortement couplé au quarkonium pur $s\bar{s}$ dont la masse est très proche (1.438 GeV).

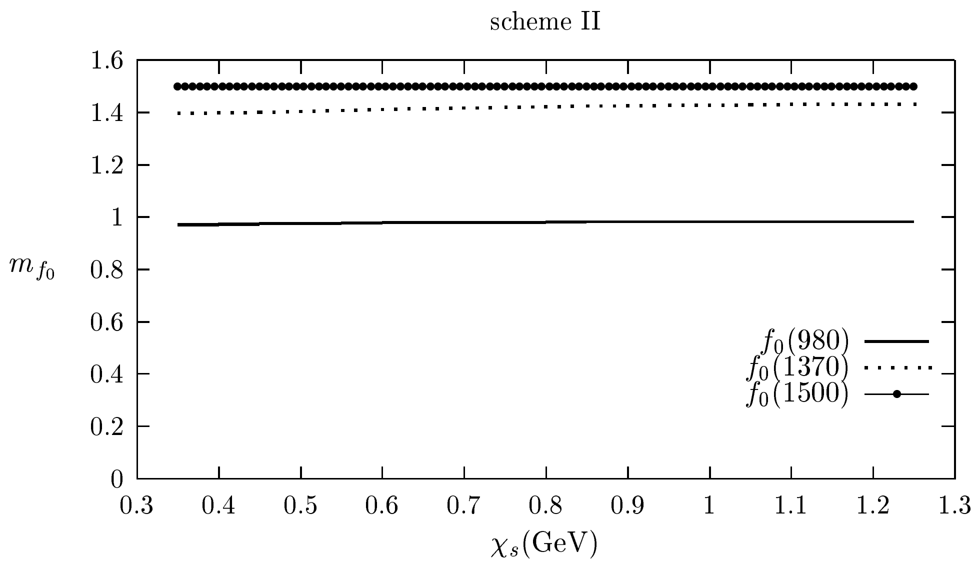

FIG. 3.18 – Masses des mésons scalaires isoscalaires (deuxième schéma bis)

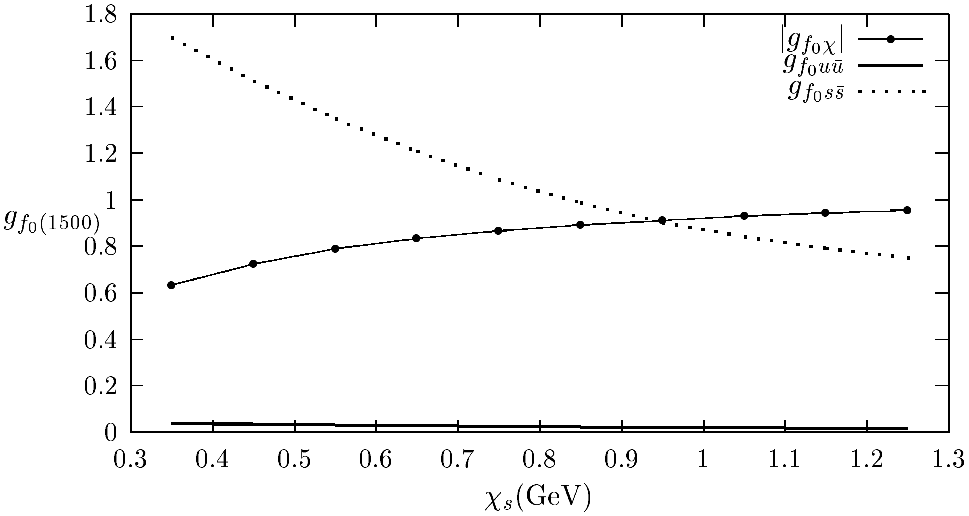

FIG. 3.19 – Constantes de couplage du dilaton $f_0(1500)$ (deuxième schéma bis)

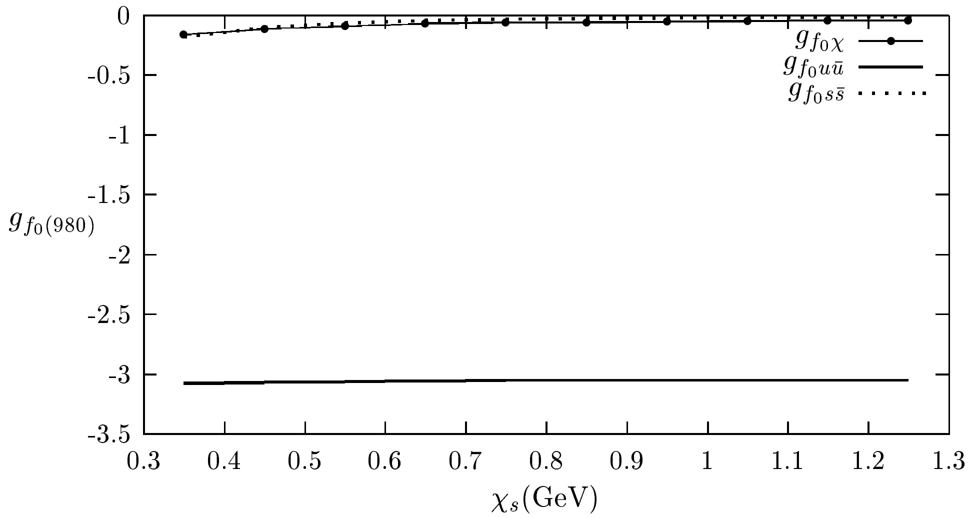

FIG. 3.20 – Constantes de couplage du $f_0(980)$ (deuxième schéma bis)

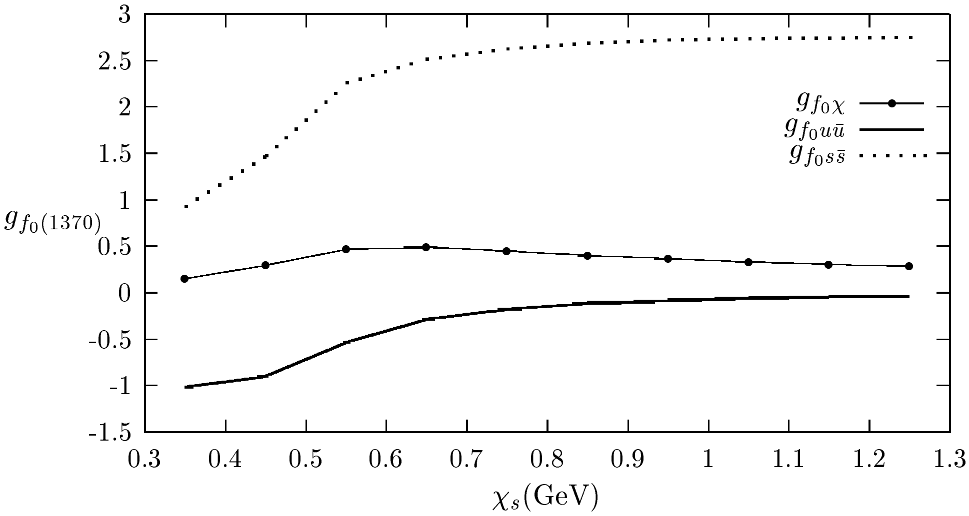

FIG. 3.21 – Constantes de couplage du $f_0(1370)$ (deuxième schéma bis)

Mentionnons à titre indicatif que des résultats très proches de ceux des figures 3.18-3.21 sont obtenus si nous conservons les paramètres de confinement du deuxième schéma initial [$\kappa = 0.0575$ GeV^2, $\mu = 0.01$ GeV] et si nous adoptons arbitrairement une masse légèrement plus faible pour le glueball, par exemple 1.48 GeV. Malgré le problème lié aux singularités de $\hat{J}^u_S$, nous observons donc une certaine stabilité dans les résultats.

3.5 Largeurs de désintégration

Notre modèle de confinement va influencer le calcul des amplitudes de désintégration via l'introduction des fonctions vertex dans les boucles triangulaires représentant les amplitudes directes. Les deux premières sous-sections sont dédiées aux désintégrations fortes du glueball en deux mésons pseudo-scalaires. Dans un premier temps, nous négligeons le confinement sur les deux vertex pseudo-scalaires, en posant ces derniers égaux à 1. Dans la deuxième sous-section, nous tenons compte du confinement au niveau des trois vertex des diagrammes triangulaires. Enfin, nous étudions les désintégrations électromagnétiques du glueball et du pion avec prise en compte du confinement sur le vertex de la particule incidente.

3.5.1 Désintégrations fortes

Désintégration du glueball avec un seul vertex (scalaire) confinant

L'approximation consistant à négliger le confinement au niveau des vertex des mésons pseudo-scalaires est d'autant plus valable que la masse de ces mésons est faible, car dans ce cas les fonctions vertex sont très proches de l'unité sur tout l'intervalle d'intégration. C'est le cas pour les pions (figure 3.6), par contre l'approximation est un peu moins consistante pour les autres désintégrations (figure 3.5). Nous considérons donc le diagramme 3.22, avec les hypothèses suivantes :

- Le méson scalaire incident est au repos ($\vec{q} = 0,\ q^0 = m$).
- Nous introduisons le confinement dans le vertex du méson scalaire, qui est pris sur sa couche de masse.
- Le confinement est négligé pour les deux mésons pseudo-scalaires pris sur leur couche de masse.

Nous adoptons les notations de C.M. Shakin pour désigner les quadri-impulsions.

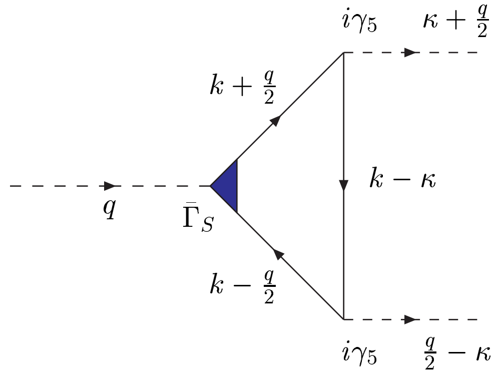

FIG. 3.22 – Désintégration d'un scalaire en deux mésons pseudo-scalaires ; vertex scalaire.

Nous avons donc l'expression générique suivante de l'amplitude de désintégration, analogue à (2.197),

$$\mathcal{T} = \mathrm{Tr}\left[\left[\sigma_0\lambda^0 + \sigma_8\lambda^8\right] \bar{\Gamma}_S(q,k) G_0(k-\frac{q}{2}) i\gamma_5 \left[\pi_0\lambda^0 + \pi_8\lambda^8\right] G_0(k-\kappa) i\gamma_5 \left[\pi_0\lambda^0 + \pi_8\lambda^8\right] G_0(k+\frac{q}{2})\right]. \tag{3.83}$$

Nous serons donc amenés à calculer des intégrales du type

$$\hat{G}_{abc}(q,\kappa) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \hat{I}_{abc} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \mathrm{tr}_\gamma \left(\bar{\Gamma}_S(q,k) g_a(k-\frac{q}{2}) i\gamma_5 g_b(k-\kappa) i\gamma_5 g_c(k+\frac{q}{2})\right). \tag{3.84}$$

Ces intégrales sont développées en détails dans l'annexe E. Par exemple, dans le cas d'une boucle triangulaire ne faisant intervenir qu'une seule saveur de quark (de masse constituante M), nous obtenons l'expression suivante, où nous avons posé $E' \equiv E(\vec{k}-\vec{\kappa}) = \sqrt{(\vec{k}-\vec{\kappa})^2 + M^2}$,

$$\begin{aligned}\hat{G}_{aaa} = & -M \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E^2 E'} \Bigg\{ -2\vec{k}.\vec{\kappa} \left[\frac{\Gamma_S^{+-}(q^0,|\vec{k}|)}{(q^0-2E)\left(\frac{q^0}{2} - E - E'\right)} + \frac{\Gamma_S^{-+}(q^0,|\vec{k}|)}{(q^0+2E)\left(\frac{q^0}{2} + E + E'\right)} \right] \\ & - \left(E^2 + EE' - \vec{k}.\vec{\kappa}\right) \frac{\Gamma_S^{++}(q^0,|\vec{k}|) + \Gamma_S^{--}(q^0,|\vec{k}|)}{\left(\frac{q^0}{2}\right)^2 - (E+E')^2} \Bigg\}.\end{aligned} \tag{3.85}$$

Cette expression sera encore simplifiée car nous avons dans le cas présent

$$\Gamma_S^{+-} = \Gamma_S^{-+},$$

$$\Gamma_S^{++} = \Gamma_S^{--}.$$

Le vertex $\Gamma_S^{++}(q^0,|\vec{k}|)$ s'obtient directement à partir de $\Gamma_S^{+-}(q^0,|\vec{k}|)$ en calculant :

$$\begin{aligned}\Gamma_S^{++}(q^0,|\vec{k}|) = & \; 1 - 4\pi \int \frac{|\vec{k}'|^2 d|\vec{k}'|}{(2\pi)^3} \frac{-4|\vec{k}'|^2}{E(\vec{k}')} \frac{\Gamma_S^{+-}(q^0,|\vec{k}'|)}{(q^0)^2 - (2E(\vec{k}'))^2} \\ & \times \left[\int_{-1}^{1} V^c(\vec{k}-\vec{k}') d(\cos\theta) - \frac{|\vec{k}|}{2|\vec{k}'|} \int_{-1}^{1} \cos\theta V^c(\vec{k}-\vec{k}') d(\cos\theta) \right].\end{aligned} \tag{3.86}$$

Nous présentons dans les figures suivantes nos résultats pour les largeurs directes et totales du $f_0(1500)$, de la même façon que dans le schéma sans confinement de la section 2.6.1. Nous choisissons ici de nous placer dans le cadre du premier schéma de confinement, avec les paramètres de la table 3.2.

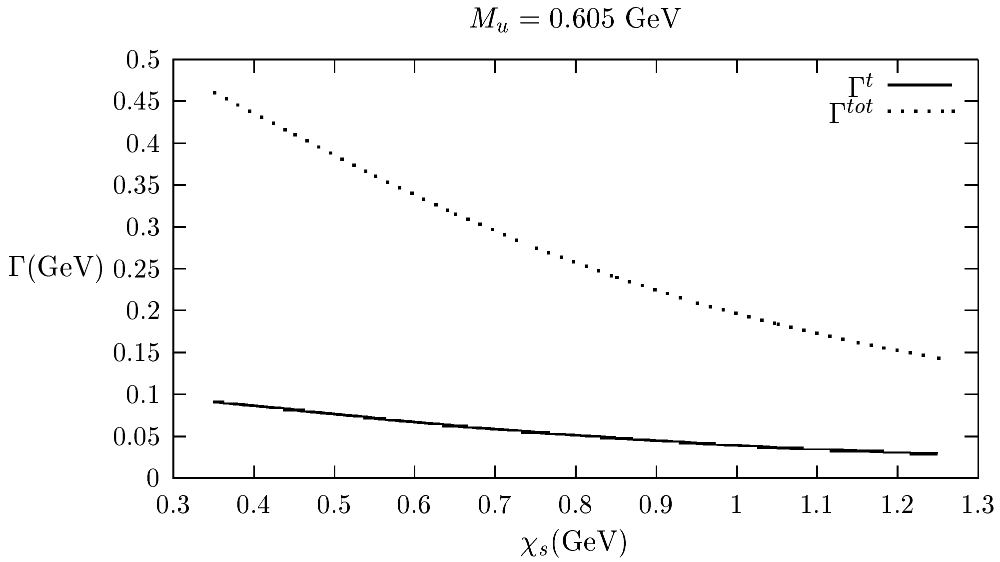

FIG. 3.23 – Largeurs $f_0(1500) \to \pi\pi$, premier schéma

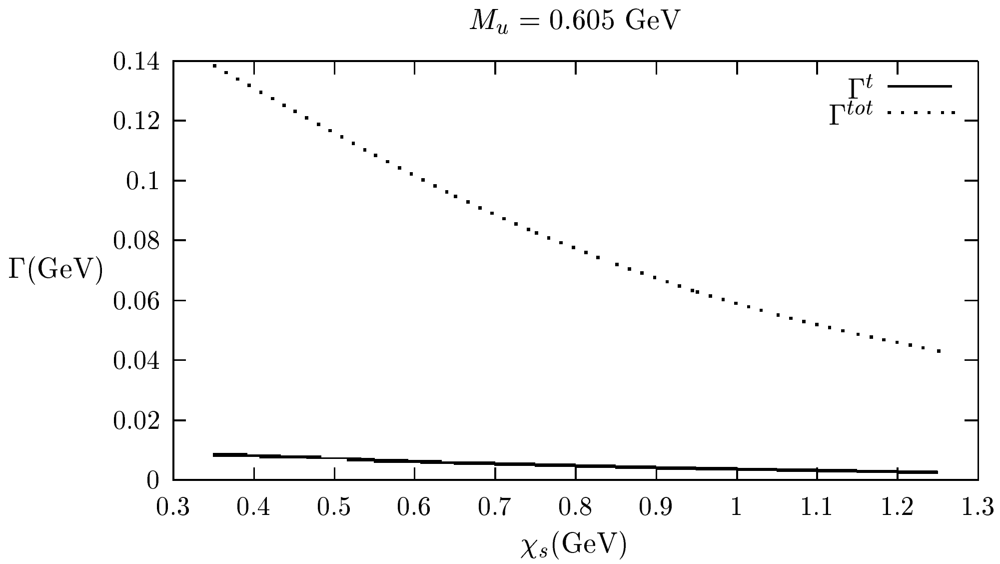

FIG. 3.24 – Largeurs $f_0(1500) \to K\bar{K}$, premier schéma

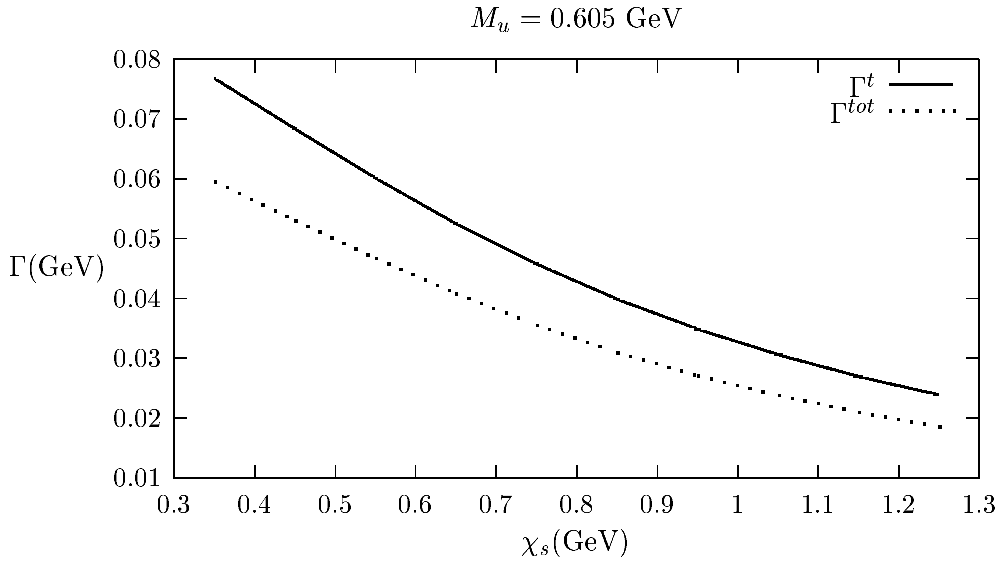

FIG. 3.25 – Largeurs $f_0(1500) \to \eta\eta'$, premier schéma

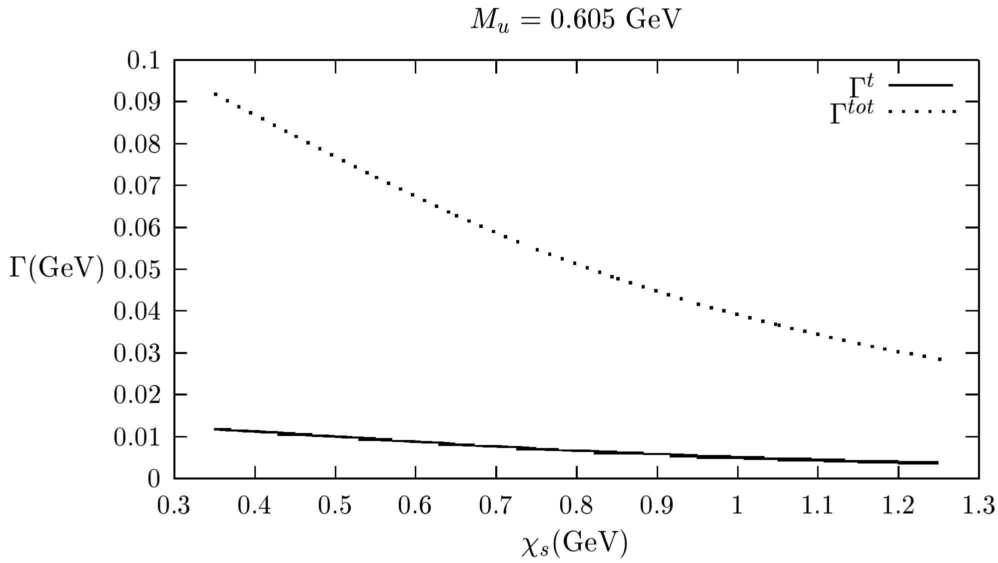

FIG. 3.26 – Largeurs $f_0(1500) \to \eta\eta$, premier schéma

Nous comparons ces résultats avec ceux de la section 2.6.1 se rapportant à la régularisation en d^3k et avec présence d'un cut-off sur toutes les intégrales (voir figures 2.18, 2.19, 2.20, 2.21). Nous sommes à présent en mesure de quantifier l'influence de la fonction vertex scalaire introduite dans les diagrammes triangulaires. Nous constatons une sensible réduction de toutes les largeurs directes (et donc des largeurs totales), tandis que les différents rapports de branchement subissent des modifications sensibles. Nous avons, pour $\chi_s = 0.35$ GeV, les rapports de branchements relatifs aux amplitudes directes suivants :

$$\gamma^2_{(t)}(\pi\pi) : \gamma^2_{(t)}(\eta\eta) : \gamma^2_{(t)}(\eta\eta') : \gamma^2_{(t)}(K\overline{K}) = 1 : 0.16 : 3.0 : 0.12, \tag{3.87}$$

qui présentent des différences pouvant être de l'ordre de 50% par rapport aux résultats (2.267).
Les rapports de branchements des amplitudes totales sont quant à eux

$$\gamma^2(\pi\pi) : \gamma^2(\eta\eta) : \gamma^2(\eta\eta') : \gamma^2(K\overline{K}) = 1 : 0.25 : 0.45 : 0.39, \tag{3.88}$$

où nous constatons une fois de plus des différences maximales de 50% par rapport à (2.268). Notons que les rapports (3.88) s'éloignent des valeurs expérimentales (1.19).
Par contre, en valeur absolue des largeurs, les effets du confinement s'exercent dans le bon sens, car nous tendons vers des valeurs plus en accord avec la largeur expérimentale du $f_0(1500)$, qui est approximativement de 112 MeV (2.248).

Désintégration du glueball avec trois vertex confinants

Nous prenons maintenant en compte le confinement au niveau des vertex pseudo-scalaires. Les calculs sont alourdis, mais les étapes du calcul restent inchangées. Les diagrammes de Feynman ont la forme suivante :

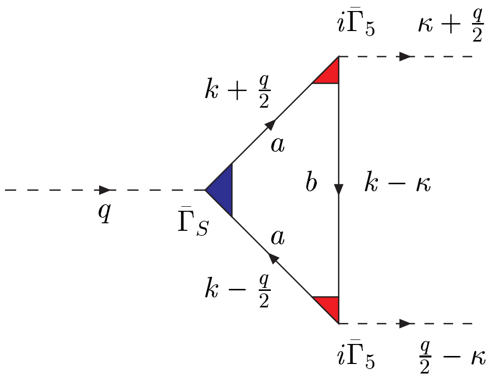

FIG. 3.27 – Désintégration d'un méson scalaire en deux mésons pseudo-scalaires ; 3 vertex

Nous n'appliquons plus les projecteurs de Dirac $\Lambda^+(\vec{k})$ et $\Lambda^-(-\vec{k})$ sur le vertex scalaire, mais nous l'écrivons sous la forme équivalente (voir (D.34) et la discussion sous cette équation)

$$\bar{\Gamma}_S(q,k) = c_0(q,k) + \hat{\not{k}} c_1(q,k), \tag{3.89}$$

avec

$$\hat{k}^\mu = k^\mu - (k.q)\frac{q^\mu}{q^2}. \qquad (3.90)$$

De la même façon, à partir de (D.24) et (D.25), nous écrivons le vertex pseudo-scalaire sous la forme

$$\bar{\Gamma}_5(q,k) = \gamma_5\Big(b_0(q,k) + \not{q}\, b_1(q,k)\Big). \qquad (3.91)$$

Nous devons donc calculer la trace sur la boucle triangulaire de la figure 3.27, qui correspond à l'expression suivante :

$$\hat{G}^3_{abc}(q,\kappa) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ \mathrm{tr}_\gamma\left(g_b(k-\kappa) i\bar{\Gamma}^{ab}_5(q,k) g_a(k+\frac{q}{2})\bar{\Gamma}^a_S(q,k) g_a(k-\frac{q}{2}) i\bar{\Gamma}^{ab}_5(q,k)\right). \qquad (3.92)$$

Notons que le vertex scalaire ne sera jamais mixte (c'est-à-dire faisant intervenir deux saveurs de quark) dans le cadre de ce travail, car nous n'étudions pas les désintégrations des mésons scalaires d'isospin demi-entier. Lorsque les mésons pseudo-scalaires issus de la désintégration sont des kaons, nous avons l'équivalent des diagrammes des figures 2.10 et 2.11. Si une seule saveur de quark (masse constituante M) intervient, nous écrivons

$$\begin{aligned}
\hat{G}^3_{aaa}(q,\kappa) &= \mathrm{tr}_\gamma \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{[(k-\kappa)^2 - M_a^2]\left[(k+\frac{q}{2})^2 - M_a^2\right]\left[(k-\frac{q}{2})^2 - M_a^2\right]} \\
&\quad \times \left\{(\not{k} - \not{\kappa} + M_a) i\gamma_5 \left(b_0(\kappa + \frac{q}{2}, k) + (\not{\kappa} + \frac{\not{q}}{2}) b_1(\kappa + \frac{q}{2}, k)\right)(\not{k} + \frac{\not{q}}{2} + M_a)\right. \\
&\quad \times \left.\Big(c_0(q,k) + \hat{\not{k}} c_1(q,k)\Big)(\not{k} - \frac{\not{q}}{2} + M_a) i\gamma_5\left(b_0(\frac{q}{2} - \kappa, k) + (\frac{\not{q}}{2} - \not{\kappa}) b_1(\frac{q}{2} - \kappa, k)\right)\right\}.
\end{aligned}$$

La méthode de calcul est identique à celle de la sous-section précédente, mais est assez lourde à mettre en oeuvre. Un logiciel de calcul symbolique est indispensable pour le calcul de la trace dans l'espace de Dirac, et par la suite, l'intégration sur la variable k^0, puis sur les coordonnées sphériques ne pose pas de problème particulier. Nous ne reprendrons pas ici les expressions finales, pour ne pas alourdir la présentation.

Les résultats sont présentés ci-dessous, de manière tout-à-fait symétrique par rapport aux figures 3.23, 3.24, 3.25 et 3.26. Nous pouvons alors analyser les effets numériques de l'introduction des deux fonctions vertex pseudo-scalaires.

L'influence de ces fonctions vertex pseudo-scalaires apparaît ainsi relativement limitée. Logiquement, c'est la largeur de désintégration en deux pions qui est la moins affectée (en accord avec les graphiques 3.5 et 3.6), mais les autres largeurs subissent également assez peu de modifications. Notre première approximation consistant à négliger les vertex pseudo-scalaires (comme dans l'article [39] du groupe de C.M. Shakin) est dans le cas présent acceptable.

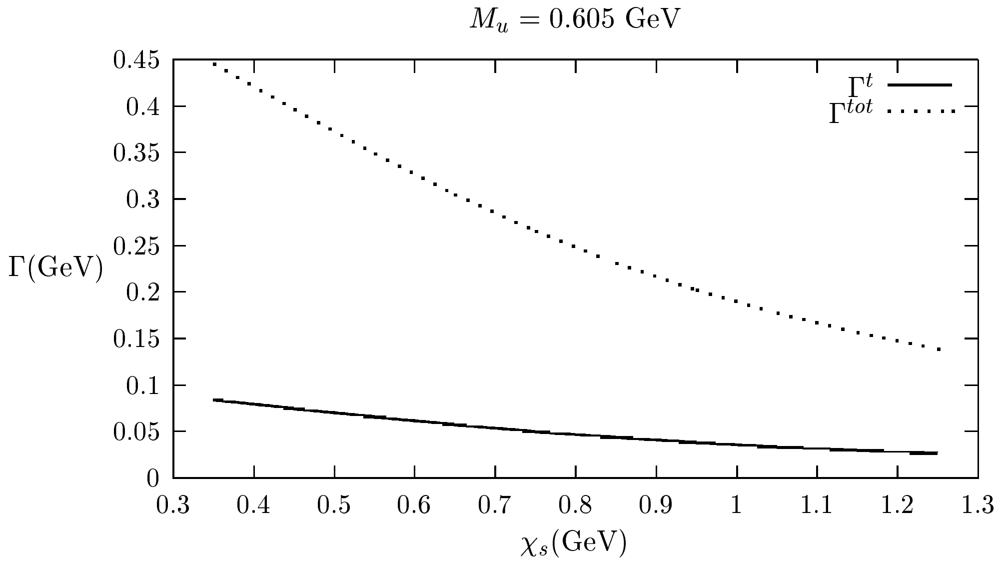

FIG. 3.28 – Largeurs $f_0(1500) \to \pi\pi$, trois vertex

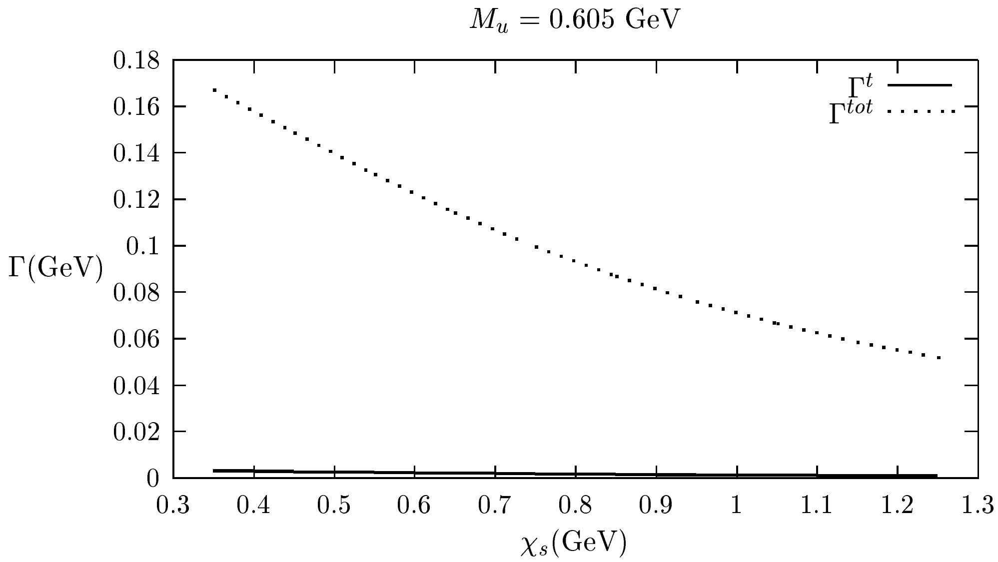

FIG. 3.29 – Largeurs $f_0(1500) \to K\bar{K}$, trois vertex

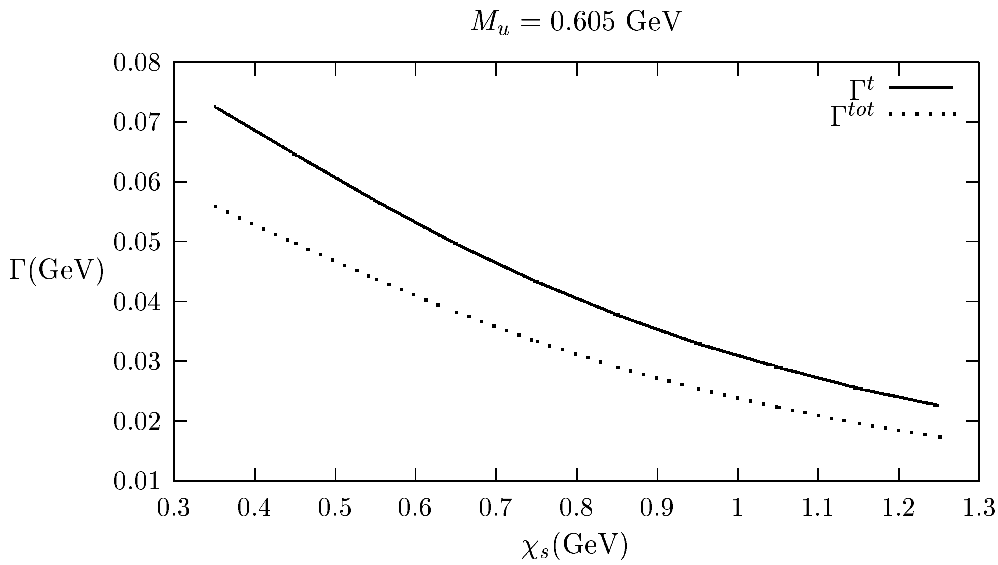

FIG. 3.30 – Largeurs $f_0(1500) \to \eta\eta'$, trois vertex

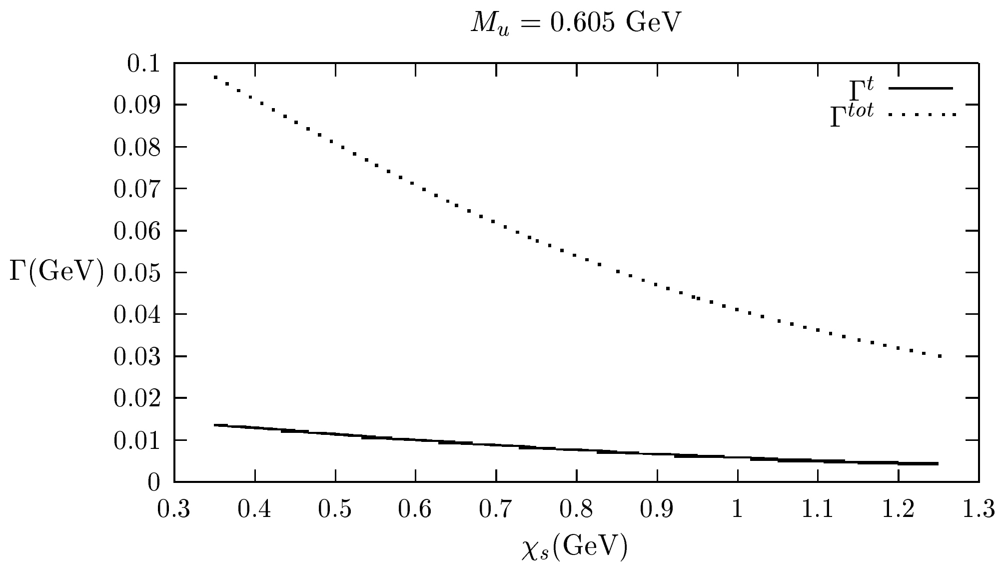

FIG. 3.31 – Largeurs $f_0(1500) \to \eta\eta$, trois vertex

3.5.2 Désintégrations électromagnétiques

Désintégration électromagnétique du glueball

L'introduction du confinement est implémentée par une fonction vertex scalaire appliquée sur l'impulsion du méson incident. Les photons sur leur couche de masse étant de masse nulle, les fonctions vertex sont égales à 1, et donc sans effet, dans la partie droite du diagramme 3.32 :

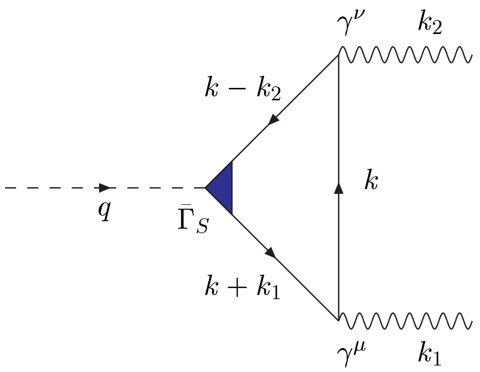

FIG. 3.32 – Désintégration électromagnétique du glueball avec confinement

La fonction vertex scalaire est exprimée comme en (3.89), et comme le méson scalaire incident est au repos ($\vec{q} = 0$), nous avons :

$$\begin{aligned} \hat{k}^0 &= k^0 - k^0 q^0 \frac{q^0}{(q^0)^2} = 0, \\ \hat{k}^i &= k^i - k^0 q^0 \frac{q^i}{(q^0)^2} = k^i, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Par ailleurs, quelques manipulations permettent d'exprimer c_0 et c_1 (3.89) en fonction des fonctions vertex scalaires :

$$c_0(q^0, |\vec{k}|) = \frac{|\vec{k}|^2 \Gamma_S^{+-} + M^2 \Gamma_S^{++}}{|\vec{k}|^2 + M^2}, \tag{3.93}$$

$$c_1(q^0, |\vec{k}|) = \frac{M}{|\vec{k}|^2 + M^2} (\Gamma_S^{+-} - \Gamma_S^{++}). \tag{3.94}$$

L'amplitude directe se rapportant à la figure 3.32 s'exprime comme

$$\hat{P}_a^{\mu\nu} = \mathrm{tr}_\gamma \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(\not{k} + \not{k}_1 + M_a)\gamma_\mu (\not{k} + M_a) \gamma_\nu (\not{k} - \not{k}_2 + M_a) \left(c_0(q^0, |\vec{k}|) + \hat{\not{k}} c_1(q^0, |\vec{k}|) \right)}{[(k + k_1)^2 - M_a^2]\,[k^2 - M_a^2]\,[(k - k_2)^2 - M_a^2]}. \tag{3.95}$$

Nous obtenons pour le numérateur, en supprimant les termes contenant k_1^μ et k_2^ν en vertu de (2.276, 2.277),

$$\begin{aligned}\hat{N}_a^{\mu\nu} &= 4M_a c_0\Big\{g^{\mu\nu}\left[-k^2 - k_1k_2 + M_a^2\right] + k_1^\nu k_2^\mu + 4k^\mu k^\nu\Big\}\\ &+4c_1\Big\{g^{\mu\nu}\left[2\vec{k}\vec{k}_1(k^2 - M_a^2 - \vec{k}\vec{k}_1) + |\vec{k}|^2(k^2 - M_a^2 + k_1k_2)\right] - |\vec{k}|^2 k_1^\nu k_2^\mu\\ &\quad + (k^2 - M_a^2 - \vec{k}\vec{k}_1)(k_1^\nu k_2^\mu - \hat{k}^\nu k_2^\mu) - k^0k_1^0(\hat{k}^\mu k_1^\nu + \hat{k}^\nu k_2^\mu)\\ &\quad - \vec{k}\vec{k}_1(k^\mu k_1^\nu + k^\nu k_2^\mu) - (|\vec{k}|^2 + \vec{k}\vec{k}_1)k^\mu k^\nu\\ &\quad + (2\vec{k}\vec{k}_1 - k^2 + M_a^2 + k_1k_2)(k^\mu\hat{k}^\nu + k^\nu\hat{k}^\mu) + 2k^0k_1^0(k^\mu\hat{k}^\nu - k^\nu\hat{k}^\mu)\Big\}.\end{aligned}$$

Par respect de l'invariance de jauge, nous devons avoir

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{\hat{N}_a^{\mu\nu}}{[(k+k_1)^2 - M_a^2]\,[k^2 - M_a^2]\,[(k-k_2)^2 - M_a^2]} = A_a\left(g^{\mu\nu} - \frac{k_1^\nu k_2^\mu}{k_1k_2}\right) + D_a k_1^\mu k_2^\nu.$$

En multipliant les deux membres successivement par $g^{\mu\nu}$ et $k_1^\nu k_2^\mu$, nous avons

$$\begin{aligned}3A_a + D_a(k_1k_2) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{g_{\mu\nu}\hat{N}_a^{\mu\nu}}{[(k+k_1)^2 - M_a^2]\,[k^2 - M_a^2]\,[(k-k_2)^2 - M_a^2]}\\ &= I_{gg}^a, \qquad (3.96)\\ A_a(k_1k_2) + D_a(k_1k_2)^2 &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{k_1^\nu k_2^\mu\hat{N}_a^{\mu\nu}}{[(k+k_1)^2 - M_a^2]\,[k^2 - M_a^2]\,[(k-k_2)^2 - M_a^2]}\\ &= I_{kk}^a, \qquad (3.97)\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}A_a &= \frac{1}{2}\left(I_{gg}^a - \frac{I_{kk}^a}{(k_1k_2)}\right),\\ D_a &= \frac{1}{(k_1k_2)}\left(\frac{3I_{kk}^a}{2(k_1k_2)} - I_{gg}^a\right).\end{aligned}$$

Comme dans le cas sans confinement, seul A_a nous sera utile dans la suite. L'expression finale de la largeur se calcule comme suit, avec $m_D > 2M_u$ et $m_D < 2M_s$ (premier schéma),

$$\Gamma_{D\to\gamma\gamma} = \frac{1}{32\pi m_D}\;8N_c^2\;\frac{16\pi^2\alpha^2}{81}\;X^2, \qquad (3.98)$$

$$\begin{aligned}\Re e X &= 5g_{Du\bar{u}}\Re e A_u + g_{Ds\bar{s}}A_s,\\ \Im m X &= 5g_{Du\bar{u}}\Im m A_u.\end{aligned}$$

Nos résultats numériques sont repris sur le graphique 3.33, et nous pouvons les comparer aux résultats de la section 2.6.2 obtenus sans confinement, et avec ou non présence d'un cut-off sur les intégrales convergentes J_4^a. Dans le cas présent, les intégrales I_{kk}^a et I_{gg}^a ne sont pas convergentes, et nous ne pouvons nous ramener comme dans la section 2.6.2 à des fonctions J_4^a convergentes. Nous sommes donc obligés d'utiliser un cut-off.

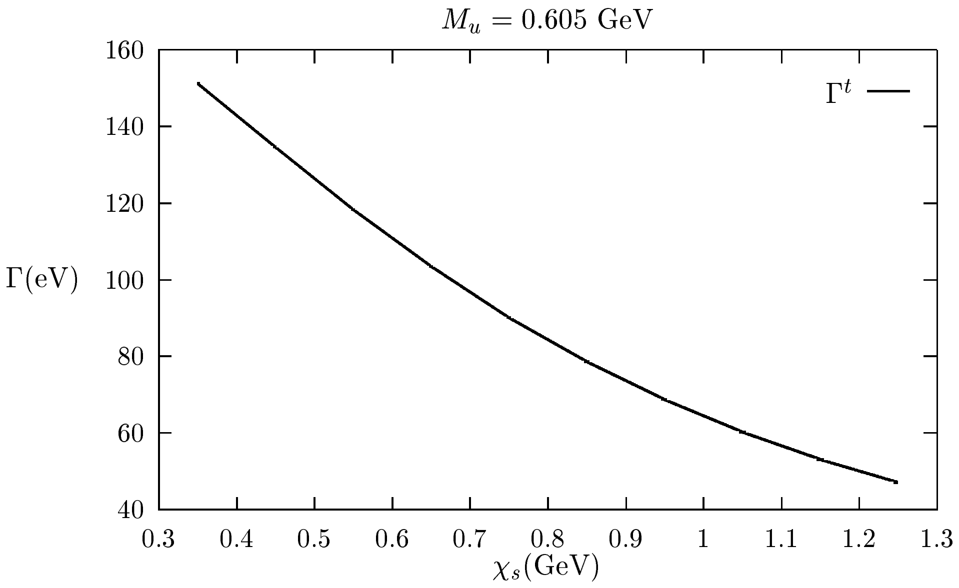

FIG. 3.33 – Largeur directe $f_0(1500) \to \gamma\gamma$ (d^3k ; avec cut-off)

Les résultats sont assez proches de ceux de la figure 2.23, qui représente la largeur sans confinement et sans cut-off sur les intégrales convergentes.

Désintégration électromagnétique du pion

La désintégration électromagnétique du pion est représentée sur la figure 3.34 :

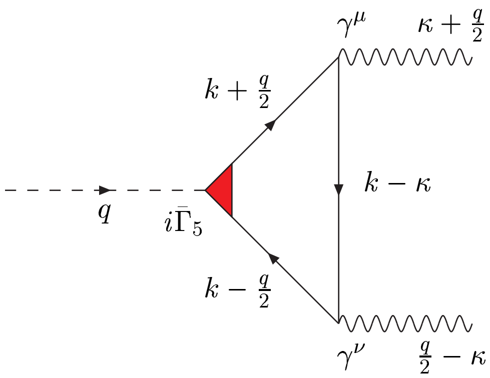

FIG. 3.34 – Désintégration électromagnétique du pion avec confinement

L'amplitude du diagramme direct s'écrit

$$\mathcal{T}_{\pi^0\to\gamma\gamma} = N_c(e_u^2 - e_d^2)g_{\pi qq}\epsilon^*_\mu(\kappa + \frac{q}{2})\epsilon^*_\nu(\frac{q}{2} - \kappa)\hat{H}^{\mu\nu}, \tag{3.99}$$

avec

$$\hat{H}^{\mu\nu} = tr_\gamma \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(\not{k} - \not{\kappa}_1 + M_u)\gamma^\mu(\not{k} + \frac{\not{q}}{2} + M_u)i\bar{\Gamma}_5(\not{k} - \frac{\not{q}}{2} + M_u)\gamma^\nu}{\left[(k+\frac{q}{2})^2 - M_u^2\right]\left[(k-\kappa)^2 - M_u^2\right]\left[(k-\frac{q}{2})^2 - M_u^2\right]},$$

et la fonction vertex $\bar{\Gamma}_5$ exprimée comme en (3.91).
Le pion étant au repos ($\vec{q} = 0$), nous avons rigoureusement

$$b_0(q,k) = \frac{\Gamma_5^{+-} + \Gamma_5^{-+}}{2}, \tag{3.100}$$

$$b_1(q,k) = \frac{\Gamma_5^{-+} - \Gamma_5^{+-}}{2M_u m_\pi} E(\vec{k}). \tag{3.101}$$

Le calcul de la trace nous donne l'expression

$$\hat{H}^{\mu\nu} = \epsilon^{\alpha\mu\nu\beta} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{N^{\alpha\beta}}{\left[(k+\frac{q}{2})^2 - M_u^2\right]\left[(k-\kappa)^2 - M_u^2\right]\left[(k-\frac{q}{2})^2 - M_u^2\right]},$$

où

$$N^{\alpha\beta} = 4M_u b_0 \kappa^\alpha q^\beta - b_1\left[(q^2 + 4k^2 + 4M_u^2)\kappa^\alpha q^\beta - (q^2 + 4k^2 - 4M_u^2)k^\alpha q^\beta + 8(kq)\kappa^\alpha k_p^\beta\right]$$

et

$$\begin{aligned} k_p^0 &= -k^0, \\ k_p^i &= k^i. \end{aligned}$$

Nous décomposons cette expression et lui appliquons divers changements de variable dans le but de nous ramener à un intégrant ne comportant plus de composantes k^μ au numérateur, ce qui permettra ensuite un calcul numérique plus facile. Ces changements de variable affectent le résultat, car nous devons régulariser à l'aide d'un cut-off les intégrales divergentes. Toutefois cette influence n'est que de l'ordre de quelques %. Nous posons :

$$S_K = (k-\kappa)^2 - M_u^2,$$

$$S_+ = (k + \frac{q}{2})^2 - M_u^2,$$

$$S_- = (k - \frac{q}{2})^2 - M_u^2,$$

et nous exprimons le numérateur sous une autre forme, en utilisant les relations

$$\begin{aligned} q^2 + 4k^2 + 4M_u^2 &= 2(S_+ + S_-) + 8M_u^2, \\ q^2 + 4k^2 - 4M_u^2 &= 2(S_+ + S_-), \\ 8(kq) &= 4(S_+ - S_-). \end{aligned}$$

Nous avons alors

$$\frac{(q^2+4k^2+4M_u^2)\kappa^\alpha q^\beta-(q^2+4k^2-4M_u^2)k^\alpha q^\beta+8(kq)\kappa^\alpha k_p^\beta}{S_K S_+ S_-}$$
$$=\left[\frac{2}{S_K S_-}+\frac{2}{S_K S_+}+\frac{8M_u^2}{S_K S_+ S_-}\right]\kappa^\alpha q^\beta-\left[\frac{2}{S_K S_-}+\frac{2}{S_K S_+}\right]k^\alpha q^\beta$$
$$+4\left[\frac{1}{S_K S_-}-\frac{1}{S_K S_+}\right]\kappa^\alpha k_p^\beta.$$

Nous appliquons aux termes en $S_K S_-$ le changement de variable $k'=k-\frac{\kappa}{2}-\frac{q}{4}$, dans le but d'obtenir une fonction paire en k' :

$$S_K S_- \to \left[\left(k'-\frac{\kappa}{2}+\frac{q}{4}\right)^2-M_u^2\right]\left[\left(k'+\frac{\kappa}{2}-\frac{q}{4}\right)^2-M_u^2\right]\equiv S_{-+}S_{+-}.$$

De même, en appliquant le changement de variable $k'=k-\frac{\kappa}{2}+\frac{q}{4}$ aux termes en $S_K S_-$, nous avons

$$S_K S_+ \to \left[\left(k'-\frac{\kappa}{2}-\frac{q}{4}\right)^2-M_u^2\right]\left[\left(k'+\frac{\kappa}{2}+\frac{q}{4}\right)^2-M_u^2\right]\equiv S_{--}S_{++}.$$

En regroupant les termes, et en supprimant les intégrants impairs en k^μ, nous arrivons finalement à l'expression suivante pour l'amplitude directe de désintégration :

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\pi^0\to\gamma\gamma} =& N_c(e_u^2-e_d^2)g_{\pi qq}\epsilon_\mu^*(\kappa+\frac{q}{2})\epsilon_\nu^*(\frac{q}{2}-\kappa)\epsilon^{\alpha\mu\nu\beta}\times\\ &\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left\{\frac{4M_u b_0-8M_u^2 b_1}{S_K S_+ S_-}\,\kappa^\alpha q^\beta-b_1\left[\frac{\kappa^\alpha q^\beta-\frac{q^\alpha q^\beta}{2}+4\kappa^\alpha Z_-^\beta}{S_{-+}S_{+-}}+\frac{\kappa^\alpha q^\beta+\frac{q^\alpha q^\beta}{2}+4\kappa^\alpha Z_+^\beta}{S_{--}S_{++}}\right]\right\}.\end{aligned}$$

où

$$Z_- = \left(-k^0-\frac{\kappa^0}{2}-\frac{q^0}{4},\ k^i+\frac{\kappa^i}{2}+\frac{q^i}{4}\right),$$
$$Z_+ = \left(-k^0-\frac{\kappa^0}{2}+\frac{q^0}{4},\ k^i+\frac{\kappa^i}{2}-\frac{q^i}{4}\right).$$

Encore une fois, les composantes impaires en k^μ dans Z disparaissent, et en se rappelant que $\kappa=0$ et $q^i=0$, nous pouvons écrire

$$Z_- = \left(-\frac{q^0}{4},\frac{\kappa^i}{2}\right),$$
$$Z_+ = \left(\frac{q^0}{4},\frac{\kappa^i}{2}\right).$$

L'amplitude devient donc

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\pi^0\to\gamma\gamma} \;=\;& N_c(e_u^2-e_d^2)g_{\pi qq}\epsilon_\mu^*(\kappa+\frac{q}{2})\epsilon_\nu^*(\frac{q}{2}-\kappa)\epsilon^{\alpha\mu\nu\beta}\left\{\kappa^\alpha q^\beta I_3-\left(\kappa^\alpha q^\beta-\frac{q^\alpha q^\beta}{2}+4\kappa^\alpha Z_-^\beta\right)I_1\right.\\ &\left.-\left(\kappa^\alpha q^\beta+\frac{q^\alpha q^\beta}{2}+4\kappa^\alpha Z_+^\beta\right)I_2\right\},\end{aligned}\tag{3.102}$$

avec

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{b_1}{S_{-+}S_{+-}}, \\ I_2 &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{b_1}{S_{--}S_{++}}, \\ I_3 &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4M_u b_0 - 8M_u^2 b_1}{S_K S_+ S_-}. \end{aligned}$$

Ces intégrales sont calculables numériquement de la façon habituelle. Par exemple, nous avons pour I_1, en intégrant sur k^0 à l'aide de la règle des résidus :

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-1}^{1} d(cos\theta) \int_0^{\Lambda} d|\vec{k}||\vec{k}|^2 \\ &\times \left\{ \frac{1}{2E_{k+p}\left[\left(-\frac{q^0}{2} + E_{k+p}\right)^2 - E_{k-p}^2\right]} + \frac{1}{2E_{k-p}\left[\left(-\frac{q^0}{2} - E_{k-p}\right)^2 - E_{k+p}^2\right]} \right\}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} E_{k+p} &= \sqrt{|\vec{k}|^2 + \frac{|\vec{\kappa}|^2}{4} + |\vec{k}||\vec{\kappa}|cos\theta| + M_u^2}, \\ E_{k-p} &= \sqrt{|\vec{k}|^2 + \frac{|\vec{\kappa}|^2}{4} - |\vec{k}||\vec{\kappa}|cos\theta| + M_u^2}. \end{aligned}$$

L'expression de l'amplitude (3.102) peut être écrite plus simplement, en distinguant les cas $\beta = 0$ et $\beta \neq 0$, β étant un indice dans (3.102).
Si $\beta \neq 0$, nous pouvons montrer que nous nous ramenons à une expression nulle, avec un facteur du type

$$\epsilon^{\alpha\mu\nu i} \kappa^\alpha \kappa^i = 0,$$

en raison de l'antisymétrie de $\epsilon^{\alpha\mu\nu\beta}$.
Si $\beta = 0$, en tenant toujours compte de l'antisymétrie de $\epsilon^{\alpha\mu\nu\beta}$ et de $q^i = 0$, nous avons l'expression suivante pour l'amplitude :

$$\mathcal{T}_{\pi^0\to\gamma\gamma} = N_c(e_u^2 - e_d^2) g_{\pi qq} \epsilon_\mu^*(\kappa + \frac{q}{2}) \epsilon_\nu^*(\frac{q}{2} - \kappa) \epsilon^{\alpha\mu\nu 0} q^0 \kappa^\alpha \left(I_3 - 2I_2\right).$$

Le carré de l'amplitude est donc ($q^0 = m_\pi$) :

$$|\mathcal{T}_{\pi^0\to\gamma\gamma}|^2 = 4N_c^2 \frac{e^4}{9} g_{\pi qq}^2 q_0^2 \left(I_3 - 2I_2\right)^2 \left| \epsilon_\mu^* \epsilon_\nu^* \epsilon^{\alpha\mu\nu 0} \kappa^\alpha \epsilon_{\mu'}^* \epsilon_{\nu'}^* \epsilon^{\alpha'\mu'\nu' 0} \kappa^{\alpha'} \right|.$$

La largeur est finalement donnée par ($|\vec{\kappa}| = \frac{m_\pi}{2}$) :

$$\Gamma_{\pi^0\to\gamma\gamma} = \frac{\pi\alpha^2}{9} N_c^2 g_{\pi qq}^2 m_\pi^3 \left(I_3 - 2I_2\right)^2. \tag{3.103}$$

Cette expression conduit au résultat suivant, avec les paramètres de la table 3.2 (premier schéma, $M_u = 0.605$ GeV) :

$$\Gamma_{\pi^0 \to \gamma\gamma} = 1.036 \text{ eV},$$

valeur assez éloignée des données expérimentales, qui fournissent $\Gamma_{\pi^0 \to \gamma\gamma} \approx 7.7$ eV. Une fois de plus, l'introduction du confinement nous a contraints à manipuler des intégrales divergentes, et donc à utiliser un cut-off. Dans la section 2.6.2, le calcul sans confinement et avec cut-off sur J_4 fournissait une valeur de 0.491 eV. Le facteur 2 entre ces deux résultats n'est pas dû à l'introduction de la fonction vertex dans le diagramme triangulaire 3.34, fonction proche de 1 dans le cas du pion (voir figure 3.6). Cette différence est due aux valeurs des paramètres intervenant dans le calcul (M_u, $\Lambda\chi_s$), paramètres fortement influencés par l'introduction du confinement.

Dans le cadre du deuxième schéma, dont les paramètres sont contenus dans la deuxième colonne de la table 3.5 (avec notamment $M_u = 0.365$ GeV), nous obtenons

$$\Gamma_{\pi^0 \to \gamma\gamma} = 3.501 \text{ eV},$$

valeur très proche de celle obtenue avec le deuxième schéma bis (troisième colonne de la table 3.5). Ce résultat est toutefois encore assez éloigné de la valeur expérimentale.

Chapitre 4

Conclusions et perspectives

L'objet principal de ce travail était l'étude des désintégrations fortes et électromagnétiques de mésons dans les secteurs scalaire et pseudo-scalaire, et particulièrement celles du glueball scalaire, assimilé à la résonance $f_0(1500)$. Notre intérêt était principalement de calculer les différents rapports de branchement du $f_0(1500)$ et de les comparer avec les résultats expérimentaux, afin de vérifier le pouvoir prédictif de nos modèles effectifs ainsi que la validité de nos hypothèses sur la nature du glueball scalaire. Cette étude a été réalisée dans le cadre de deux versions généralisées du modèle NJL.

Dans la première version, nous avons exploité une extension du modèle NJL rendant compte de l'anomalie de trace de QCD, via l'introduction d'un champ de dilaton scalaire χ. Ce modèle effectif présente deux inconvénients majeurs : la nature locale de l'interaction entre les quarks ne permet pas de garantir la renormalisabilité et le confinement.

Dans la seconde version, nous avons intégré une modélisation du confinement à l'aide d'un potentiel quasi-linéaire emprunté aux travaux de C.M. Shakin et de ses collaborateurs. Le principal avantage de cette nouvelle extension du modèle réside dans la possibilité d'étudier rigoureusement la désintégration de mésons dont la masse se situe au-delà du seuil de création d'une paire virtuelle quark-antiquark, et de manipuler des grandeurs réelles grâce à l'utilisation de fonctions de vertex s'annulant aux pôles des grandeurs à intégrer.

Pour chacun des deux modèles, nous avons suivi le même itinéraire vers la détermination des largeurs de désintégration et des rapports de branchement associés aux amplitudes. Nous avons d'abord déterminé les paramètres du modèle en vérifiant l'équation de Goldberger-Treiman, les équations de masse des mésons isovecteurs scalaire et pseudo-scalaire ($a_0(1450)$ et $\pi^0(139)$), ainsi que les équations définissant les masses des kaons et du méson η'. Le seul paramètre libre dans le cas du modèle non confinant est la partie stationnaire du champ de dilaton χ_s, tandis que deux paramètres de confinement sont introduits dans la version confinante du modèle. Notre intérêt porte principalement sur la résonance scalaire isoscalaire $f_0(1500)$, que nous associons au glueball scalaire. Cette particule hybride, mélange de glu et de quarks, est couplée aux deux mésons scalaires isoscalaires par l'intermédiaire de la matrice des propagateurs inverses relative aux champs σ_0, σ_8 et χ. Nous devons donc calculer les masses et les constantes de couplage des trois mésons scalaires isoscalaires, ces derniers étant assimilés soit aux résonances $f_0(1370)$, $f_0(1500)$ et $f_0(1710)$, soit aux résonances $f_0(980)$, $f_0(1370)$ et $f_0(1500)$ (dans le cadre du deuxième schéma du modèle confinant). Enfin, nous avons calculé les largeurs de désintégration forte du glueball, respectivement dans les mésons pseudo-scalaires $\pi\pi$, $K\bar{K}$, $\eta\eta$ et $\eta\eta'$, ainsi que les largeurs de désintégration électromagnétique du glueball scalaire et du pion neutre.

Dans le cadre du modèle non confinant, nous avons analysé en détail l'influence du schéma de régularisation (d^3k ou d^4k) et de la présence ou non d'un cut-off sur les intégrales ne présentant pas de divergence ultraviolette, comme la fonction J_4 (2.311) que nous rencontrons à la fois dans le calcul des désintégrations fortes et électromagnétiques.

Dans le cas des désintégrations fortes, notre calcul donne des résultats en mauvais accord avec l'expérience si nous ne plaçons pas le cut-off sur la fonction J_4. Il nous paraît d'ailleurs plus cohérent de placer le cut-off partout, comme il est recommandé dans [24]. Nous obtenons ainsi, avec une régularisation d^3k et le cut-off présent sur toutes les intégrales, des rapports de branchement pour les amplitudes totales en bon accord avec l'expérience, à l'exception du ratio relatif au kaon qui est pratiquement deux fois trop grand.

Par contre, nos conclusions relatives à la désintégration électromagnétique du glueball rejoignent celles de l'article [85], dans lequel le calcul en d^4k sans cut-off fournissait des valeurs proches des nôtres sans cut-off également. Lorsque nous plaçons le cut-off sur les intégrales convergentes, nos résultats subissent une nette réduction, atteignant à peine 25% des valeurs obtenues sans cut-off sur ces intégrales.

De même, dans le cadre de la désintégration électromagnétique du pion, nos résultats sont meilleurs si nous ne plaçons pas de cut-off sur J_4, comme indiqué dans [27]. Nous aurions toutefois obtenu des résultats avec cut-off plus satisfaisants si nous avions fait un autre choix de paramètres, les résultats étant très sensibles au choix du cut-off, notamment.

Dans la seconde partie du travail, nous avons exploité le modèle rendu confinant afin de recalculer toutes les grandeurs déterminées dans la première partie, et donc de disposer d'une base de résultats nous permettant de comparer les deux modèles et d'évaluer les avantages de l'introduction du confinement dans notre formalisme. Contrairement à la première partie, notre modèle confinant n'est exploitable qu'avec une régularisation en d^3k, et impose un cut-off sur toutes les intégrales, divergentes et convergentes. Ce modèle confinant nous offre la possibilité de considérer des particules de masse nettement au-dessus du seuil, contrairement au modèle non confinant. Nous avons considéré principalement deux choix pour les paramètres de confinement κ et μ.

Le premier schéma de confinement $[\kappa = 0.0575\ \mathrm{GeV}^2,\ \ \mu = 0.02\ \mathrm{GeV}]$ se rapporte à la prise en compte du $a_0(1450)$ comme état isovecteur fondamental dans le secteur scalaire, tandis que le(s) deuxième(s) schéma(s) ($[\kappa = 0.0575\ \mathrm{GeV}^2,\ \ \mu = 0.01\ \mathrm{GeV}]$ ou $[\kappa = 0.0575\ \mathrm{GeV}^2,\ \ \mu = 0.0075\ \mathrm{GeV}]$) assimile cet état au $a_0(980)$. Le choix d'un paramètre μ plus petit pour le deuxième schéma a été imposé par une limitation de notre modèle de confinement, qui demande une précision de calcul toujours plus grande à mesure que l'on s'approche d'une énergie égale à la grandeur $\Xi = 2M_u + \frac{\kappa}{\mu e}$, que Shakin appelle *limite du continuum.* Lorsque l'on atteint cette limite supérieure, il est impossible de trouver des solutions aux équations intégrales déterminant les fonctions de vertex, et on ne peut implémenter le modèle de confinement.

Le deuxième schéma de confinement fournit une masse constituante $M_u = 0.365$ GeV (ou $M_u = 0.362$ GeV), nettement inférieure à la masse $M_u = 0.605$ GeV du premier schéma. Les états excités radialement du pion sont en meilleur accord avec l'expérience dans le cadre du second schéma.

En utilisant le premier schéma de confinement, nous avons calculé les largeurs de désintégration forte du glueball en négligeant dans un premier temps le confinement au niveau des vertex pseudo-scalaires, approximation d'autant moins rigoureuse que les mésons pseudo-scalaires issus de la désintégration possèdent une masse plus élevée, tel le méson $\eta'(958)$. Nous montrons toutefois que la prise en compte du confinement au niveau des trois vertex de la boucle triangulaire influence relativement peu les résultats. L'influence du confinement sur les rapports de branchement ne s'exerce pas dans le bon sens : nous obtenons des valeurs qui s'éloignent sensiblement des résultats expérimentaux (1.19) par rapport aux résultats de la première partie obtenus sans confinement. Cependant, les largeurs totales sont réduites, ce qui permet (à grand χ_s) de se rapprocher de la largeur totale expérimentale.

L'étude de la désintégration électromagnétique du glueball fournit des résultats très proches de ceux obtenus sans confinement et sans cut-off sur la partie convergente, tandis que le calcul des désintégrations électromagnétiques du pion donne des résultats peu satisfaisants, l'adoption du second schéma permettant seulement d'obtenir une largeur proche de la moitié de la valeur expérimentale.

Notre modèle de confinement perd de son pouvoir prédictif lorsque nous travaillons dans une région en énergie se situant au-delà de la première singularité des fonctions diagrammes de polarisation, singularité se manifestant sous la forme d'une asymptote verticale. Ce phénomène se produit lorsque l'équation intégrale définissant les fonctions vertex possède une solution dans sa version homogène, solution correspondant à un problème aux valeurs propres. Pour des énergies proches de ces singularités, le modèle présente une grande sensibilité par rapport à une légère modification des paramètres de confinement, car la valeur et la pente des fonctions diagrammes de polarisation varient fortement sur un court intervalle en énergie. Notre premier schéma de confinement est donc le plus fiable pour étudier les désintégrations du glueball $f_0(1500)$, car la première singularité apparaît au-delà de 1500 MeV, contrairement au deuxième schéma.

De nombreuses perspectives ou extensions à ce travail peuvent être envisagées. Il est ainsi possible d'introduire dans la densité lagrangienne de notre modèle effectif d'autres champs que les seuls champs mésoniques scalaires et pseudo-scalaires, qui étaient suffisants dans notre optique qui consistait à étudier les désintégrations fortes d'un méson scalaire en deux mésons pseudo-scalaires, ainsi que les désintégrations électromagnétiques de ces derniers. Si nous voulons étudier les propriétés des mésons vecteurs par exemple, il faut intégrer ces champs d'interaction à quatre quarks dans le Lagrangien, à la façon par exemple de l'article [51] dans lequel C.M. Shakin prend en compte les champs vecteurs et axial-vecteurs via l'introduction d'une constante de couplage supplémentaire (G_v). Par ailleurs, il ajoute dans son Lagrangien des interactions relatives aux mésons tenseurs.

D'autre part, nous pouvons modéliser l'anomalie axiale de façon différente, via le terme d'interaction de 't Hooft et une constante de couplage supplémentaire G_d. Nous pouvons également envisager l'introduction d'un glueball pseudo-scalaire dans notre densité lagrangienne. Des commentaires et observations sur ce sujet sont présentés dans la section 1.2.2.

Enfin, nous pouvons également considérer une autre identification du glueball, par exemple en l'assimilant à la résonance $f_0(1710)$ comme le prescrivent les publications [89, 90]. L'étude du nonet scalaire et l'identification des glueballs restent en effet un problème épineux, comme en attestent les nombreux avis contradictoires recensés dans la section 1.2.1. Nous avons suivi la prescription de [10], et assimilé le glueball de façon univoque à la résonance $f_0(1500)$.

Annexe A

Conventions

A.1 Unités naturelles

Nous travaillons en unités naturelles, c'est-à-dire en posant

$$c = 1 \tag{A.1}$$
$$\hbar = 1 \tag{A.2}$$
$$k_B = 1 \tag{A.3}$$

Dans ce système, nous exprimons toutes les grandeurs en fonction de puissances de l'unité d'énergie, ici le GeV. La conversion du GeV en fermis (10^{-15} mètres) se fait grâce à la relation suivante :

$$1(\text{GeV})^{-1} = 0.1973 \text{ fm} \tag{A.4}$$

A.2 Métriques de Dirac

Les matrices de Dirac utilisées s'écrivent, en utilisant les matrices de Pauli :

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

avec

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A.2.1 Métrique de Minkowski

Les conventions sont les suivantes :

$$\gamma^0 = \beta,$$
$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3.$$

Nous avons alors les relations :

$$\begin{aligned}
\{\gamma_5, \gamma^\mu\} &= 0, &(A.5)\\
\gamma_5^2 &= 1\!\!1, &(A.6)\\
\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu}, &(A.7)
\end{aligned}$$

avec $1\!\!1$ désignant la matrice unité et $g^{\mu\nu}$ le tenseur métrique :

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{A.8}$$

Par convention, nous écrivons :

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu \gamma_\mu &= (\gamma^0)^2 - (\gamma^1)^2 - (\gamma^2)^2 - (\gamma^3)^2 \\
&= 1\!\!1 - (-1\!\!1) - (-1\!\!1) - (-1\!\!1) \\
&= 4 1\!\!1. &(A.9)
\end{aligned}$$

Nous avons aussi

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu. \tag{A.10}$$

Appliquées aux expressions faisant intervenir des quadri-vecteurs, en définissant

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu, \tag{A.11}$$

ces relations donnent :

$$\not{a}\not{a} = a.a = a^\mu a_\mu = a_0 a_0 - \vec{a}\vec{a} \tag{A.12}$$

et

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu \not{a} \gamma_\mu &= -2\not{a}, &(A.13)\\
\gamma^\mu \not{a}\not{b} \gamma_\mu &= 4(a.b)I, &(A.14)\\
\gamma^\mu \not{a}\not{b}\not{c} \gamma_\mu &= -2\not{c}\not{b}\not{a}. &(A.15)
\end{aligned}$$

Nous passons maintenant au calcul des traces. Dans plusieurs cas, le résultat est nul :

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\ \gamma^i \gamma^j &= 0 \qquad (i \neq j), &(A.16)\\
\mathrm{tr}\ \underbrace{\gamma^i \gamma^j \gamma^k \ldots \gamma^n}_{n \text{ impair}} &= 0, &(A.17)\\
\mathrm{tr}\ \gamma_5 \gamma^\mu &= 0, &(A.18)\\
\mathrm{tr}\ \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu &= 0, &(A.19)\\
\mathrm{tr}\ \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha &= 0. &(A.20)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, nous exploitons :

$$\begin{aligned} \text{tr } \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta &= 4(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha}), & \text{(A.21)} \\ \text{tr } \gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta &= -4i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}, & \text{(A.22)} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le tenseur totalement antisymétrique $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ défini comme suit :

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = \begin{cases} +1 & \text{si } \{\mu,\nu,\alpha,\beta\} \text{ est une permutation paire de } \{0,1,2,3\} \\ -1 & \text{si } \{\mu,\nu,\alpha,\beta\} \text{ est une permutation impaire de } \{0,1,2,3\} \\ 0 & \text{dans les autre cas} \end{cases} \quad \text{(A.23)}$$

Enfin, nous notons les relations importantes :

$$\begin{aligned} \text{tr } \not{a}\not{b} &= 4(a.b), & \text{(A.24)} \\ \text{tr } \not{a}\not{b}\not{c}\not{d} &= 4[(a.b)(c.d) - (a.c)(b.d) + (a.d)(b.c)], & \text{(A.25)} \\ \text{tr } \gamma_5\not{a}\not{b}\not{c}\not{d} &= -4i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}a^\mu b^\nu c^\alpha d^\beta, & \text{(A.26)} \\ \text{tr } \not{a}_1\not{a}_2\not{a}_3\ldots\not{a}_{2n} &= \text{Tr } \not{a}_{2n}\ldots\not{a}_3\not{a}_2\ldots\not{a}_1, & \text{(A.27)} \\ \text{tr } \not{a}\not{b}\not{c}\not{d} &= -\text{Tr } \not{b}\not{a}\not{c}\not{d} + 2a.b\text{tr } \not{c}\not{d}. & \text{(A.28)} \end{aligned}$$

A.2.2 Métrique euclidienne

Nous posons :

$$\gamma_0 = i\beta.$$

L'expression de γ_5 est modifiée de telle façon que la matrice reste inchangée :

$$\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3.$$

Nous avons donc, entre autres,

$$\begin{aligned} \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} &= -2\delta_{\mu\nu}, & \text{(A.29)} \\ \gamma_\mu\gamma_\mu &= (\gamma_0)^2 + (\gamma_1)^2 + (\gamma_2)^2 + (\gamma_3)^2 \\ &= -\mathbb{1} + (-\mathbb{1}) + (-\mathbb{1}) + (-\mathbb{1}) = -4\mathbb{1}, & \text{(A.30)} \\ \text{tr } \not{a}\not{b} &= -4(a.b). & \text{(A.31)} \end{aligned}$$

A.3 Matrices de Gell-Mann

Les huit matrices de Gell-Mann sont obtenues à partir des générateurs du groupe unitaire SU(3) :

$$\lambda_a = \begin{pmatrix} \sigma_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad a = 1,2,3,$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

avec σ_a désignant les trois matrices de Pauli.
Si nous ajoutons à cet octet la matrice suivante :

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

nous pouvons écrire les relations se rapportant aux commutateurs et aux anti-commutateurs des matrices de Gell-Mann :

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2iF_{abk}\lambda_k, \tag{A.32}$$
$$\{\lambda_a, \lambda_b\} = 2D_{abk}\lambda_k, \tag{A.33}$$

avec $a, b, k = 0 \ldots 8$.
Les coefficients D et F sont respectivement les constantes de structure totalement symétriques et antisymétriques (par rapport à l'inversion de deux indices) de SU(3). Une constante F avec deux indices identiques est donc nulle. Les coefficients non nuls sont indiqués ci-dessous, et il faut leur adjoindre toutes les permutations d'indices.

$$1 = F_{123} = 2F_{147} = 2F_{246} = 2F_{257} = 2F_{345} = -2F_{156} = -2F_{367} = \frac{2}{\sqrt{3}}F_{458} = \frac{2}{\sqrt{3}}F_{678},$$

$$F_{0jk} = 0, \quad \forall j, k,$$

$$\frac{1}{2} = D_{146} = D_{157} = D_{256} = D_{344} = D_{355} = -D_{247} = -D_{366} = -D_{377},$$

$$D_{0jk} = \sqrt{\frac{2}{3}}\delta_{jk}.$$

Deux calculs de trace fréquemment utilisés :

$$\mathrm{tr}\ \lambda_a\lambda_b = 2\delta_{ab}, \tag{A.34}$$
$$\mathrm{tr}\ \lambda_a\lambda_b\lambda_c = 2\left(D_{abc} + iF_{abc}\right). \tag{A.35}$$

Signalons que la position de l'indice sur les matrices de Gell-Mann n'est pas significative, nous écrivons indifféremment λ_a ou λ^a.

Annexe B

Annexe générale

B.1 Les six saveurs de quarks

Les six quarks répertoriés sont décrits ci-dessous, avec les abréviations u, d, s, c, b et t désignant respectivement les quarks *up*, *down*, *strange*, *charm*, *bottom* et *top*. Des données supplémentaires peuvent être trouvées par exemple dans [103].

saveur	masse (GeV)	charge (|e|)	$I(J^P)$	I_Z
u	0.002-0.008	2/3	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$	$+\frac{1}{2}$
d	0.005-0.015	-1/3	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$	$-\frac{1}{2}$
s	0.1-0.3	-1/3	$0(\frac{1}{2}^+)$	
c	1.3-1.7	2/3	$0(\frac{1}{2}^+)$	
b	4.7-5.3	-1/3	$0(\frac{1}{2}^+)$	
t	180 ± 12	2/3	$0(\frac{1}{2}^+)$	

TAB. B.1 – Les six types de quarks

B.2 Paramétrisation de Feynman

Il est souvent utile d'écrire certains intégrants sous une autre forme, en introduisant une variable d'intégration supplémentaire. Nous recourons régulièrement à la paramétrisation de Feynman. Les trois artifices les plus usités sont :

$$\frac{1}{AB} = 2\int_{-1}^{1} \frac{1}{[(1+u)A + (1-u)B]^2}\, du, \tag{B.1}$$

$$\frac{1}{AB} = \int_{0}^{1} \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2}\, dx, \tag{B.2}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{A_1A_2A_3} &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz\ \delta(x+y+z-1)\ \frac{2}{(xA_1+yA_2+zA_3)^3} \\ &= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy\ \frac{2}{[(1-y-z)A_1+yA_2+zA_3]^3}.\end{aligned} \tag{B.3}$$

L'identité la plus générale s'écrit [104] :

$$\frac{1}{A_1^{m_1}A_2^{m_2}\ldots A_n^{m_n}} = \int_0^1 dx_1\ldots dx_n\ \delta\left(\sum x_i - 1\right)\frac{\prod x_i^{m_i-1}}{[\sum x_iA_i]^{\sum m_i}}\ \frac{\Gamma(m_1+\ldots+m_n)}{\Gamma(m_1)\ldots\Gamma(m_n)}, \tag{B.4}$$

où $\Gamma(n)$ est la fonction *Gamma* définie sur $]0,\infty[$ par

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx, \qquad \forall n \in]0,\infty[\ . \tag{B.5}$$

B.3 Transformations de Fierz pour le secteur $\bar{q}q$

Nous réécrivons dans la section 1.1 l'interaction effective uniquement dans le secteur quark-antiquark, ce qui fournit des termes ayant des degrés de liberté de mésons. L'interaction de départ, de type courant-courant, est donnée en (1.11), les courants étant singulets de saveur $1\!\!1_F$, octets de couleur 8_C, et ne faisant intervenir que les matrices de Dirac γ^μ. Nous appliquons à cette interaction les tranformations de Fierz afin de nous ramener à une forme permettant la mise en évidence du terme d'interaction singulet de couleur qui nous intéresse pour le secteur $\bar{q}q$.

1) <u>Couleur</u>

Dans le secteur couleur, nous utilisons la transformation suivante :

$$\sum_c \left(\frac{\lambda_c}{2}\right)_{\alpha\beta}\left(\frac{\lambda_c}{2}\right)_{\gamma\delta} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{N_c^2}\right)\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} - \frac{1}{N_c}\sum_c\left(\frac{\lambda_c}{2}\right)_{\alpha\gamma}\left(\frac{\lambda_c}{2}\right)_{\beta\delta}. \tag{B.6}$$

2) <u>Saveur</u>

Dans l'espace de saveur, nous avons la relation :

$$\delta_{ij}\delta_{kl} = \sum_{e=0}^{8}(\frac{\lambda^e}{\sqrt{2}})_{il}(\frac{\lambda^e}{\sqrt{2}})_{kj}. \tag{B.7}$$

3) <u>Spin</u>

Enfin, nous pouvons écrire le produit des matrices de Dirac sous la forme suivante :

$$(\gamma^\mu)_{rs}(\gamma_\mu)_{tu} = (1\!\!1)_{ru}(1\!\!1)_{ts} + (i\gamma_5)_{ru}(i\gamma_5)_{ts} + (i\frac{\gamma^\mu}{\sqrt{2}})_{ru}(i\frac{\gamma_\mu}{\sqrt{2}})_{ts} + (i\frac{\gamma^\mu\gamma_5}{\sqrt{2}})_{ru}(i\frac{\gamma_\mu\gamma_5}{\sqrt{2}})_{ts}. \tag{B.8}$$

En utilisant ces trois transformations, nous écrivons l'interaction (1.11) avec une partie singulet de couleur $\mathcal{L}_1$ et une partie octet de couleur $\mathcal{L}_8$:

$$\mathcal{L}_{QFD}^{int} = -\frac{\varrho g^2}{2} j_a^\mu j_\mu^a = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_8, \tag{B.9}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 &= G_s \sum_{i=0}^{8} \left[\left(\bar{q} \frac{(\lambda^i)_F}{2} q \right)^2 + \left(\bar{q} i \gamma_5 \frac{(\lambda^i)_F}{2} q \right)^2 \right] \\
&\quad - G_v \sum_{i=0}^{8} \left[\left(\bar{q} \gamma_\mu \frac{(\lambda^i)_F}{2} q \right)^2 + \left(\bar{q} i \gamma_5 \gamma_\mu \frac{(\lambda^i)_F}{2} q \right)^2 \right], \\
\mathcal{L}_8 &= -G_s^{(8)} \sum_{i=0}^{8} \left[\left(\bar{q} \frac{(\lambda^i)_F}{2} \frac{(\lambda^a)_C}{2} q \right)^2 + \left(\bar{q} i \gamma_5 \frac{(\lambda^i)_F}{2} \frac{(\lambda^a)_C}{2} q \right)^2 \right] \\
&\quad + G_v^{(8)} \sum_{i=0}^{8} \left[\left(\bar{q} \gamma_\mu \frac{(\lambda^i)_F}{2} \frac{(\lambda^a)_C}{2} q \right)^2 + \left(\bar{q} i \gamma_5 \gamma_\mu \frac{(\lambda^i)_F}{2} \frac{(\lambda^a)_C}{2} q \right)^2 \right],
\end{aligned}$$

où $G_s = 2G_v = \frac{8G}{9}$ et $G_s^{(8)} = 2G_v^{(8)} = \frac{2G}{3}$, avec $G = \frac{\varrho g^2}{2}$. Les indices F et C se rapportent respectivement aux matrices de saveur et de couleur. Dans ce travail, nous négligeons la partie octet de couleur, et nous nous limitons à l'étude des mésons scalaires et pseudo-scalaires, posant $G_v = 0$. Nous obtenons alors notre Lagrangien d'interaction (1.12), de forme très simple.

B.4 Calcul des parties principales

Dans le cas où l'intégrant présente un ou plusieurs pôle(s) dans l'intervalle d'intégration, le résultat n'est plus réel, et la partie réelle de l'expression s'obtient par le calcul de la partie principale. Différents cas peuvent se présenter.

A) Pôle simple

L'expression à considérer est du type

$$\int_a^b \frac{h(x)}{x - x_0}\, dx,$$

où $x_0 \in]a, b[$ et où $h(x)$ ne présente pas de pôle dans l'intervalle. L'intégrale réelle n'est donc pas définie. Nous pouvons toutefois écrire, si $2x_0 - a < b$,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\int_a^b \frac{h(x)}{x-x_0}\,dx &= \mathcal{P}\int_a^{2x_0-a}\frac{h(x)}{x-x_0}\,dx+\int_{2x_0-a}^b\frac{h(x)}{x-x_0}\,dx\\ &= \mathcal{P}\int_a^{2x_0-a}\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}\,dx+h(x_0)\mathcal{P}\int_a^{2x_0-a}\frac{1}{x-x_0}\,dx\\ &\quad+\int_{2x_0-a}^b\frac{h(x)}{x-x_0}\,dx.\end{aligned}$$

En vertu de la symétrie de l'intégrant et de la symétrie de l'intervalle autour du pôle, nous avons par ailleurs

$$\mathcal{P}\int_a^{2x_0-a}\frac{1}{x-x_0}\,dx=0.$$

Comme $h(x)-h(x_0)\approx h'(x_0)(x-x_0)$ à proximité du pôle, nous avons finalement, en supprimant le symbole $\mathcal{P}$ qui n'est plus nécessaire,

$$\mathcal{P}\int_a^b\frac{h(x)}{x-x_0}\,dx=\int_a^{2x_0-a}\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}\,dx+\int_{2x_0-a}^b\frac{h(x)}{x-x_0}\,dx. \tag{B.11}$$

En désignant par ϵ une grandeur infinitésimale, le premier terme du membre de droite se calcule de la façon suivante :

$$\int_a^{2x_0-a}\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}\,dx=\int_a^{2x_0-a-\epsilon}\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}\,dx+2\epsilon h'(x_0)+\int_{2x_0-a-\epsilon}^b\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}\,dx,$$

où le deuxième terme peut être rendu négligeable.

Si $(2x_0-a)>b$, nous suivons le même principe, sauf que nous écrivons :

$$\mathcal{P}\int_a^b\frac{h(x)}{x-x_0}\,dx=\int_a^{2x_0-a}\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}\,dx+\int_b^{2x_0-a}\frac{h(x)}{x-x_0}\,dx.$$

Quant à la partie imaginaire, nous pouvons montrer grâce au théorème des résidus qu'elle est donnée par :

$$\Im m\left(\int_a^b\frac{h(x)}{x-x_0}\,dx\right)=\pi h(x_0). \tag{B.13}$$

B) <u>Pôle double</u>

Des développements plus complexes, exposés dans la thèse [83], permettent d'obtenir la relation suivante :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}\int_a^b \frac{h(x)}{(x-x_0)^2}\,dx - 2\lim_{\epsilon\to 0}\frac{h(x_0)}{\epsilon} &= \mathcal{P}\int_a^{2x_0-a}\frac{h(x)-h(x_0)-(x-x_0)h'(x_0)}{(x-x_0)^2}\,dx \\
&+\int_{2x_0-a}^b \frac{h(x)}{(x-x_0)^2}\,dx - \frac{2h(x_0)}{x_0-a}.
\end{aligned}
$$

B.5 Représentation matricielle du nonet pseudo-scalaire

Dans l'espace de saveurs $SU(3)_F$, les mésons du nonet pseudo-scalaire sont respectivement associés aux combinaisons de matrices de Gell-Mann suivantes :

$$
\begin{array}{l|l}
\pi^0 & \lambda_3 \\
\pi^\pm & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lambda_1 \mp i\lambda_2\right) \\
K^0,\ \bar{K}^0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lambda_6 \mp i\lambda_7\right) \\
K^\pm & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lambda_4 \mp i\lambda_5\right) \\
\pi_0 & \lambda_0 \\
\pi_8 & \lambda_8
\end{array}
\tag{B.14}
$$

Le contenu en quarks des mésons s'obtient en calculant les produits matriciels associés. Dans le cas du pion neutre π^0, nous avons par exemple :

$$
\left(\bar{u}\ \bar{d}\ \bar{s}\right)\lambda_3\begin{pmatrix} u \\ d \\ s\end{pmatrix} = \left(\bar{u}\ \bar{d}\ \bar{s}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ d \\ s\end{pmatrix} = \bar{u}u - \bar{d}d.
$$

Si nous nous intéressons aux mésons η' et η, nous devons considérer les champs π_0 et π_8, qui sont couplés via le paramètre ξ de l'anomalie axiale. Le contenu en quarks de ces mésons est donné par :

$$
\begin{aligned}
\pi_0 \quad &: \quad \left(\bar{u}\ \bar{d}\ \bar{s}\right)\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ d \\ s\end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s\right), \\
\pi_8 \quad &: \quad \left(\bar{u}\ \bar{d}\ \bar{s}\right)\sqrt{\frac{1}{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ d \\ s\end{pmatrix} = \sqrt{\frac{1}{3}}\left(\bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s\right).
\end{aligned}
$$

Ces mésons sont couplés via la matrice des propagateurs inverses dans le secteur pseudo-scalaire isoscalaire donnée dans [83], et la diagonalisation de cette matrice fournit les relations suivantes :

$$
\begin{pmatrix} \tilde{\pi}_0(q) \\ \tilde{\pi}_8(q)\end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \cos\theta_q & -\sin\theta_q \\ \sin\theta_q & \cos\theta_q\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta'(q)\left[Z^{uu} + Z^{ss} + \frac{Z^{uu}-Z^{ss}}{3\cos 2\theta_q}\right]^{-1/2} \\ \eta(q)\left[Z^{uu} + Z^{ss} - \frac{Z^{uu}-Z^{ss}}{3\cos 2\theta_q}\right]^{-1/2}\end{pmatrix}, \tag{B.15}
$$

avec θ_q donné par (2.76) et la fonction Z^{ab} définie en (B.19). En l'absence d'anomalie axiale ($\xi = 0$), nous obtenons, après inversion du système d'équations,

$$\begin{pmatrix} \eta'(q)(Z^{ss})^{-1/2} \\ \eta(q)(Z^{uu})^{-1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\pi}_0(q) \\ \tilde{\pi}_8(q) \end{pmatrix}. \tag{B.16}$$

En reprenant les contenus en quarks des champs π_0 et π_8, nous avons pour les mésons η' et η :

$$\begin{aligned} \eta' \quad &: \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s\right) - \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{1}{3}}\left(\bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s\right) \\ & \quad = \sqrt{2}\bar{s}s, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta \quad &: \quad \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1}{3}}\left(\bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s\right) \\ & \quad = \bar{u}u + \bar{d}d. \end{aligned}$$

Nous vérifions ainsi qu'en l'absence d'anomalie axiale, le méson η' se ramène à une pure résonance $\bar{s}s$, et le méson η à une pure résonance $\bar{u}u$ (avec symétrie d'isospin), en accord avec les masses (2.77, 2.78).

B.6 Calcul du potentiel dans l'espace des impulsions

Si nous considérons un potentiel linéaire dans un cadre non relativiste, nous avons :

$$\begin{aligned} V(r) &= \kappa r \\ &= \lim_{\mu \to 0} \kappa r e^{-\mu r} \\ &= \lim_{\mu \to 0} \kappa \frac{\partial^2}{\partial \mu^2}\left[\frac{e^{-\mu r}}{r}\right]. \end{aligned}$$

Dans l'espace des impulsions, nous obtenons :

$$\begin{aligned} V(q) &= \int d^3 r e^{iq.r} V(r) \\ &= \kappa \lim_{\mu \to 0} \frac{\partial^2}{\partial \mu^2}\left[\frac{4\pi}{q^2 + \mu^2}\right] \\ &= 8\pi\kappa \lim_{\mu \to 0}\left[\frac{-1}{[q^2 + \mu^2]^2} + \frac{4\mu^2}{[q^2 + \mu^2]^3}\right] \\ &= \lim_{\mu \to 0}\left[V_A(q) + \frac{32\pi\kappa\mu^2}{[q^2 + \mu^2]^3}\right]. \end{aligned} \tag{B.17}$$

Il faut prendre garde ici à ne pas prendre $\mu \to 0$ dans la dernière équation, et en déduire que le potentiel linéaire dans l'espace des impulsions se ramène simplement à $V_A(q)$. En effet, le potentiel en q^{-4} obtenu serait singulier en $q = 0$ et par ailleurs ne représenterait pas le potentiel linéaire original. Pour le voir, il suffit de noter que la relations $V(0) = 0$ implique que

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\ V(q) = 0$$

et que cette relation est vérifiée par (B.17) alors qu'elle ne l'est pas par $V_A(q)$. Explicitement,

$$\begin{aligned} V_A(r) &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\ e^{-iq.r} V_A(q) \\ &= -\kappa \frac{e^{-\mu r}}{\mu} \\ &\sim \lim_{\mu\to 0} \kappa \left[r - \frac{1}{\mu} \right]. \end{aligned}$$

Ceci montre que $V_A(r)$ tend vers une valeur infiniment négative quand $\mu \to 0$. Le terme supplémentaire dans (B.17) corrige ces effets en ajoutant la constante (infinie) nécessaire pour avoir $V(0) = 0$.
La voie évidente pour généraliser (B.17) au cas relativiste est de remplacer le q^2 non relativiste (noté q_3) par le q^2 relativiste : $q^2 = (q^0)^2 - q_3^2$. Si un des deux quarks est massif, l'énergie q^0 qui lui est transférée est petite, de sorte que la limite non relativiste est atteinte lorsque la masse du quark approche l'infini.

B.7 Propagateurs inverses et équations de masse

Cette annexe a pour but de montrer l'équivalence de nos notations avec celles des références [83], qui ont servi de base aux développements de ce travail. Dans [83], le second ordre de l'action relatif au champ σ_0 s'écrit :

$$\Gamma_{00} = \frac{2}{3}\left(Z^{uu} + \frac{Z^{ss}}{2}\right) q^2 - \frac{8}{3} N_c (2h_u + h_s) + \frac{8}{3}\left(M_u^2 Z^{uu} + \frac{1}{2} M_s^2 Z^{ss}\right) + a^2 \chi_s^2, \quad \text{(B.18)}$$

avec

$$Z^{ab}(q) = 4N_c \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 + M_a^2][(k-q)^2 + M_b^2]} \quad \text{(B.19)}$$

et

$$h_a = \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + M_a^2}. \quad \text{(B.20)}$$

L'équation (B.18) peut s'écrire

$$\Gamma_{00} = \frac{2}{3}\left[(q^2 + 4M_u^2) Z^{uu} - 8N_c h_u\right] + \frac{1}{3}\left[(q^2 + 4M_s^2) Z^{ss} - 8N_c h_s\right] + a^2 \chi_s^2. \quad \text{(B.21)}$$

Les termes entre crochets dans cette expression correspondent à l'opposé de la fonction $J_S^a(q)$ définie en (2.52). En effet, on a en réduisant au même dénominateur, puis en appliquant le changement de variable $k = k' + q/2$:

$$\begin{aligned}(q^2+4M_a^2)Z^{aa} - 8N_c h_a &= -4N_c \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{2k^2 - 4k.q + q^2 - 2M_a^2}{[k^2+M_a^2][(k-q)^2+M_a^2]} \\ &= -8N_c \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{k^2 - \frac{q^2}{4} - k.q - M_a^2}{[(k+\frac{q}{2})^2+M_a^2][(k-\frac{q}{2})^2+M_a^2]} \\ &= -8N_c \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{k^2 - \frac{q^2}{4} - M_a^2}{[(k+\frac{q}{2})^2+M_a^2][(k-\frac{q}{2})^2+M_a^2]}.\end{aligned}$$

Le terme en $k.q$ donne une contribution nulle car il est impair sur l'espace d'intégration, et on se ramène bien au signe près à l'expression de $J_S^a(q)$ (2.52). Cette fonction s'écrit donc, avec les notations de [83],

$$J_S^a(q) = -(q^2+4M_a^2)Z^{aa} + 8N_c h_a. \tag{B.22}$$

On a donc finalement

$$\Gamma_{00} = -\frac{1}{3}(2J_S^u + J_S^s) + a^2\chi_s^2. \tag{B.23}$$

On retombe ainsi sur l'expression dans (2.42), en se rappelant que $a^2 = \frac{1}{G_s}$.

De même, l'équation de masse pour le a_0 est donnée dans [83] sous la forme

$$a^2\chi_s^2 + (q^2+4M_u^2)Z^{uu} - 8N_c h_u = 0 \tag{B.24}$$

et se ramène avec (B.22) à la forme plus concise :

$$a^2\chi_s^2 - J_S^u(q) = 0, \tag{B.25}$$

que nous avons dérivée à partir de l'action en (2.65), avec $a^2 = \frac{1}{G_s}$.

Dans le secteur pseudo-scalaire, le deuxième ordre de l'action relatif au pion fournit l'équation de masse suivante dans [83] :

$$a^2\chi_s^2 + q^2 Z^{uu} - 8N_c h_u = 0. \tag{B.26}$$

En procédant de la même façon que ci-dessus, on peut montrer que le diagramme de polarisation pseudo-scalaire défini en (2.67) peut s'écrire sous la forme

$$J_5^a(q) = -q^2 Z^{aa} + 8N_c h_a. \tag{B.27}$$

L'équation de masse peut donc s'écrire (2.66) :

$$a^2\chi_s^2 - J_5^u(q) = 0. \tag{B.28}$$

Annexe C

Boucle triangulaire de désintégration d'un méson scalaire en deux pseudo-scalaires

Hypothèses :

– Le méson scalaire incident est au repos ($\vec{q} = \vec{0}$).
– Les trois mésons sont pris sur leur couche de masse.

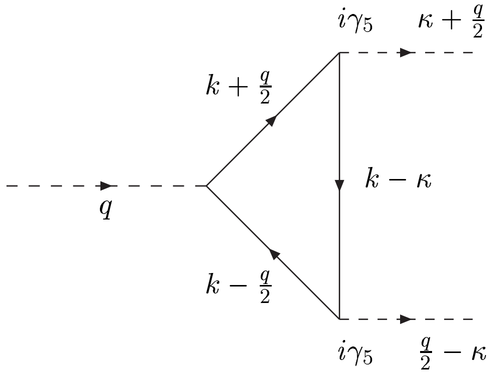

FIG. C.1 – Désintégration d'un méson scalaire en deux mésons pseudo-scalaires

C.1 Calcul avec régularisation en d^3k

Nous développons ici le calcul de la fonction G_{abc} introduite en (2.189). Nous utilisons les notations de la figure C.1, et ne considérons que la boucle faisant intervenir une seule saveur de quark, de masse M. Le calcul est aisément généralisable au cas d'une boucle usu ou sus, qui apparaît dans le calcul des désintégrations en deux kaons. En omettant momentanément les facteurs i et en adoptant des notations simplifiées, nous avons :

$$G = \mathrm{tr}_\gamma \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ g(k-\frac{q}{2})\gamma_5 g(k-\kappa)\gamma_5 g(k+\frac{q}{2}) \right\}, \tag{C.1}$$

avec $g(k)$ désignant le propagateur fermionique dans la métrique de Minkowski (2.128) :

$$g(k) = \frac{\not k + M}{k^2 - M^2}.$$

Nous pouvons donc écrire

$$G = \mathrm{tr}_\gamma \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[(\not k - \frac{\not q}{2}) + M]\gamma_5[(\not k - \not \kappa) + M]\gamma_5[(\not k - \frac{\not q}{2}) + M]}{[(k-\frac{q}{2})^2 - M^2][(k-\kappa)^2 - M^2][(k+\frac{q}{2})^2 - M^2]}.$$

Le calcul de la trace sur les matrices de Dirac donne

$$\begin{aligned}
& \mathrm{tr}_\gamma \, [(\not k - \frac{\not q}{2}) + M]\gamma_5[(\not k - \not \kappa) + M]\gamma_5[(\not k - \frac{\not q}{2}) + M] \\
= \; & \mathrm{tr}_\gamma \, [(\not k - \frac{\not q}{2}) + M][-(\not k - \not \kappa) + M][(\not k - \frac{\not q}{2}) + M] \\
= \; & 4M \left\{ -(k-\frac{q}{2})(k-\kappa) + (k-\frac{q}{2})(k+\frac{q}{2}) - (k-\kappa)(k+\frac{q}{2}) + M^2 \right\} \\
= \; & 4M \left\{ -2k(k-\kappa) + k^2 - \frac{q^2}{4} + M^2 \right\} \\
= \; & 4M \left\{ -k^2 + 2k\kappa - \frac{q^2}{4} + M^2 \right\}.
\end{aligned}$$

La boucle triangulaire s'écrit donc :

$$G = 4M \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-k^2 + 2k\kappa - \frac{q^2}{4} + M^2}{[(k-\frac{q}{2})^2 - M^2][(k-\kappa)^2 - M^2][(k+\frac{q}{2})^2 - M^2]}. \tag{C.2}$$

L'étape suivante est l'intégration par rapport à k^0 en appliquant le théorème des résidus. Deux alternatives équivalentes sont possibles, selon que l'on scinde ou non l'intégrale en une partie convergente et une partie divergente. Les résultats numériques seront bien sûr identiques si on place le cut-off ultraviolet partout (et si on n'effectue pas de changement de variable d'intégration), mais l'intérêt de séparer les deux parties réside dans la possibilité d'étudier l'influence du cut-off. Nous séparons donc l'intégrale et nous avons :

$$\begin{aligned}
G \; = \; 4M \Bigg\{ & - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[(k-\frac{q}{2})^2 - M^2\right]\left[(k+\frac{q}{2})^2 - M^2\right]} \\
& + (\kappa^2 - \frac{q^2}{4}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k-\frac{q}{2})^2 - M^2][(k-\kappa)^2 - M^2][(k+\frac{q}{2})^2 - M^2]} \Bigg\},
\end{aligned}$$

où le deuxième terme du membre de droite est une intégrale convergente. Via le changement de variable suivant appliqué au premier terme

$$k^{'} = k + \frac{q}{2} \to k - \frac{q}{2} = k^{'} - q,$$

nous nous ramenons à la fonction Z définie en annexe (B.19) en métrique euclidienne

$$
\begin{aligned}
G &= 4M\Big\{-\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \frac{1}{[(k-q)^2-M^2]\,[k^2-M^2]} \\
&\quad +(\kappa^2-\frac{q^2}{4})\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \frac{1}{[(k-\frac{q}{2})^2-M^2][(k-\kappa)^2-M^2][(k+\frac{q}{2})^2-M^2]}\Big\} \\
&= 4M\left\{-Z+(\kappa^2-\frac{q^2}{4})J_4\right\},
\end{aligned}
$$

où nous retrouvons la fonction J_4 introduite en (2.311).

Nous passons au calcul de la fonction Z dans l'espace de Minkowski, dont l'expression est donnée par :

$$
Z=\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \frac{1}{[(k-q)^2-M^2]\,[k^2-M^2]}, \tag{C.3}
$$

où $\vec{q}=\vec{0}$ et $q^0=m$. Nous sommes en présence de quatre pôles en k^0 dont deux seulement donnent des contributions nulles via le théorème des résidus. Nous avons

$$
\begin{aligned}
Z &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int \frac{dk^0}{2\pi}\, \frac{1}{[(k^0)^2-E^2][(k^0-q^0)^2-E^2]} \\
&= -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left\{\frac{1}{2E}\,\frac{1}{(q^0+E)^2-E^2}+\frac{1}{2E}\,\frac{1}{(q^0-E)^2-E^2}\right\} \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{E}\left[\frac{1}{(q^0)^2+2q^0E}+\frac{1}{(q^0)^2-2q^0E}\right] \\
&= -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \frac{1}{E\,[(q^0)^2-4E^2]} \\
&= -\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\Lambda d|\vec{k}|\, \frac{|\vec{k}|^2}{E\,[(q^0)^2-4E^2]}.
\end{aligned} \tag{C.4}
$$

Avant de passer au calcul de la fonction J_4, nous déterminons κ^0 et $|\vec{\kappa}|$ en exploitant le fait que les mésons sont sur leur couche de masse. Soient m_1 et m_2 les masses respectives des deux mésons pseudo-scalaires, et $m=q^0$ la masse du méson scalaire. Comme $\vec{q}=\vec{0}$, nous écrivons :

$$
\begin{aligned}
(\kappa+\frac{q}{2})^2 &= m_1^2 \\
&= \kappa^2+\frac{m^2}{4}+\kappa^0q^0, \\
(\kappa-\frac{q}{2})^2 &= m_2^2 \\
&= \kappa^2+\frac{m^2}{4}-\kappa^0q^0.
\end{aligned}
$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}
\kappa^0 &= \frac{m_1^2 - m_2^2}{2m}, && \text{(C.5)}\\
\kappa^2 &= \frac{m_1^2 + m_2^2}{2} - \frac{m^2}{4}, && \text{(C.6)}\\
|\vec{\kappa}|^2 &= \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{4m^2} - \frac{m_1^2 + m_2^2}{2} + \frac{m^2}{4}. && \text{(C.7)}
\end{aligned}$$

En posant

$$\begin{aligned}
E &= \sqrt{|\vec{k}|^2 + M^2}, && \text{(C.8)}\\
E' &= \sqrt{|\vec{k} - \vec{\kappa}|^2 + M^2}, && \text{(C.9)}
\end{aligned}$$

nous pouvons écrire J_4 comme suit :

$$J_4 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{dk^0}{2\pi} \frac{1}{[(k^0 - \kappa^0)^2 - E'^2][(k^0 - \frac{q^0}{2})^2 - E^2][(k^0 + \frac{q^0}{2})^2 - E^2]}. \qquad \text{(C.10)}$$

Nous constatons qu'il y a six pôles en k^0, mais trois d'entre eux donnent une contribution nulle. En effet, sélectionner un demi-plan d'intégration revient à multiplier chacun des six résidus par la fonction

$$f(z) = \frac{1}{1 + e^{\beta z}}$$

évaluée au pôle en k^0. Comme $\beta = \infty$ à température nulle, nous avons $f(k^0) = 0$ lorsque $k^0 = \ldots\ + E^{(')}$, tandis que $f(k^0) = 1$ quand $k^0 = \ldots\ - E^{(')}$.
La fonction J_4 s'écrit donc

$$\begin{aligned}
J_4 = -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Bigg\{ &\frac{1}{2E'} \frac{1}{[(\kappa^0 - E' - \frac{q^0}{2})^2 - E^2][(\kappa^0 - E' + \frac{q^0}{2})^2 - E^2]}\\
&+ \frac{1}{2E} \frac{1}{[(\frac{q^0}{2} - E - \kappa^0)^2 - E'^2][(q^0 - E)^2 - E^2]}\\
&+ \frac{1}{2E} \frac{1}{[(-\frac{q^0}{2} - E - \kappa^0)^2 - E'^2][(-q^0 - E)^2 - E^2]} \Bigg\}.
\end{aligned} \qquad \text{(C.11)}$$

Cette expression de J_4 est réelle en-dessous du seuil, quand $q^0 \leq 2M$. Par contre, lorque nous nous trouvons au-dessus du seuil, il apparaît un pôle simple lors de l'intégration sur $|\vec{k}|$. Ce pôle se situe dans le deuxième facteur du dénominateur du deuxième terme de l'expression (C.11). En effet, ce facteur est égal à $q^0(q^0 - 2E)$, et en multipliant haut et bas par $(q^0 + 2E)$, nous obtenons au dénominateur un facteur $|\vec{k}|^2 - k_o^2$, avec

$$k_o = \sqrt{\frac{(q^0)^2}{4} - M^2}. \qquad \text{(C.12)}$$

Lors de l'intégration sur $|\vec{k}|$, il faut donc faire un calcul de partie principale pour obtenir les parties réelle et imaginaire, en exploitant la relation

$$\frac{1}{x - ix_0} = \mathcal{P}\frac{1}{x - x_0} + i\pi\delta(x). \tag{C.13}$$

L'intégration sur les angles sphériques ne pose quant à elle aucune difficulté, seul l'angle θ entre $|\vec{k}|$ et $|\vec{\kappa}|$ intervenant dans l'expression via son cosinus.

En résumé, nous écrivons

$$G = 4M\left\{-Z - \left(\frac{(q^0)^2}{2} - \frac{m_1^2 + m_2^2}{2}\right) J_4\right\}.$$

Comme mentionné plus haut, le calcul peut se faire sans séparer parties convergente et divergente. Evidemment, l'expression globale obtenue est divergente à l'infini, et nous retombons sur les résultats antérieurs si nous plaçons un cut-off partout.

Signalons que nous avons également calculé G en adoptant des notations différentes, par exemple comme sur la figure ci-dessous :

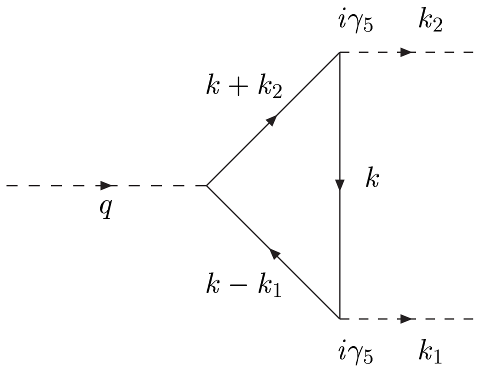

Fig. C.2 – Autres notations

Il ressort des calculs que les résultats dépendent sensiblement de la notation adoptée, avec des écarts de l'ordre de 10-20 % sur les grandeurs avec cut-off. Ceci est lié à la non-renormalisabilité du modèle. Par contre, les intégrales convergentes calculées sans cut-off (comme J_4) sont indépendantes de la notation choisie.

C.2 Calcul en d^4k

Nous nous limitons au calcul de J_4, le calcul de G étant similaire. Notre but ici est d'obtenir un intégrant faisant uniquement intervenir le carré de la quadri-impulsion, de façon à utiliser la relation bien connue en espace euclidien :

$$d^4k = \pi^2 k^2 dk^2.$$

Rappelons que cette relation n'est valable que lorsque les variables d'intégration angulaires n'interviennent pas dans l'intégrant.

Nous reprenons l'expression de J_4 :

$$J_4 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k-\frac{q}{2})^2 - M^2][(k-\kappa)^2 - M^2][(k+\frac{q}{2})^2 - M^2]},$$

à laquelle nous appliquons un artifice de Feynman (annexe B.2) :

$$\frac{1}{abc} = 2\int_0^1 xdx \int_0^1 dy \, \frac{1}{[a(1-x) + bxy + cx(1-y)]^3}.$$

Nous considérons

$$\begin{aligned} a &= (k-\kappa)^2 - M^2, \\ b &= \left(k - \frac{q}{2}\right)^2 - M^2, \\ c &= \left(k + \frac{q}{2}\right)^2 - M^2. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$J_4 = 2\,\frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 xdx \int_0^1 dy \, \frac{1}{\left[k^2 - 2k\kappa + \kappa^2 - M^2 + (\frac{q^2}{4} + kq + 2k\kappa - \kappa^2)x - 2kqxy\right]^3}.$$

Nous voulons ramener le dénominateur à une forme ne faisant plus intervenir la variable k que sous la forme k^2, ce qui nécessite de rassembler les termes en k sous la forme d'un carré parfait et d'effectuer un changement de variable. Après quelques manipulations, le dénominateur s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} &\left(k - \kappa + \frac{1}{2}(q+2\kappa)x - qxy\right)^2 + x\left(\kappa q + \kappa^2 + \frac{q^2}{4}\right) \\ &- \frac{1}{4}(q+2\kappa)^2x^2 - 2\kappa qxy + q(q+2\kappa)x^2y - q^2x^2y^2 - M^2. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable

$$k' = k - \kappa + \frac{1}{2}(q+2\kappa)x - qxy,$$

nous arrivons à

$$\begin{aligned} J_4 \;=\; & 2\frac{\pi^2 dk^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 xdx \int_0^1 dy \,\times \\ & \frac{1}{\left[k^2 - x\left(\kappa q + \kappa^2 + \frac{q^2}{4}\right) + \frac{1}{4}(q+2\kappa)^2x^2 + 2\kappa qxy + q(q+2\kappa)x^2y + q^2x^2y^2 + M^2\right]^3}. \end{aligned}$$

Le changement de signe au dénominateur provient du passage en métrique euclidienne. En exploitant

$$\int_0^{\Lambda} \frac{x}{(x+a)^3}\, dx = \frac{1}{2a}\,\frac{\Lambda^2}{(\Lambda+a)^2},$$

nous obtenons

$$J_4 = \frac{1}{8\pi^2}\int_0^1 x dx \int_0^1 dy\; \frac{1}{2a}\,\frac{(\Lambda^2)^2}{(\Lambda^2+a)^2}, \tag{C.14}$$

avec

$$a = -x\left(\kappa q + \kappa^2 + \frac{q^2}{4}\right) + \frac{1}{4}(q+2\kappa)^2x^2 + 2\kappa qxy - q(q+2\kappa)x^2y + q^2x^2y^2 + M^2$$

et Λ représentant le cut-off en d^4k.

J_4 est une intégrale convergente, donc son expression sans cut-off s'obtient immédiatement en faisant tendre Λ vers l'infini, il reste alors simplement :

$$J_4 = \frac{1}{8\pi^2}\int_0^1 x dx \int_0^1 dy\; \frac{1}{2a}. \tag{C.15}$$

Remarques

Connaissant J_4, nous obtenons aisément G en incluant la fonction Z (développée en métrique euclidienne dans la thèse de [83]). Les régularisations en d^3k et d^4k donnent des différences de l'ordre de 10% sur la grandeur Z, compte tenu des cut-offs respectifs.

Contrairement au calcul en d^3k de la section précédente, les deux notations envisagées dans ce travail (voir figures C.1 et C.2) donnent identiquement les mêmes résultats. Cela est lié au fait que le changement de variable sur k dans le carré parfait est équivalent dans les deux cas.

Signalons enfin une autre méthode de calcul ([95]), que nous avons également implémentée afin de vérifier nos résultats. Nous calculons la fonction G, se rapportant à la boucle triangulaire de la figure C.2 :

$$G = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{4M(-k^2+M^2-k_1k_2)}{[(k-k_1)^2-M^2][k^2-M^2][(k+k_2)^2-M^2]}. \tag{C.16}$$

Nous recourons cette fois à la paramétrisation de Feynman suivante (voir annexe B.2) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{A_1A_2A_3} &= \int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 dz\;\delta(x+y+z-1)\;\frac{2}{(xA_1+yA_2+zA_3)^3}\\ &= \int_0^1 dz\int_0^{1-z} dy\;\frac{2}{[(1-y-z)A_1+yA_2+zA_3]^3}.\end{aligned}$$

Si nous nous trouvons en-dessous du seuil de création d'une paire quark-antiquark virtuelle ($m = q^0 < 2M$), nous obtenons après deux changements de variable

$$\begin{aligned} G &= -2\frac{1}{16\pi^2}\int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \Big[\frac{(4yz-1)k_1k_2 + z(1-2z)k_2^2 + y(1-2y)k_1^2}{\Delta}\, B_u(2,1) \\ &\qquad + B_u(2,1) + B_u(3,0) \Big], \end{aligned}$$

en utilisant les fonctions Beta incomplètes

$$B_u(m,n) = \int_0^u t^{m-1}(1-t)^{n-1}dt, \tag{C.17}$$

où

$$u = \frac{\left(\frac{\Lambda\chi}{M}\right)^2}{1 + \left(\frac{\Lambda\chi}{M}\right)^2 + (y+z-1)(zk_2^2 + yk_1^2) - yzq^2}$$

et

$$\Delta = z(z-1)k_2^2 + y(y-1)k_1^2 - 2yzk_1k_2 + M^2.$$

Annexe D

Calcul des diagrammes de polarisation et des fonctions vertex

D.1 Diagrammes de polarisation

D.1.1 Diagrammes pseudo-scalaires

La définition de l'intégrale de polarisation pseudo-scalaire dans l'espace de Minkowski est la suivante, en notant M la masse du quark unique intervenant dans l'expression :

$$J_5(P) = iN_c n_f \mathrm{tr}_\gamma \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\; i\gamma_5 g(k+P/2) i\gamma_5 g(k-P/2), \tag{D.1}$$

avec $N_c = 3$ et $n_f = 2$, n_f désignant le facteur résultant de la trace sur les matrices de Gell-Mann. En introduisant le confinement via la fonction vertex pseudo-scalaire, nous obtenons :

$$\hat{J}_5(P) = iN_c n_f \mathrm{tr}_\gamma \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\; i\gamma_5 g(k+P/2) i\bar{\Gamma}_5(P,k) g(k-P/2). \tag{D.2}$$

Dans les développements qui suivent, nous considérons un méson au repos ($\vec{P} = 0$), de telle sorte que nous pourrons exploiter les relations (3.51, 3.52) définissant les fonctions vertex Γ_5^{+-} et Γ_5^{-+} :

$$\begin{aligned}
\Lambda^+(\vec{k})\bar{\Gamma}_5(P,k)\Lambda^-(-\vec{k}) &= \Gamma_5^{+-}(P,k)\Lambda^+(\vec{k})\gamma_5\Lambda^-(-\vec{k}),\\
\Lambda^-(-\vec{k})\bar{\Gamma}_5(P,k)\Lambda^+(\vec{k}) &= \Gamma_5^{-+}(P,k)\Lambda^-(-\vec{k})\gamma_5\Lambda^+(\vec{k}),
\end{aligned}$$

avec les opérateurs de projection de Dirac exprimés en (3.55, 3.56) :

$$\begin{aligned}
\Lambda^+(\vec{k}) &= \frac{\not{k} + M}{2M},\; k^\mu = [E(\vec{k}), \vec{k}],\\
\Lambda^-(-\vec{k}) &= \frac{\tilde{\not{k}} + M}{2M},\; \tilde{k}^\mu = [-E(\vec{k}), \vec{k}],
\end{aligned}$$

avec $E(\vec{k}) = \sqrt{|\vec{k}|^2 + M^2}$.
En exprimant le propagateur fermionique en fonction de ces opérateurs via (3.60) :

$$g(k) = (\not{k} - M + i\epsilon)^{-1} = \frac{M}{E(\vec{k})}\left[\frac{\Lambda^+(\vec{k})}{k^0 - E(\vec{k}) + i\epsilon} - \frac{\Lambda^-(-\vec{k})}{k^0 + E(\vec{k}) - i\epsilon}\right],$$

nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\hat{J}_5(P) &= -iN_c n_f \mathrm{tr}_\gamma \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left\{\gamma_5 \frac{M}{E(\vec{k})}\left[\frac{\Lambda^+(\vec{k})}{k^0 + \frac{P^0}{2} - E(\vec{k}) + i\epsilon} - \frac{\Lambda^-(-\vec{k})}{k^0 + \frac{P^0}{2} + E(\vec{k}) - i\epsilon}\right]\right. \\ &\left. \times \bar{\Gamma}_5(P,k)\frac{M}{E(\vec{k})}\left[\frac{\Lambda^+(\vec{k})}{k^0 - \frac{P^0}{2} - E(\vec{k}) + i\epsilon} - \frac{\Lambda^-(-\vec{k})}{k^0 - \frac{P^0}{2} + E(\vec{k}) - i\epsilon}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{D.4}$$

Cette expression fait intervenir quatre pôles dans le plan complexe, dont une représentation est donnée sur la figure D.1.

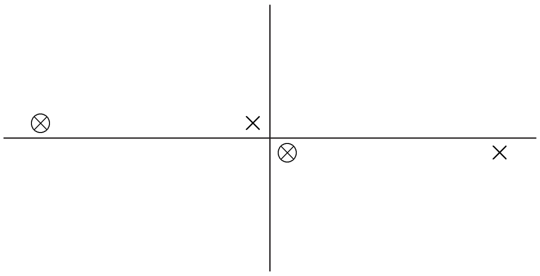

FIG. D.1 – Représentation des pôles complexes

Les pôles relatifs au quark sont indiqués par une croix entourée d'un cercle :

$$\begin{aligned} k^0 &= E(\vec{k}) - \frac{P^0}{2} - i\epsilon, \\ k^0 &= -E(\vec{k}) - \frac{P^0}{2} + i\epsilon, \end{aligned}$$

tandis que ceux relatifs à l'anti-quark (repérés par une croix) sont

$$\begin{aligned} k^0 &= E(\vec{k}) + \frac{P^0}{2} - i\epsilon, \\ k^0 &= -E(\vec{k}) + \frac{P^0}{2} + i\epsilon, \end{aligned}$$

Notons également que les pôles d'énergie positive se situent dans le demi-plan inférieur, les pôles d'énergie négative se trouvant dans le demi-plan supérieur.

Dans l'expression (D.4), nous ne conservons que deux termes sur les quatre, car deux d'entre eux présentent leurs deux pôles en k^0 du même côté de l'axe réel, conduisant à une intégrale nulle en vertu du théorème des résidus. Le calcul de la trace sur les matrices de Dirac donne :

$$\mathrm{tr}_\gamma \gamma_5(\not{k} + M)\gamma_5(\tilde{\not{k}} + M) = 8E^2(\vec{k}),$$

$$\mathrm{tr}_\gamma \gamma_5(\tilde{\not{k}} + M)\gamma_5(\not{k} + M) = 8E^2(\vec{k}).$$

Nous devons donc intégrer sur k^0 l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\hat{J}_5(P) \quad = \quad -iN_c n_f \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Bigg\{ \frac{M^2}{E^2(\vec{k})} \frac{8E^2(\vec{k})}{4M^2} \Bigg[& \frac{\Gamma_5^{+-}(P^0, |\vec{k}|)}{\left(k^0 + \frac{P^0}{2} - E(\vec{k}) + i\epsilon\right)\left(k^0 - \frac{P^0}{2} + E(\vec{k}) - i\epsilon\right)} \\ & + \frac{\Gamma_5^{-+}(P^0, |\vec{k}|)}{\left(k^0 + \frac{P^0}{2} + E(\vec{k}) - i\epsilon\right)\left(k^0 - \frac{P^0}{2} - E(\vec{k}) + i\epsilon\right)} \Bigg] \Bigg\}.\end{aligned} \tag{D.5}$$

Nous choisissons les contours d'intégration dans le demi-plan inférieur, et nous obtenons finalement via le théorème des résidus appliqué à des pôles simples :

$$\hat{J}_5(P^0) = -2N_c n_f \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\frac{\Gamma_5^{+-}(P^0, |\vec{k}|)}{P^0 - 2E(|\vec{k}|)} - \frac{\Gamma_5^{-+}(P^0, \vec{k})}{P^0 + 2E(\vec{k})} \right]. \tag{D.6}$$

Notons que le premier terme du membre de droite dans (D.5) conduit à un quark se trouvant sur sa couche de masse positive ($\frac{P^0}{2} + k^0 = E(\vec{k})$), tandis que le second terme conduit à un antiquark sur sa couche de masse négative ($-\frac{P^0}{2} + k^0 = E(\vec{k})$). La singularité qui apparaîtrait quand le quark et l'antiquark sont tous les deux sur leur couche de masse est éliminée par le fait que $\Gamma_5^{+-}(P^0, \vec{k}) = 0$ en ce point (où $P^0 = 2E(\vec{k})$ et $k^0 = 0$) [39].

L'expression sans confinement s'obtient aisément en remplaçant les fonctions Γ_5^{+-} et Γ_5^{-+} par l'unité, ce qui donne :

$$J_5(P^0) = -2N_c n_f \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{4E(\vec{k})}{(P^0)^2 - 4E^2(\vec{k})}, \tag{D.7}$$

c'est-à-dire, en développant l'intégrale sphérique,

$$J_5(P^0) = -4N_c n_f \frac{1}{\pi^2} \int_0^\Lambda d|\vec{k}||\vec{k}|^2 \frac{E(\vec{k})}{(P^0)^2 - 4E^2(\vec{k})}. \tag{D.8}$$

Cette expression sans confinement s'obtient bien entendu en remplaçant dans l'expression initiale (D.2) $\bar{\Gamma}_5(P, k)$ par γ_5. Un cut-off sur le module de l'impulsion est indispensable, en raison de la divergence ultraviolette de l'intégrant.

Quand le diagramme de polarisation fait intervenir deux saveurs de quark, nous définissons la fonction suivante :

$$\hat{J}_5^{ab}(P) = iN_c n_f \mathrm{tr}_\gamma \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, i\gamma_5 g_a(k+P/2) i\bar{\Gamma}_5^{ab}(P,k) g_b(k-P/2). \tag{D.9}$$

Des développements similaires à ceux qui ont mené à l'expression de $\hat{J}_5(P^0)$ donnent :

$$\begin{aligned}\hat{J}_5^{ab}(P^0) = -2N_c \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, &\frac{M_a M_b + E_a(\vec{k})E_b(\vec{k}) + \vec{k}^2}{E_a(\vec{k})E_b(\vec{k})} \\ &\times \left[\frac{\Gamma_5^{ab,+-}(P^0,|\vec{k}|)}{P^0 - E_a(\vec{k}) - E_b(\vec{k})} - \frac{\Gamma_5^{ab,-+}(P^0,|\vec{k}|)}{P^0 + E_a(\vec{k}) + E_b(\vec{k})}\right].\end{aligned} \tag{D.10}$$

Cette expression se ramène évidemment à (D.6) lorsque $M_a = M_b = M$.

D.1.2 Diagrammes scalaires

L'intégrale de polarisation scalaire est définie comme suit :

$$J_S(P) = iN_c n_f \mathrm{tr}_\gamma \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, g(k+P/2) g(k-P/2). \tag{D.11}$$

En introduisant le confinement via la fonction vertex scalaire, nous écrivons :

$$\hat{J}_S(P) = iN_c n_f \mathrm{tr}_\gamma \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, g(k+P/2)\bar{\Gamma}_S(P,k) g(k-P/2). \tag{D.12}$$

Nous considérons toujours un méson au repos ($\vec{P}=0$), ce qui nous autorise à exploiter les relations (3.53, 3.54) définissant les fonctions vertex Γ_S^{+-} et Γ_S^{-+} :

$$\begin{aligned}\Lambda^+(\vec{k})\bar{\Gamma}_S(P,k)\Lambda^-(-\vec{k}) &= \Gamma_S^{+-}(P,k)\Lambda^+(\vec{k})\Lambda^-(-\vec{k}),\\ \Lambda^-(-\vec{k})\bar{\Gamma}_S(P,k)\Lambda^+(\vec{k}) &= \Gamma_S^{-+}(P,k)\Lambda^-(-\vec{k})\Lambda^+(\vec{k}),\end{aligned}$$

où nous avons utilisé les opérateurs de projection de Dirac définis en (3.55, 3.56). En exploitant l'expression du propagateur fermionique (3.60), nous arrivons à :

$$\begin{aligned}\hat{J}_S(P) = iN_c n_f \mathrm{tr}_\gamma \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Bigg\{ &\frac{M}{E(\vec{k})}\left[\frac{\Lambda^+(\vec{k})}{k^0 + \frac{P^0}{2} - E(\vec{k}) + i\epsilon} - \frac{\Lambda^-(-\vec{k})}{k^0 + \frac{P^0}{2} + E(\vec{k}) - i\epsilon}\right] \\ &\bar{\Gamma}_S(P,k)\frac{M}{E(\vec{k})}\left[\frac{\Lambda^+(\vec{k})}{k^0 - \frac{P^0}{2} - E(\vec{k}) + i\epsilon} - \frac{\Lambda^-(-\vec{k})}{k^0 - \frac{P^0}{2} + E(\vec{k}) - i\epsilon}\right]\Bigg\}.\end{aligned}$$

Encore une fois, nous choisissons le contour d'intégration dans le demi-plan inférieur. Seuls deux des quatre termes subsistent. Le calcul de la trace sur les matrices de Dirac donne :

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_\gamma(\not{k} + M)(\tilde{\not{k}} + M) &= -8|\vec{k}|^2,\\ \mathrm{tr}_\gamma(\tilde{\not{k}} + M)(\not{k} + M) &= -8|\vec{k}|^2.\end{aligned}$$

Nous intégrons donc sur k^0 l'expression suivante :

$$\hat{J}_S(P) = iN_c n_f \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{M^2}{E^2(\vec{k})} \frac{8|\vec{k}|^2}{4M^2} \left[\frac{\Gamma_S^{+-}(P^0, |\vec{k}|)}{\left(k^0 + \frac{P^0}{2} - E(\vec{k}) + i\epsilon\right)\left(k^0 - \frac{P^0}{2} + E(\vec{k}) - i\epsilon\right)} \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\Gamma_S^{-+}(P^0, |\vec{k}|)}{\left(k^0 + \frac{P^0}{2} + E(\vec{k}) - i\epsilon\right)\left(k^0 - \frac{P^0}{2} - E(\vec{k}) + i\epsilon\right)} \right] \right\}.$$

Le théorème des résidus fournit :

$$\hat{J}_S(P^0) = -2N_c n_f \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{|\vec{k}|^2}{E^2(\vec{k})} \left[\frac{\Gamma_S^{+-}(P^0, |\vec{k}|)}{P^0 - 2E(\vec{k})} - \frac{\Gamma_S^{-+}(P^0, |\vec{k}|)}{P^0 + 2E(\vec{k})} \right]. \tag{D.13}$$

L'expression sans confinement s'obtient en remplaçant les fonctions Γ_S^{+-} et Γ_S^{-+} par l'unité, ce qui donne :

$$J_S(P^0) = -2N_c n_f \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{4|\vec{k}|^2}{E(\vec{k}) \left[(P^0)^2 - 4E^2(\vec{k}) \right]}, \tag{D.14}$$

c'est-à-dire, en développant l'intégrale sphérique,

$$J_S(P^0) = -4N_c n_f \frac{1}{\pi^2} \int_0^\Lambda d|\vec{k}| \frac{|\vec{k}|^4}{E(\vec{k}) \left[(P^0)^2 - 4E^2(\vec{k}) \right]}. \tag{D.15}$$

Encore une fois, la divergence de l'intégrale requiert l'introduction d'un cut-off.

Le diagramme de polarisation faisant intervenir deux saveurs de quarks est défini de la façon suivante :

$$\hat{J}_S^{ab}(P) = iN_c n_f \mathrm{tr}_\gamma \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \; g_a(k + P/2) \bar{\Gamma}_S^{ab}(P, k) g_b(k - P/2). \tag{D.16}$$

Des calculs analogues fournissent :

$$\hat{J}_S^{ab}(P^0) = -N_c n_f \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{E_a(\vec{k})E_b(\vec{k}) + |\vec{k}|^2 - M_a M_b}{E_a(\vec{k})E_b(\vec{k})} \left[\frac{\Gamma_S^{ab,+-}(P^0, |\vec{k}|)}{P^0 - E_a(\vec{k}) - E_b(\vec{k})} - \frac{\Gamma_S^{ab,-+}(P^0, |\vec{k}|)}{P^0 + E_a(\vec{k}) + E_b(\vec{k})} \right]. \tag{D.17}$$

Si $M_a = M_b = M$, nous retrouvons bien entendu l'expression de $J_S(P^0)$ (D.13).

D.2 Dérivation des équations de vertex

D.2.1 Vertex pseudo-scalaire

Le vertex pseudo-scalaire vérifie l'équation intégrale suivante, correspondant à la figure 3.2 :

$$\bar{\Gamma}_5(P,k) = \gamma_5 - i\int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\left[\gamma^\rho g(k' + P/2)\bar{\Gamma}_5(P,k')g(k' - P/2)\gamma_\rho V^c(\vec{k}-\vec{k}')\right]. \tag{D.18}$$

Nous exprimons les propagateurs fermioniques en fonction des opérateurs de projection de Dirac (3.55, 3.56), et nous utilisons la définition (3.51, 3.52) des grandeurs scalaires Γ_5^{+-} et Γ_5^{-+}. Afin de nous ramener à des expressions scalaires dans les deux membres, nous multiplions à gauche par $\gamma_5\Lambda^+(\vec{k})$ et à droite par $\Lambda^-(-\vec{k})$. Ensuite nous calculons la trace et enfin nous divisons par $\mathrm{tr}_\gamma[\gamma_5\Lambda^+(\vec{k})\gamma_5\Lambda^-(-\vec{k})]$.
Nous devons donc calculer la trace de l'expression suivante :

$$\begin{aligned}&\gamma_5\frac{\not{k}+M}{2M}\gamma^\mu\frac{M}{E(\vec{k}')}\left[\frac{\Lambda^+(\vec{k}')}{k'^0+\frac{P^0}{2}-E(\vec{k}')+i\epsilon}-\frac{\Lambda^-(-\vec{k}')}{k'^0+\frac{P^0}{2}+E(\vec{k}')-i\epsilon}\right]\bar{\Gamma}_5(P,k')\\ &\times\frac{M}{E(\vec{k})}\left[\frac{\Lambda^+(\vec{k})}{k'^0-\frac{P^0}{2}-E(\vec{k})+i\epsilon}-\frac{\Lambda^-(-\vec{k})}{k'^0-\frac{P^0}{2}+E(\vec{k})-i\epsilon}\right]\gamma_\mu V^c(\vec{k}-\vec{k}')\frac{\tilde{\not{k}}+M}{2M}.\end{aligned} \tag{D.19}$$

En ne conservant que les deux termes présentant un seul pôle en k'^0 dans le demi-plan inférieur, l'expression (D.19) se ramène à :

$$\begin{aligned}\frac{V^c(\vec{k}-\vec{k}')}{4E^2(\vec{k}')}\gamma_5(\not{k}+M)\gamma^\mu\Bigg\{&-\frac{\Gamma_5^{+-}(P^0,\vec{k}')\Lambda^+(\vec{k}')\gamma_5\Lambda^-(-\vec{k}')}{\left(k'^0+\frac{P^0}{2}-E(\vec{k}')+i\epsilon\right)\left(k'^0-\frac{P^0}{2}+E(\vec{k}')-i\epsilon\right)}\\ &-\frac{\Gamma_5^{-+}(P^0,\vec{k}')\Lambda^-(-\vec{k}')\gamma_5\Lambda^+(\vec{k}')}{\left(k'^0+\frac{P^0}{2}+E(\vec{k}')-i\epsilon\right)\left(k'^0-\frac{P^0}{2}-E(\vec{k}')+i\epsilon\right)}\Bigg\}\gamma_\mu(\tilde{\not{k}}+M).\end{aligned} \tag{D.20}$$

Des développements simples montrent que :

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}_\gamma\left\{\gamma_5(\not{k}+M)\gamma^\mu(\not{k}'+M)\gamma_5(\tilde{\not{k}}'+M)\gamma_\mu(\tilde{\not{k}}+M)\right\}\\ &= -8E^2(\vec{k}')8E^2(\vec{k}) + 2M\left[8ME(\vec{k})E(\vec{k}') - 8ME(\vec{k})(-E(\vec{k}'))\right]\\ &= -64E^2(\vec{k}')E^2(\vec{k}) + 32M^2E(\vec{k})E(\vec{k}').\end{aligned} \tag{D.21}$$

Cette expression est contenue dans le terme en $\Gamma_5^{+-}(P^0,\vec{k}')$. Le deuxième terme de (D.20), en $\Gamma_5^{-+}(P^0,\vec{k}')$ se distingue seulement par l'échange de $\not{k}'$ et de $\tilde{\not{k}}'$. Un calcul tout-à-fait analogue montre que dans ce cas,

$$\mathrm{tr}_\gamma\left\{\gamma_5(\not{k}+M)\gamma^\mu(\tilde{\not{k}}'+M)\gamma_5(\not{k}'+M)\gamma_\mu(\tilde{\not{k}}+M)\right\} = -64E^2(\vec{k}')E^2(\vec{k}) - 32M^2E(\vec{k})E(\vec{k}').$$

L'équation intégrale régissant le vertex Γ_5^{+-} s'écrit donc :

$$\begin{aligned}\Gamma_5^{+-}(P^0,\vec{k})\frac{2E^2(\vec{k})}{M^2} &= \frac{2E^2(\vec{k})}{M^2} - i\int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\Bigg\{\frac{V^c(\vec{k}-\vec{k}')}{16M^2E^2(\vec{k}')}\times \\ &\Bigg[\Gamma_5^{+-}(P^0,\vec{k}')\frac{64E^2(\vec{k}')E^2(\vec{k}) - 32M^2E(\vec{k})E(\vec{k}')}{\left(k'^0+\frac{P^0}{2}-E(\vec{k}')+i\epsilon\right)\left(k'^0-\frac{P^0}{2}+E(\vec{k}')-i\epsilon\right)} \\ &+\Gamma_5^{-+}(P^0,\vec{k}')\frac{64E^2(\vec{k}')E^2(\vec{k}) + 32M^2E(\vec{k})E(\vec{k}')}{\left(k'^0+\frac{P^0}{2}+E(\vec{k}')-i\epsilon\right)\left(k'^0-\frac{P^0}{2}-E(\vec{k}')+i\epsilon\right)}\Bigg]\Bigg\}.\end{aligned}$$

En divisant les deux membres par $\frac{2E^2(\vec{k})}{M^2}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\Gamma_5^{+-}(P^0,\vec{k}) &= 1 - i\int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\Bigg\{\frac{V^c(\vec{k}-\vec{k}')}{E^2(\vec{k})E^2(\vec{k}')}\times \\ &\Bigg[\Gamma_5^{+-}(P^0,\vec{k}')\frac{2E^2(\vec{k}')E^2(\vec{k}) - M^2E(\vec{k})E(\vec{k}')}{\left(k'^0+\frac{P^0}{2}-E(\vec{k}')+i\epsilon\right)\left(k'^0-\frac{P^0}{2}+E(\vec{k}')-i\epsilon\right)} \\ &+\Gamma_5^{-+}(P^0,\vec{k}')\frac{2E^2(\vec{k}')E^2(\vec{k}) + M^2E(\vec{k})E(\vec{k}')}{\left(k'^0+\frac{P^0}{2}+E(\vec{k}')-i\epsilon\right)\left(k'^0-\frac{P^0}{2}-E(\vec{k}')+i\epsilon\right)}\Bigg]\Bigg\}.\end{aligned}$$

Nous intégrons maintenant sur k'^0, en choisissant les contours d'intégration dans le demi-plan inférieur. En appliquant le théorème des résidus, nous obtenons

$$\begin{aligned}\Gamma_5^{+-}(P^0,\vec{k}) = 1 - \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\,\frac{V^c(\vec{k}-\vec{k}')}{E(\vec{k})E(\vec{k}')}\Bigg[&\Gamma_5^{+-}(P^0,\vec{k}')\frac{M^2-2E(\vec{k})E(\vec{k}')}{P^0-2E(\vec{k}')} \\ &+\Gamma_5^{-+}(P^0,\vec{k}')\frac{M^2-2E(\vec{k})E(\vec{k}')}{P^0-2E(\vec{k}')}\Bigg].\end{aligned}$$

Dans la section 3.3, nous faisons référence aux publications [74, 75] qui indiquent que les termes croisés peuvent être négligés. C.M. Shakin et ses collaborateurs [42] reprennent également les conclusions de ces deux articles. De la même façon, nous ne tenons pas compte du couplage entre Γ_5^{+-} et Γ_5^{-+}, et nous écrivons

$$\Gamma_5^{+-}(P^0,|\vec{k}|) = 1 - \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\,\frac{M^2-2E(\vec{k})E(\vec{k}')}{E(\vec{k})E(\vec{k}')}\,\frac{\Gamma_5^{+-}(P^0,|\vec{k}'|)V^c(\vec{k}-\vec{k}')}{P^0-2E(\vec{k}')}. \tag{D.22}$$

Des développements tout-a-fait similaires conduisent à

$$\Gamma_5^{-+}(P^0,|\vec{k}|) = 1 + \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\,\frac{M^2-2E(\vec{k})E(\vec{k}')}{E(\vec{k})E(\vec{k}')}\,\frac{\Gamma_5^{-+}(P^0,|\vec{k}'|)V^c(\vec{k}-\vec{k}')}{P^0+2E(\vec{k}')}. \tag{D.23}$$

Il est important de noter que $\Gamma_5^{+-}(P^0,|\vec{k}|) = 0$ quand $P^0 - 2E(\vec{k}') = 0$. Cette propriété du modèle de confinement supprime les coupures $q\bar{q}$ non physiques qui apparaîtraient sinon dans les diagrammes de polarisation.

D'une façon générale, nous pouvons également écrire

$$\bar{\Gamma}_5(P,k) = \gamma_5 \left(b_0(P,k) + \not{P} b_1(P,k) + \not{k} b_2(P,k) + i\sigma^{\mu\nu} P_\mu k_\nu b_3(P,k)\right). \tag{D.24}$$

Toutefois, dans le cadre du modèle de confinement vecteur sans transfert d'énergie via le champ confinant, Il est possible de montrer que seuls deux termes subsistent, avec $\vec{P} = 0$:

$$\bar{\Gamma}_5(P^0,\vec{k}) = \gamma_5 \left(b_0(P^0,\vec{k}) + \gamma^0 P^0 b_1(P^0,\vec{k})\right) \tag{D.25}$$

Pour l'étude des kaons, mésons pseudo-scalaires d'isospin demi-entier constitués de quarks u (d) et s, nous devons généraliser le calcul des fonctions $\Gamma_5^{-+}(P^0,\vec{k})$ et $\hat{J}_5(P^0)$ au cas où différents quarks constituants interviennent. Pour ce faire, nous définissons, avec des notations évidentes,

$$\begin{aligned} \Lambda_a^+(\vec{k}) &= \frac{\not{k}_a + M_a}{2M_a},\ k_a^\mu = [E_a(\vec{k}),\vec{k}], & \text{(D.26)} \\ \Lambda_b^-(-\vec{k}) &= \frac{\tilde{\not{k}}_b + M_b}{2M_b},\ \tilde{k}_b^\mu = [-E_b(\vec{k}),\vec{k}]. & \text{(D.27)} \end{aligned}$$

Les nouvelles fonctions vertex sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} \Lambda_a^+(\vec{k})\bar{\Gamma}_5^{ab}(P,k)\Lambda_b^-(-\vec{k}) &= \Gamma_5^{ab,+-}(P,k)\Lambda_a^+(\vec{k})\gamma_5\Lambda_b^-(-\vec{k}), & \text{(D.28)} \\ \Lambda_a^-(-\vec{k})\bar{\Gamma}_5^{ab}(P,k)\Lambda_b^+(\vec{k}) &= \Gamma_5^{ab,-+}(P,k)\Lambda_a^-(-\vec{k})\gamma_5\Lambda_b^+(\vec{k}). & \text{(D.29)} \end{aligned}$$

L'équation intégrale du vertex 'mixte' s'écrit :

$$\bar{\Gamma}_5^{ab}(P,k) = \gamma_5 - i\int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \left[\gamma^\rho g_a(k'+P/2)\bar{\Gamma}_5^{ab}(P,k')g_b(k'-P/2)\gamma_\rho V^c(\vec{k}-\vec{k}')\right], \tag{D.30}$$

avec $g_a(k) = (\not{k} - M_a + i\epsilon)^{-1}$, etc.
En considérant toujours $\vec{P} = 0$, nous multiplions à gauche par $\gamma_5\Lambda_a^+(\vec{k})$ et à droite par $\Lambda_b^-(-\vec{k})$, ensuite nous calculons la trace et nous divisons par $\mathrm{tr}_\gamma[\gamma_5\Lambda_a^+(\vec{k})\gamma_5\Lambda_b^-(-\vec{k})]$. En négligeant comme auparavant le couplage entre $\Gamma_5^{ab,+-}$ et $\Gamma_5^{ab,-+}$, l'intégration sur k'^0 avec les contours dans le demi-plan inférieur fournit :

$$\Gamma_5^{ab,+-}(P^0,|\vec{k}|) = 1 - \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \frac{B(\vec{k},\vec{k}')\Gamma_5^{ab,+-}(P^0,|\vec{k}'|)V^c(\vec{k}-\vec{k}')}{P^0 - E_a(\vec{k}') - E_b(\vec{k}')}, \tag{D.31}$$

et

$$\Gamma_5^{ab,-+}(P^0,|\vec{k}|) = 1 + \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \frac{B(\vec{k},\vec{k}')\Gamma_5^{ab,-+}(P^0,|\vec{k}'|)V^c(\vec{k}-\vec{k}')}{P^0 + E_a(\vec{k}') + E_b(\vec{k}')}. \tag{D.32}$$

où

$$
\begin{aligned}
B(\vec{k},\vec{k'}) &= \frac{1}{2E_a(\vec{k'})E_b(\vec{k'})[M_aM_b + E_a(\vec{k})E_b(\vec{k}) + \vec{k}^2]} \\
&\times\Big\{ M_aM_b[E_a(\vec{k})E_b(\vec{k'}) + E_b(\vec{k})E_a(\vec{k'}) + 2\vec{k}.\vec{k'} - 2E_a(\vec{k'})E_b(\vec{k'}) - 2\vec{k}^2\vec{k'}^2] \\
&\quad + M_b^2[E_a(\vec{k})E_a(\vec{k'}) - \vec{k}.\vec{k'}] + M_a^2[E_b(\vec{k})E_b(\vec{k'}) - \vec{k}.\vec{k'}] \\
&\quad - 2[E_a(\vec{k})E_b(\vec{k}) + \vec{k}^2][E_a(\vec{k'})E_b(\vec{k'}) + \vec{k'}^2] - 2M_a^2M_b^2 \Big\}.
\end{aligned}
$$

Evidemment, en posant $M_a = M_b = M$, nous nous ramenons aux expressions (D.22) et (D.23) pour $\Gamma_5^{+-}(P^0,|\vec{k}|)$ et $\Gamma_5^{-+}(P^0,|\vec{k}|)$.

D.2.2 Vertex scalaire

Le vertex scalaire s'obtient en résolvant l'équation intégrale suivante, correspondant à la figure 3.2 :

$$
\bar{\Gamma}_S(P,k) = \mathbb{1} - i\int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\left[\gamma^\rho g(k' + P/2)\bar{\Gamma}_S(P,k')g(k' - P/2)\gamma_\rho V^c(\vec{k} - \vec{k'})\right]. \tag{D.33}
$$

Nous procédons ici de façon différente, en écrivant le vertex scalaire sous sa forme covariante la plus générale :

$$
\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_S(P,k) &= a_1(P,P.k,k) + \hat{\not{k}}a_2(P,P.k,k) \\
&\quad + \not{P}a_3(P,P.k,k) + 2i\sigma_{\mu\nu}P^\mu k^\nu a_4(P,P.k,k),
\end{aligned} \tag{D.34}
$$

avec

$$
\hat{k}^\mu = k^\mu - (k.P)\frac{P^\mu}{P^2}. \tag{D.35}
$$

Sous certaines hypothèses, cette forme générale se ramène à une forme plus simple. Nous pouvons déjà supprimer la dépendance en $P.k$ en raison de l'absence de transfert d'énergie dans notre potentiel d'interaction (3.5). Après des développements assez longs [39], nous trouvons $a_4 = 0$. De même, le fait que $V^c(k)$ ne dépend pas de k^0 entraîne $a_3 = 0$. Finalement, l'identification des termes correspondants dans les deux membres donne :

$$
a_1(P,k) = 1 - 4\pi\int \frac{|\vec{k'}|^2 d|\vec{k'}|}{(2\pi)^3}\,\frac{-8|\vec{k'}|^2 V_0^c(k,k')[a_1(P,k') + Ma_2(P,k')]}{E(k')[(P^0)^2 - 4E^2(k')]}, \tag{D.36}
$$

$$
a_2(P,k) = 4\pi\int \frac{|\vec{k'}|^2 d|\vec{k'}|}{(2\pi)^3}\,\frac{|\vec{k'}|V_1^c(k,k')4M[a_1(P,k') + Ma_2(P,k')]}{|\vec{k}|E(k')[(P^0)^2 - 4E^2(k')]}, \tag{D.37}
$$

avec

$$
V_l^c(k,k') = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx P_l(x) V^c\left(|\vec{k}|^2 + |\vec{k'}|^2 - 2|\vec{k}||\vec{k'}|x\right),
$$

$P_l(x)$ désignant le polynôme de Legendre d'ordre l.
Les grandeurs $a_1(P,k)$ et $a_2(P,k)$ sont linéairement liées aux fonctions vertex $\Gamma_S^{+-}, \Gamma_S^{-+}, \Gamma_S^{++}$ et Γ_S^{--} définies en (3.53, 3.54, 3.58 3.59) :

$$\Gamma_S^{+-}(P,k) = \Gamma_S^{-+}(P,k) = a_1(P,k) + Ma_2(P,k)$$

et

$$\Gamma_S^{++}(P,k) = \Gamma_S^{--}(P,k) = a_1(P,k) - \frac{|\vec{k}|^2}{M} a_2(P,k).$$

Finalement, à partir des équations (D.36, D.37), nous obtenons, avec $\vec{P} = 0$,

$$\Gamma_S^{+-}(P^0, |\vec{k}|) = 1 - 4\pi \int \frac{|\vec{k}'|^2 d|\vec{k}'|}{(2\pi)^3} \frac{-8|\vec{k}'|^2 \left[V_0^c(k,k') + \frac{M^2}{2|\vec{k}||\vec{k}'|} V_1^c(k,k')\right]}{E(k')[(P^0)^2 - 4E^2(k')]} \Gamma_S^{+-}(P^0, |\vec{k}'|), \tag{D.38}$$

$$\Gamma_S^{++}(P^0, |\vec{k}|) = 1 - 4\pi \int \frac{|\vec{k}'|^2 d|\vec{k}'|}{(2\pi)^3} \frac{-8|\vec{k}'|^2 \left[V_0^c(k,k') - \frac{|\vec{k}|}{2|\vec{k}'|} V_1^c(k,k')\right]}{E(k')[(P^0)^2 - 4E^2(k')]} \Gamma_S^{+-}(P^0, |\vec{k}'|). \tag{D.39}$$

Le vertex scalaire mixte, nécessaire pour étudier le kaon scalaire, vérifie l'équation suivante :

$$\bar{\Gamma}_S^{ab}(P,k) = \mathbb{1} - i \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \left[\gamma^\rho g_a(k' + P/2) \bar{\Gamma}_S^{ab}(P,k') g_b(k' - P/2) \gamma_\rho V^c(\vec{k} - \vec{k}')\right]. \tag{D.40}$$

Nous utilisons cette fois les définitions suivantes :

$$\Lambda_a^+(\vec{k}) \bar{\Gamma}_S^{ab}(P,k) \Lambda_b^-(-\vec{k}) = \Gamma_S^{ab,+-}(P,k) \Lambda_a^+(\vec{k}) \Lambda_b^-(-\vec{k}), \tag{D.41}$$

$$\Lambda_a^-(-\vec{k}) \bar{\Gamma}_S^{ab}(P,k) \Lambda_b^+(\vec{k}) = \Gamma_S^{ab,-+}(P,k) \Lambda_a^-(-\vec{k}) \Lambda_b^+(\vec{k}). \tag{D.42}$$

Avec les mêmes méthodes de calcul, nous obtenons

$$\Gamma_S^{ab,+-}(P^0, |\vec{k}|) = 1 - \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \frac{A_1(\vec{k}, \vec{k}', \cos\theta)}{E_a(\vec{k}') E_b(\vec{k}') B(\vec{k})} \frac{\Gamma_S^{ab,+-}(P^0, |\vec{k}'|) V^c(\vec{k} - \vec{k}')}{P^0 - E_a(\vec{k}') - E_b(\vec{k}')} \tag{D.43}$$

et

$$\Gamma_S^{ab,-+}(P^0, |\vec{k}|) = 1 - \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \frac{\tilde{A}_1(\vec{k}, \vec{k}', \cos\theta)}{E_a(\vec{k}') E_b(\vec{k}') B(\vec{k})} \frac{\Gamma_S^{ab,-+}(P^0, |\vec{k}'|) V^c(\vec{k} - \vec{k}')}{P^0 + E_a(\vec{k}') + E_b(\vec{k}')}, \tag{D.44}$$

où

$$B(\vec{k}) = -E_a(\vec{k}) E_b(\vec{k}) - \vec{k}^2 + M_a M_b,$$

$$
\begin{aligned}
A_1(\vec{k},\vec{k'},\cos\theta) \quad = \quad & [E_a(\vec{k'})E_b(\vec{k'}) + \vec{k'}^2][E_a(\vec{k})E_b(\vec{k}) + \vec{k}^2] \\
& -M_aM_b\big[E_a(\vec{k})E_b(\vec{k}) + \vec{k}^2 + E_a(\vec{k'})E_b(\vec{k'}) + \vec{k'}^2 \\
& -M_aM_b - 0.5E_a(\vec{k})E_b(\vec{k'}) - 0.5E_b(\vec{k})E_a(\vec{k'})\big] \\
& -0.5M_b^2E_a(\vec{k})E_a(\vec{k'}) - 0.5M_a^2E_b(\vec{k})E_b(\vec{k'}) + \vec{k}.\vec{k'}(M_aM_b + 0.5M_a^2 + 0.5M_b^2).
\end{aligned}
$$

$\tilde{A}_1(\vec{k},\vec{k'},\cos\theta)$ est obtenu à partir de $A_1(\vec{k},\vec{k'},\cos\theta)$ en remplaçant $E_a(\vec{k})$ par $-E_a(\vec{k})$ et $E_b(\vec{k})$ par $-E_b(\vec{k})$.
Nous pouvons noter la symétrie $a \longleftrightarrow b$ dans les expressions de $\Gamma_S^{ab,+-}(P^0,|\vec{k}|)$ et $\Gamma_S^{ab,-+}(P^0,|\vec{k}|)$, si bien que $\Gamma_S^{ab} = \Gamma_S^{ba}$.

Annexe E

Boucle triangulaire avec confinement

E.1 Avec confinement sur le seul vertex scalaire

Hypothèses :

- Le méson scalaire incident est au repos.
- Nous introduisons le confinement dans le vertex du méson scalaire, qui est pris sur sa couche de masse.
- Le confinement est négligé pour les deux mésons pseudo-scalaires pris sur leur couche de masse.

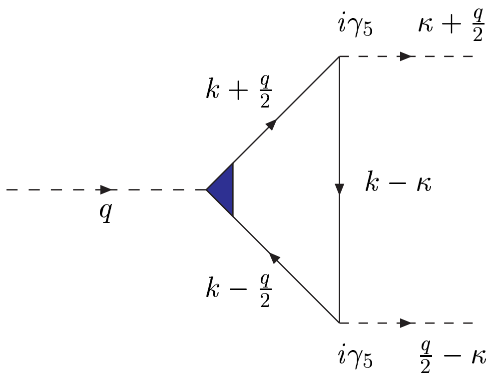

FIG. E.1 – Désintégration d'un scalaire en deux mésons pseudo-scalaires ; vertex scalaire

La trace dans l'espace de Dirac sur la boucle triangulaire de quarks a l'expression suivante :

$$\hat{G}_{abc}(q,\kappa) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \mathrm{tr}_\gamma \left\{ g(k-\kappa) i\gamma_5 g(k+\frac{q}{2}) \bar{\Gamma}_S(q,k) g(k-\frac{q}{2}) i\gamma_5 \right\}. \qquad \text{(E.1)}$$

Nous calculons cette expression lorsqu'une seule saveur de quark intervient, en notant M la masse constituante. Nous utilisons la décomposition (3.60) du propagateur fermionique.

Comme nous considérons un méson scalaire incident au repos ($\vec{q}=0$), nous avons

$$\begin{aligned}\Lambda^+(\vec{k}+\frac{\vec{q}}{2}) &= \Lambda^+(\vec{k}-\frac{\vec{q}}{2}) \\ &= \Lambda^+(\vec{k}), \\ \Lambda^-(\vec{k}+\frac{\vec{q}}{2}) &= \Lambda^-(\vec{k}-\frac{\vec{q}}{2}) \\ &= \Lambda^-(\vec{k}).\end{aligned}$$

Avec les notations

$$\begin{aligned}E(\vec{k}) &\equiv E, \\ E(\vec{k}-\vec{\kappa}) &\equiv E' = \sqrt{(\vec{k}-\vec{\kappa})^2+M^2},\end{aligned}$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned}\hat{G}_{aaa}(q,\kappa) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{tr}_\gamma\left\{\frac{M}{E'}\left[\frac{\Lambda^+(\vec{k}-\vec{\kappa})}{k^0-\kappa^0-E'+i\varepsilon}-\frac{\Lambda^-(\vec{k}-\vec{\kappa})}{k^0-\kappa^0+E'-i\varepsilon}\right]i\gamma_5\right. \\ &\quad\times\frac{M}{E}\left[\frac{\Lambda^+}{k^0+\frac{q^0}{2}-E+i\varepsilon}-\frac{\Lambda^-}{k^0+\frac{q^0}{2}+E-i\varepsilon}\right]\bar{\Gamma}_S(q,k) \\ &\quad\left.\times\frac{M}{E}\left[\frac{\Lambda^+}{k^0-\frac{q^0}{2}-E+i\varepsilon}-\frac{\Lambda^-}{k^0-\frac{q^0}{2}+E-i\varepsilon}\right]i\gamma_5\right\}.\end{aligned}$$

En exploitant les relations (3.53, 3.54, 3.58, 3.59), la boucle triangulaire s'écrit

$$\begin{aligned}\hat{G}_{aaa} &= \mathrm{tr}_\gamma\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{8E^2E'}\;\times \\ &\left\{-\Gamma_S^{+-}(q^0,|\vec{k}|)\frac{(\not{k}-\not{\kappa}+M)i\gamma_5(\not{k}+M)(\tilde{\not{k}}+M)i\gamma_5}{(k^0-\kappa^0-E'+i\varepsilon)(k^0+\frac{q^0}{2}-E+i\varepsilon)(k^0-\frac{q^0}{2}+E-i\varepsilon)}\right. \\ &-\Gamma_S^{-+}(q^0,|\vec{k}|)\frac{(\not{k}-\not{\kappa}+M)i\gamma_5(\tilde{\not{k}}+M)(\not{k}+M)i\gamma_5}{(k^0-\kappa^0-E'+i\varepsilon)(k^0+\frac{q^0}{2}+E-i\varepsilon)(k^0-\frac{q^0}{2}-E+i\varepsilon)} \\ &+\Gamma_S^{--}(q^0,|\vec{k}|)\frac{(\not{k}-\not{\kappa}+M)i\gamma_5(\tilde{\not{k}}+M)(\tilde{\not{k}}+M)i\gamma_5}{(k^0-\kappa^0-E'+i\varepsilon)(k^0+\frac{q^0}{2}+E-i\varepsilon)(k^0-\frac{q^0}{2}+E-i\varepsilon)} \\ &-\Gamma_S^{++}(q^0,|\vec{k}|)\frac{(\tilde{\not{k}}-\tilde{\not{\kappa}}+M)i\gamma_5(\not{k}+M)(\not{k}+M)i\gamma_5}{(k^0-\kappa^0+E'-i\varepsilon)(k^0+\frac{q^0}{2}-E+i\varepsilon)(k^0-\frac{q^0}{2}-E+i\varepsilon)} \\ &+\Gamma_S^{+-}(q^0,|\vec{k}|)\frac{(\tilde{\not{k}}-\tilde{\not{\kappa}}+M)i\gamma_5(\not{k}+M)(\tilde{\not{k}}+M)i\gamma_5}{(k^0-\kappa^0+E'-i\varepsilon)(k^0+\frac{q^0}{2}-E+i\varepsilon)(k^0-\frac{q^0}{2}+E-i\varepsilon)} \\ &\left.+\Gamma_S^{-+}(q^0,|\vec{k}|)\frac{(\tilde{\not{k}}-\tilde{\not{\kappa}}+M)i\gamma_5(\tilde{\not{k}}+M)(\not{k}+M)i\gamma_5}{(k^0-\kappa^0+E'-i\varepsilon)(k^0+\frac{q^0}{2}+E-i\varepsilon)(k^0-\frac{q^0}{2}-E+i\varepsilon)}\right\}.\end{aligned}$$

Dans cette expression nous n'avons conservé que six termes car deux termes parmi les huit donnent une contribution nulle, leurs pôles étant situés dans le même demi-plan.
Après le calcul des traces dans l'espace de Dirac, la fonction $\hat{G}_{aaa}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
\hat{G}_{aaa} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{-1}{8E^2E'}\;\times\\
&\Bigg\{\frac{-8M\vec{k}.\vec{\kappa}\;\Gamma_S^{+-}(q^0,|\vec{k}|)}{(k^0+\frac{q^0}{2}-E+i\varepsilon)(k^0-\frac{q^0}{2}+E-i\varepsilon)}\left[\frac{1}{(k^0-\kappa^0+E'-i\varepsilon)}-\frac{1}{(k^0-\kappa^0-E'+i\varepsilon)}\right]\\
&+\frac{-8M\vec{k}.\vec{\kappa}\;\Gamma_S^{-+}(q^0,|\vec{k}|)}{(k^0+\frac{q^0}{2}+E-i\varepsilon)(k^0-\frac{q^0}{2}-E+i\varepsilon)}\left[\frac{1}{(k^0-\kappa^0+E'-i\varepsilon)}-\frac{1}{(k^0-\kappa^0-E'+i\varepsilon)}\right]\\
&+8M\left(E^2+EE'-\vec{k}.\vec{\kappa}\right)\times\\
&\Big[\frac{\Gamma_S^{--}(q^0,|\vec{k}|)}{(k^0-\kappa^0-E'+i\varepsilon)(k^0+\frac{q^0}{2}+E-i\varepsilon)(k^0-\frac{q^0}{2}+E-i\varepsilon)}\\
&-\frac{\Gamma_S^{++}(q^0,|\vec{k}|)}{(k^0-\kappa^0+E'-i\varepsilon)(k^0+\frac{q^0}{2}-E+i\varepsilon)(k^0-\frac{q^0}{2}-E+i\varepsilon)}\Big]\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Nous passons à l'intégration sur k^0. Pour chacun des six termes, nous intégrons dans le demi-plan qui ne contient qu'un pôle, donc nous ne calculons qu'un seul résidu. Nous aurons ainsi trois pôles dans le demi-plan inférieur, et trois pôles dans le demi-plan supérieur. Il faut aussi veiller au signe de l'intégration suivant le sens de parcours du contour. Nous obtenons

$$\begin{aligned}
\hat{G}_{aaa} &= -M\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{E^2E'}\;\times\\
&\Bigg\{-\vec{k}.\vec{\kappa}\;\Gamma_S^{+-}\left[\frac{1}{(q^0-2E)\left(\frac{q^0}{2}+\kappa^0-E-E'\right)}+\frac{1}{(q^0-2E)\left(\frac{q^0}{2}-\kappa^0-E-E'\right)}\right]\\
&-\vec{k}.\vec{\kappa}\;\Gamma_S^{-+}\left[\frac{1}{(q^0+2E)\left(\frac{q^0}{2}-\kappa^0+E+E'\right)}+\frac{1}{(q^0+2E)\left(\frac{q^0}{2}+\kappa^0+E+E'\right)}\right]\\
&+\left(E^2+EE'-\vec{k}.\vec{\kappa}\right)\Bigg[\frac{\Gamma_S^{--}}{-\left(\frac{q^0}{2}+\kappa^0+E+E'\right)\left(\frac{q^0}{2}-\kappa^0-E-E'\right)}\\
&\qquad-\frac{\Gamma_S^{++}}{\left(\frac{q^0}{2}+\kappa^0-E-E'\right)\left(\frac{q^0}{2}-\kappa^0+E+E'\right)}\Bigg]\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Cette expression se simplifie drastiquement si les masses des deux mésons pseudo-scalaires issus de la désintégration sont égales ($m_1 = m_2 = m_p$). En effet, comme nous considérons des mésons sur leur couche de masse, nous avons (figure E.1) :

$$\left(\kappa+\frac{q}{2}\right)^2=\left(\kappa-\frac{q}{2}\right)^2=m_p^2\Rightarrow \kappa q=0\Rightarrow \kappa^0q^0-\vec{\kappa}.\vec{q}=0\Rightarrow \kappa^0=0,$$

donc

$$m_p^2 = (\kappa^0)^2 - |\vec{\kappa}|^2 + \frac{(q^0)^2}{4} - \frac{|\vec{q}|^2}{4} \Rightarrow |\vec{\kappa}| = \sqrt{\frac{(q^0)^2}{4} - m_p^2},$$

avec q^0 désignant la masse du méson scalaire incident ($\vec{q} = 0$).
Nous pouvons donc écrire la boucle de façon plus concise :

$$\hat{G}_{aaa} = -M \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E^2 E'} \Bigg\{ -2\vec{k}.\vec{\kappa} \left[\frac{\Gamma_S^{+-}(q^0, |\vec{k}|)}{(q^0 - 2E)\left(\frac{q^0}{2} - E - E'\right)} + \frac{\Gamma_S^{-+}(q^0, |\vec{k}|)}{(q^0 + 2E)\left(\frac{q^0}{2} + E + E'\right)} \right] - \left(E^2 + EE' - \vec{k}.\vec{\kappa}\right) \frac{\Gamma_S^{++}(q^0, |\vec{k}|) + \Gamma_S^{--}(q^0, |\vec{k}|)}{\left(\frac{q^0}{2}\right)^2 - (E + E')^2} \Bigg\}. \tag{E.2}$$

De façon plus générale, lorsque les masses des deux mésons pseudo-scalaires sont différentes (cas de la désintégration $\eta\eta'$), nous avons :

$$\begin{aligned} \kappa^0 &= \frac{m_1^2 - m_2^2}{2q^0}, \\ |\vec{\kappa}| &= \sqrt{\left(\frac{m_1^2 - m_2^2}{2q^0}\right)^2 - \frac{m_1^2 + m_2^2}{2} + \frac{(q^0)^2}{4}}. \end{aligned}$$

Les développements analytiques décrivant la désintégration du méson scalaire en deux kaons nécessitent la prise en compte des deux saveurs de quarks u et s, comme indiqué sur la figure E.2. Les différentes étapes du calcul sont tout-à-fait similaires, et nous reprenons les principales ci-dessous. Il est important de noter que le vertex scalaire reste inchangé, car s'y rejoignent deux lignes de quark identique.

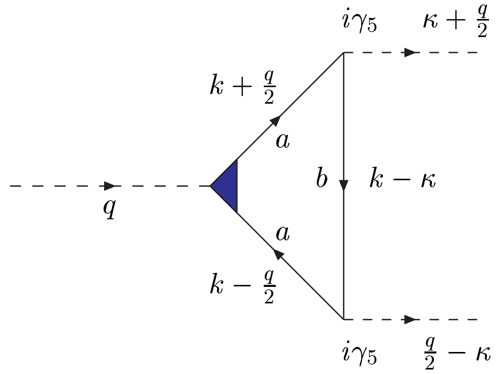

FIG. E.2 – Désintégration d'un méson scalaire en deux kaons, vertex scalaire

La boucle s'exprime comme suit, avec des notations complétées par les indices de saveur de quark, a ou b (posés respectivement pour u ou s) :

$$\begin{aligned}
\hat{G}_{baa}(q,\kappa) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \mathrm{tr}_\gamma \left\{ g_b(k-\kappa) i\gamma_5 g_a(k+\frac{q}{2}) \bar{\Gamma}_S(q,k) g_a(k-\frac{q}{2}) i\gamma_5 \right\} \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \mathrm{tr}_\gamma \left\{ \frac{M_b}{E'_b} \left[\frac{\Lambda_b^+(\vec{k}-\vec{\kappa})}{k^0-\kappa^0-E'_b+i\varepsilon} - \frac{\Lambda_b^-(\vec{k}-\vec{\kappa})}{k^0-\kappa^0+E'_b-i\varepsilon} \right] i\gamma_5 \right. \\
&\qquad \times \frac{M_a}{E_a} \left[\frac{\Lambda_a^+}{k^0+\frac{q^0}{2}-E_a+i\varepsilon} - \frac{\Lambda_a^-}{k^0+\frac{q^0}{2}+E_a-i\varepsilon} \right] \bar{\Gamma}_S(q,k) \\
&\qquad \left. \times \frac{M_a}{E_a} \left[\frac{\Lambda_a^+}{k^0-\frac{q^0}{2}-E_a+i\varepsilon} - \frac{\Lambda_a^-}{k^0-\frac{q^0}{2}+E_a-i\varepsilon} \right] i\gamma_5 \right\}.
\end{aligned}$$

En calculant les traces dans l'espace de Dirac pour chacun des six termes qui nous intéressent, c'est-à-dire en exploitant notamment

$$\mathrm{tr}_\gamma \left\{ (\not{k} - \not{\kappa} + M_b)\gamma_5(\not{k}+M_a)(\tilde{\not{k}}+M_a)\gamma_5 \right\} = 8 \left\{ 2|\vec{k}|^2(M_a-M_b) - 2M_a\vec{k}.\vec{\kappa} \right\}$$

et

$$\mathrm{tr}_\gamma \left\{ (\not{k} - \not{\kappa} + M_b)\gamma_5(\tilde{\not{k}}+M_a)(\tilde{\not{k}}+M_a)\gamma_5 \right\} = 8 \left\{ M_bM_a^2 + M_a|\vec{k}|^2 + M_a(E_aE'_b - \vec{k}.\vec{\kappa}) \right\},$$

nous arrivons à l'expression suivante pour l'intégrale sur la boucle de quarks, avec deux kaons de masse identique ($\kappa^0 = 0$),

$$\begin{aligned}
\hat{G}_{baa} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-1}{E_a^2E'_b} \\
&\times \left\{ \frac{\left[|\vec{k}|^2(M_a-M_b) - M_a\vec{k}.\vec{\kappa}\right] \Gamma_S^{a,+-}}{(k^0+\frac{q^0}{2}-E_a+i\varepsilon)(k^0-\frac{q^0}{2}+E_a-i\varepsilon)} \left[\frac{1}{(k^0+E'_b-i\varepsilon)} - \frac{1}{(k^0-E'_b+i\varepsilon)} \right] \right. \\
&+ \frac{\left[|\vec{k}|^2(M_a-M_b) - M_a\vec{k}.\vec{\kappa}\right] \Gamma_S^{a,-+}}{(k^0+\frac{q^0}{2}+E_a-i\varepsilon)(k^0-\frac{q^0}{2}-E_a+i\varepsilon)} \left[\frac{1}{(k^0+E'_b-i\varepsilon)} - \frac{1}{(k^0-E'_b+i\varepsilon)} \right] \\
&+ M_a \left[M_aM_b + |\vec{k}|^2 + E_aE'_b - \vec{k}.\vec{\kappa} \right] \\
&\qquad \times \left[\frac{\Gamma_S^{a,--}}{(k^0-E'_b+i\varepsilon)(k^0+\frac{q^0}{2}+E_a-i\varepsilon)(k^0-\frac{q^0}{2}+E_a-i\varepsilon)} \right. \\
&\qquad \left.\left. - \frac{\Gamma_S^{a,++}}{(k^0+E'_b-i\varepsilon)(k^0+\frac{q^0}{2}-E_a+i\varepsilon)(k^0-\frac{q^0}{2}-E_a+i\varepsilon)} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

L'intégration sur k^0 s'effectue de la même façon que précédemment, en calculant les résidus dans les demi-plans adéquats et en veillant au sens de parcours. La fonction $\hat{G}_{baa}$ devient

$$\begin{aligned}
\hat{G}_{baa} &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{-1}{E_a^2 E_b'} \times \\
&\left\{ \left[|\vec{k}|^2 (M_a - M_b) - M_a \vec{k}.\vec{\kappa} \right] \Gamma_S^{a,+-} \times \right. \\
&\qquad \left[\frac{1}{(q^0 - 2E_u)\left(\frac{q^0}{2} - E_a - E_b'\right)} + \frac{1}{(q^0 - 2E_a)\left(\frac{q^0}{2} - E_a - E_b'\right)} \right] \\
&+ \left[|\vec{k}|^2 (M_a - M_b) - M_a \vec{k}.\vec{\kappa} \right] \Gamma_S^{a,-+} \times \\
&\qquad \left[\frac{1}{(q^0 + 2E_a)\left(\frac{q^0}{2} + E_a + E_b'\right)} + \frac{1}{(q^0 + 2E_a)\left(\frac{q^0}{2} + E_a + E_b'\right)} \right] \\
&- M_a \left[M_a M_b + |\vec{k}|^2 + E_a E_b' - \vec{k}.\vec{\kappa} \right] \left[\frac{\Gamma_S^{a,--}}{\left(\frac{q^0}{2} + E_a + E_b'\right)\left(\frac{q^0}{2} - E_a - E_b'\right)} \right. \\
&\qquad \left. \left. + \frac{\Gamma_S^{a,++}}{\left(\frac{q^0}{2} - E_a - E_b'\right)\left(\frac{q^0}{2} + E_a + E_b'\right)} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Avec $\Gamma_S^{+-} = \Gamma_S^{-+}$ et $\Gamma_S^{++} = \Gamma_S^{--}$, nous obtenons finalement

$$\begin{aligned}
\hat{G}_{baa} &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{-1}{E_a^2 E_b'} \left\{ 2 \left[|\vec{k}|^2 (M_a - M_b) - M_a \vec{k}.\vec{\kappa} \right] \Gamma_S^{a,+-} \left[\frac{1}{(q^0 - 2E_a)\left(\frac{q^0}{2} - E_a - E_b'\right)} \right. \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{(q^0 + 2E_a)\left(\frac{q^0}{2} + E_a + E_b'\right)} \right] \\
&\qquad \left. - M_a \left[M_a M_b + |\vec{k}|^2 + E_a E_b' - \vec{k}.\vec{\kappa} \right] \frac{2\,\Gamma_S^{a,++}}{\left(\frac{q^0}{2}\right)^2 - (E_a + E_b')^2} \right\}.
\end{aligned} \tag{E.3}$$

E.2 Avec confinement sur les trois vertex méson-quarks

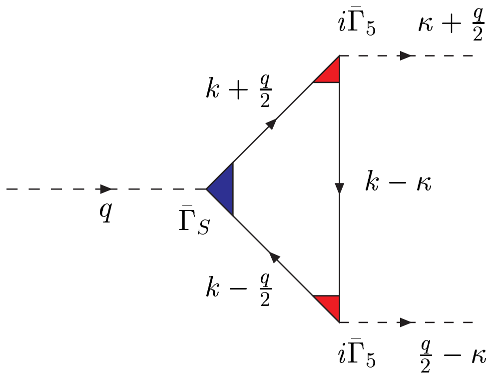

FIG. E.3 – Désintégration d'un scalaire en deux pseudo-scalaires, trois vertex

L'introduction des vertex pseudo-scalaires alourdit considérablement les calculs, mais le principe reste évidemment inchangé. Nous n'allons plus appliquer les projecteurs de Dirac $\Lambda^+(\vec{k})$ et $\Lambda^-(-\vec{k})$ sur le vertex scalaire, mais écrire celui-ci sous la forme équivalente introduite en (3.89) :

$$\bar{\Gamma}_S(q,k) = c_0(q,k) + \hat{k}\!\!\!/ c_1(q,k), \tag{E.4}$$

avec

$$\hat{k}^\mu = k^\mu - (k.q)\frac{q^\mu}{q^2}.$$

Comme le méson scalaire incident est au repos, nous avons $\vec{q} = 0$, et donc

$$\begin{aligned}
\hat{k}^0 &= k^0 - k^0 q^0 \frac{q^0}{(q^0)^2} = 0, \\
\hat{k}^i &= k^i - k^0 q^0 \frac{q^i}{(q^0)^2} = k^i, \quad i = 1,2,3.
\end{aligned}$$

A l'aide des projecteurs de Dirac, nous obtenons les relations entre d'une part $c_0(q,k)$ et $c_1(q,k)$, et d'autre part les fonctions Γ_S^{+-} et Γ_S^{++} :

$$\Gamma_S^{+-} = c_0(q,k) + M c_1(q,k), \tag{E.5}$$

$$\Gamma_S^{++} = c_0(q,k) - \frac{|\vec{k}|^2}{M} c_1(q,k), \tag{E.6}$$

où M est la masse constituante du quark qui "transite" par le vertex scalaire dans la boucle triangulaire. Nous avons donc

$$c_0(q^0,|\vec{k}|) = \frac{|\vec{k}|^2 \Gamma_S^{+-}(q^0,|\vec{k}|) + M^2 \Gamma_S^{++}(q^0,|\vec{k}|)}{|\vec{k}|^2 + M^2}, \tag{E.7}$$

$$c_1(q^0,|\vec{k}|) = \frac{M}{|\vec{k}|^2 + M^2}\left(\Gamma_S^{+-}(q^0,|\vec{k}|) - \Gamma_S^{++}(q^0,|\vec{k}|)\right). \tag{E.8}$$

De la même façon, nous écrivons le vertex pseudo-scalaire sous la forme (3.91) :

$$\bar{\Gamma}_5(q,k) = \gamma_5 \left[b_0(q,k) + \not{q} b_1(q,k) \right].$$

En appliquant les projecteurs de Dirac, nous avons :

$$b_0(q,k) = \frac{\Gamma_5^{+-} + \Gamma_5^{-+}}{2}, \tag{E.9}$$

$$b_1(q,k) = E(\vec{k})\, \frac{\Gamma_5^{-+} - \Gamma_5^{+-}}{2Mq^0}. \tag{E.10}$$

Ces relations restent applicables lorsque $\vec{q} \neq 0$, ce qui est le cas pour les mésons pseudo-scalaires, qui possèdent une impulsion non nulle.

Nous devons donc calculer la trace sur la boucle triangulaire de la figure E.3, qui correspond à l'expression suivante (avec une saveur unique de quark de masse constituante M) :

$$\begin{aligned}
\hat{G}^3_{aaa} \;=\; & \mathrm{tr}_\gamma \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k-\kappa)^2 - M^2]\left[(k+\frac{q}{2})^2 - M^2\right]\left[(k-\frac{q}{2})^2 - M^2\right]} \;\times \\
& \left\{ (\not{k} - \not{\kappa} + M) i\gamma_5 \left(b_0(\kappa + \frac{q}{2}, k) + (\not{\kappa} + \frac{\not{q}}{2}) b_1(\kappa + \frac{q}{2}, k) \right) (\not{k} + \frac{\not{q}}{2} + M) \times \right. \\
& \left. (c_0(q,k) + \hat{\not{k}} c_1(q,k))(\not{k} - \frac{\not{q}}{2} + M) i\gamma_5 \left(b_0(\frac{q}{2} - \kappa, k) + (\frac{\not{q}}{2} - \not{\kappa}) b_1(\frac{q}{2} - \kappa, k) \right) \right\}.
\end{aligned}$$

La méthode de calcul reste inchangée par rapport à la section précédente, mais est beaucoup plus lourde à mettre en oeuvre. Un logiciel de calcul symbolique est indispensable pour le calcul de la trace dans l'espace de Dirac, et par la suite, les intégrations sur la variable k^0 puis sur les coordonnées sphériques ne posent pas de problème particulier. Nous ne reprenons pas ici les expressions finales, pour ne pas alourdir la présentation.

Dans le cas de la désintégration en deux kaons, deux lignes de quark différents (u et s) se rejoignent aux vertex pseudo-scalaires. En s'aidant des projecteurs de Dirac en quarks u et s, nous pouvons dériver les relations suivantes, avec a et b posés pour u ou s :

$$b_0^{ab}(q,k) = \frac{\Gamma_5^{ab,+-} + \Gamma_5^{ab,-+}}{2}, \tag{E.11}$$

$$b_1^{ab}(q,k) = \frac{\Gamma_5^{ab,-+} - \Gamma_5^{ab,+-}}{2q^0}\, \frac{E_a(|\vec{k}|E_b(\vec{k}) + |\vec{k}|^2 + M_aM_b)}{M_aE_b + M_bE_a}. \tag{E.12}$$

Comme les fonctions vertex sont symétriques par rapport à l'inversion des quarks a et b, nous pouvons en déduire la même chose pour b_0 et b_1. La boucle triangulaire s'écrit :

$$\begin{aligned}\hat{G}^3_{baa} &= \mathrm{tr}_\gamma \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[(k-\kappa)^2 - M_b^2\right]\left[(k+\frac{q}{2})^2 - M_a^2\right]\left[(k-\frac{q}{2})^2 - M_a^2\right]} \\ &\quad \Bigg\{(\not{k} - \not{\kappa} + M_b) i\gamma_5 \left(b_0^{ab}(\kappa + \frac{q}{2}, k) + (\not{\kappa} + \frac{\not{q}}{2}) b_1^{ab}(\kappa + \frac{q}{2}, k)\right)(\not{k} + \frac{\not{q}}{2} + M_a) \\ &\quad \times (c_0^a(q,k) + \hat{\not{k}} c_1^a(q,k))(\not{k} - \frac{\not{q}}{2} + M_a) i\gamma_5 \left(b_0^{ab}(\frac{q}{2} - \kappa, k) + (\frac{\not{q}}{2} - \not{\kappa}) b_1^{ab}(\frac{q}{2} - \kappa, k)\right)\Bigg\}.\end{aligned} \tag{E.13}$$

Annexe F

Mésons scalaires et états excités

La table suivante est constituée à partir des données fournies dans [31].

	I^G (J^{PC})	Largeur totale (MeV)	Modes de désintégration
$a_0(980)$	$1^-(0^{++})$	$50 \to 100$	$\Gamma(K\bar{K})/\Gamma(\eta\pi) = 0.23 \pm 0.05$
$a_0(1450)$	$1^-(0^{++})$	265 ± 13	$\Gamma(K\bar{K})/\Gamma(\eta\pi) = 0.88 \pm 0.23$ $\Gamma(\eta'\pi)/\Gamma(\eta\pi) = 0.35 \pm 0.16$
$f_0(980)$	$0^+(0^{++})$	$40 \to 100$	$\Gamma(\pi\pi)/(\Gamma(\pi\pi) + \Gamma(K\bar{K})) \approx 0.75$
$f_0(1370)$	$0^+(0^{++})$	$200 \to 500$	$\Gamma(\pi\pi)/\Gamma_{\text{total}} = 0.26 \pm 0.09$ $\Gamma(4\pi)/\Gamma_{\text{total}} = 0.8 \pm 0.04$
$f_0(1500)$	$0^+(0^{++})$	112 ± 10	$\Gamma(\eta\eta')/\Gamma(\eta\eta) = 0.29 \pm 0.1$ $\Gamma(4\pi)/\Gamma(\eta\eta) = 0.8 \pm 0.3$ $\Gamma(\pi\pi)/\Gamma_{\text{total}} = 0.454 \pm 0.104$ $\Gamma(K\bar{K})/\Gamma_{\text{total}} = 0.044 \pm 0.021$
$f_0(2020)$	$0^+(0^{++})$	410 ± 50	
$f_0(2060)$	$0^+(0^{++})$	~ 100	
$f_0(2200)$	$0^+(0^{++})$	201 ± 51	
$f_J(1710)$	$0^+(\text{even}^{++})$	133 ± 14	$\Gamma(K\bar{K})/\Gamma_{\text{total}} \approx 0.38$ $\Gamma(\pi\pi)/\Gamma_{\text{total}} \approx 0.039$ $\Gamma(\eta\eta)/\Gamma_{\text{total}} \approx 0.18$

Table des figures

Bibliographie

[1] S. Abatzis et al., *Phys. Lett. B* **324**, 509 (1994)

[2] D. Alde et al., *Nucl. Phys. B* **269**, 485 (1986)

[3] R. Akhoury and J.-M. Frère, *Phys. Lett. B* **220**, 258 (1989)

[4] C. Amsler et al., *Phys. Lett. B* **291**, 347 (1992)

[5] C. Amsler et al., *Phys. Lett. B* **333**, 277 (1994)

[6] C. Amsler et al., *Phys. Lett. B* **340**, 259 (1994)

[7] C. Amsler et al., *Phys. Lett. B* **342**, 433 (1995)

[8] C. Amsler, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 1293 (1998)

[9] C. Amsler and F.E. Close, *Phys. Lett. B* **353**, 385 (1995)

[10] C. Amsler and F.E. Close, *Phys. Rev. D* **53**, 295 (1996)

[11] V.V. Anisovich, M.G. Huber, M.N. Kobrinsky and B.Ch. Mettsch, *Phys. Rev. D* **46**, 3045 (1990)

[12] V.V. Anisovich et al., *Phys. Lett. B* **323**, 233 (1994)

[13] V.V. Anisovich, *Phys. Lett. B* **364**, 195 (1995)

[14] V.V. Anisovich and A.V. Sarantsev, *Nucl. Phys. B* **54 A**, 367 (1997)

[15] V.V. Anisovich, V.V. Anisovich and A.V. Sarantsev, *Z. Phys. A* **359**, 173 (1997)

[16] UKQCD Collaboration, G. Bali et al., *Phys Lett. B* **309**, 378 (1993)

[17] G.S. Bali, **hep-ph/0110254v1**, submitted to *World Scientific* on October 18, 2001

[18] P. Ball, J.-M. Frère and M. Tytgat, *Phys. Lett. B* **365**, 367 (1996)

[19] D. Barberis et al., *Phys. Lett. B* **479**, 59 (2000)

[20] D. Barberis et al., *Phys. Lett. B* **462**, 462 (1999)

[21] T. Barnes, F.E. Close, P.R. Page and E.S. Swanson, *Phys. Rev. D* **55**, 4157 (1994)

[22] T. Barnes, F.E. Close and E.S. Swanson, *Phys. Rev. D* **52**, 5242 (1995)

[23] A.A. Bel'kov, D. Ebert and A.V. Emelyanenko, *Nucl. Phys. A* **552**, 523 (1993)

[24] V. Bernard, A.H. Blin, B. Hiller, U.-G. Meissner and M.C. Ruivo, *Phys Lett. B* **305**, 163 (1993)

[25] M.C. Birse and M.K. Banerjee, *Phys Lett. B* **136**, 284 (1984)

[26] D. Blaschke, Y. Kalinovsky, L. Münchow, V.N. Pervushin, G. Röpke and S. Schmidt, *Nucl. Phys. A* **586**, 711 (1995)

[27] D. Blaschke, Y. Kalinovsky, P. Petrow, S.M. Schmidt, M. Jaminon and B. Van den Bossche, *Nucl. Phys. A* **592**, 561 (1995)

[28] R.D. Bowler and M.C. Birse, *Nucl. Phys. A* **582**, 655 (1995)

[29] M. Buballa and S. Krewald, *Phys. Lett. B* **294**, 19 (1992)

[30] B.A. Campbell, J. Ellis and K.A. Olive, *Nucl. Phys. B* **345**, 57 (1990)

[31] C. Caso et al. (PDG), *Eur. Phys. J.* **C3**, 1 (1998)

[32] Nan-Wei Cao, C.M. Shakin and Wei-Dong Sun, *Phys. Rev. C* **46**, 2535 (1992)

[33] C.M. Shakin, *Phys. Rev. C* **50**, 1129 (1994)

[34] C.M. Shakin, Wei-Dong Sun and J. Szweda, *Phys. Rev C* **52**, 3353 (1995)

[35] Shun-Fu Gao, L.S. Celenza, C.M. Shakin, Wei-Dong Sun and J. Szweda, *Phys. Rev. C* **53**, 1936 (1995)

[36] C.M. Shakin and Wei-Dong Sun, *Phys. Rev. C* **54**, 1414 (1996)

[37] L.S. Celenza, Xiang Dong Li and C.M. Shakin, *Phys. Rev. C* **55**, 1492 (1997)

[38] C.M. Shakin and Wei-Dong Sun, *Phys. Rev. C* **55**, 2874 (1997)

[39] L.S. Celenza, Xiang Dong Li and C.M. Shakin, *Phys. Rev. C* **55**, 3083 (1997)

[40] L.S. Celenza, Xiang Dong Li and C.M. Shakin, *Phys. Rev. C* **56**, 3326 (1997)

[41] L.S. Celenza, B. Huang and C.M. Shakin, *Phys. Rev. C* **59**, 1030 (1999)

[42] L.S. Celenza, B. Huang and C.M. Shakin, *Phys. Rev. C* **59**, 1041 (1999)

[43] L.S. Celenza, B. Huang and C.M. Shakin, *Phys. Rev. C* **59**, 1700 (1999)

[44] L.S. Celenza, B. Huang and C.M. Shakin, *Phys. Rev. C* **59**, 2814 (1999)

[45] L.S. Celenza, B. Huang, Huangsheng Wang and C.M. Shakin, *Phys. Rev. C* **60**, 025202 (1999)

[46] L.S. Celenza, B. Huang, Huangsheng Wang and C.M. Shakin, *Phys. Rev. C* **60**, 035206 (1999)

[47] L.S. Celenza, B. Huang, Huangsheng Wang and C.M. Shakin, *Phys. Rev. C* **60**, 065210 (1999)

[48] C.M. Shakin and Huangsheng Wang, *Phys. Rev. C* **61**, 035201 (2000)

[49] C.M. Shakin and Huangsheng Wang, *Phys. Rev. D* **63**, 014019 (2001)

[50] L.S. Celenza, Huangsheng Wang and C.M. Shakin, *Phys. Rev C* **63**, 025209 (2001)

[51] C.M. Shakin and Huangsheng Wang, *Phys. Rev. D* **63**, 074017 (2001)

[52] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson and C. B. Thorn, *Phys. Rev. D* **10**, 2599 (1974)

[53] A. Chodos and C. B. Thorn, *Phys. Rev. D* **12**, 2733 (1975)

[54] F.E. Close, *Rep. Prog. Phys.* **51**, 833 (1988)

[55] F.E. Close, N. Isgur and S. Kumano, *Nucl. Phys. B* **389**, 513 (1993)

[56] F.E. Close and A. Kirk, *Phys. Lett. B* **483**, 345 (2000)

[57] F.E. Close, G. Farrar and Z.P. Li, *Phys. Rev. D* **55**, 5749 (1997)

[58] F.E. Close and A. Kirk, *Eur. Phys. J. C* **21**, 531 (2001)

[59] C. Christov, R. Arriola and K. Goeke, *Phys Lett. B* **243**, 191 (1990)
V. Bernard, U. G. Meissner and I. Zahed, *Phys. Rev. D* **36**, 818 (1987)
M. Asakawa and K. Yasaki, *Nucl. Phys. A* **504**, 668 (1989)

[60] P.P. Domitrovich and H. Müther, *J. Phys. G* **20**, 1885 (1994)

[61] D.I. Dyakonov and V.Yu. Petrov and P.V. Pobylitsa, *Nucl. Phys. B* **306**, 809 (1988)

[62] D. Ebert and L. Kaschluhn, *Nucl. Phys. B* **355**, 123 (1991)

[63] D. Espriu and R. Tarrach, *Z. Phys. C* **16**, 77 (1982)

[64] H. Fritzsch and J.D. Jackson, *Phys. Lett. B* **66**, 365 (1977)

[65] G. Gabadadze, *Phys. Rev. D* **58**, 055003 (1998)

[66] H. Genz, M. Nowakowski and D. Woitschitzky, *Phys. Lett. B* **250**, 143 (1990)

[67] S. Godfrey and N. Isgur, *Phys. Rev. D* **32**, 189 (1985)

[68] V.N. Gribov, *Eur. Phys. J.* **C10**, 91 (1999)

[69] H. Gomm and J. Schechter, *Phys. Lett. B* **158**, 449 (1985)

[70] G.J. Gounaris, R. Kögerler and J.E. Paschalis, *Nucl. Phys. B* **276**, 629 (1986)

[71] G.J. Gounaris, R. Kögerler and J.E. Paschalis, *Phys. Lett. B* **186**, 107 (1987)

[72] G.J. Gounaris and J.E. Paschalis, *Nucl. Phys. B* **346**, 84 (1990)

[73] G.J. Gounaris and J.E. Paschalis, *Phys. Lett. B* **251**, 634 (1990)

[74] F. Gross, J. Milana, *Phys. Rev. D* **43**, 2401 (1991)

[75] F. Gross, J. Milana, *Phys. Rev. D* **45**, 969 (1992)

[76] G. 't Hooft, *Phys. Rev. D* **14**, 3432 (1976)

[77] P. Jain, R. Johnson and J. Schechter, *Phys. Rev. D* **35**, 2230 (1987)

[78] P. Jain, R. Johnson and J. Schechter, *Phys. Rev. D* **38**, 1571 (1988)

[79] R. Méndez Galain, G. Ripka, M. Jaminon and P. Stassart, *Europhys. Lett.* **14**, 403 (1991)
M. Jaminon, R. Méndez Galain, G. Ripka and P. Stassart, *Nucl. Phys. A* **537**, 418 (1992)
M. Jaminon, R. Méndez Galain and P. Stassart, *Nucl. Phys. A* **556**, 509 (1993)
M. Jaminon, G. Ripka and P. Stassart, *Nucl. Phys. A* **504**, 733 (1989)
V. Bernard and U.G. Meissner, *Nucl. Phys. A* **489**, 647 (1988)

[80] M. Jaminon and G. Ripka, *Nucl. Phys. A* **564**, 505 (1993)

[81] M. Jaminon and B. Van den Bossche, *Nucl. Phys. A* **567**, 865 (1994)

[82] M. Jaminon and B. Van den Bossche, *Z. Phys. C* **64**, 339 (1994)

[83] M. Jaminon and B. Van den Bossche, *Nucl. Phys. A* **582**, 517 (1995)
B. Van den Bossche, Ph. D. thesis, University of Liège, 1996

[84] M. Jaminon, B. Van den Bossche, *Nucl. Phys. A* **619**, 285 (1997)

[85] M. Jaminon, B. Van den Bossche, *Nucl. Phys. A* **636**, 113 (1998)

[86] M. Jaminon, M. Mathot and B. Van den Bossche, *Nucl. Phys. A* **662**, 157 (2000)

[87] S. Kahana, G. Ripka and V. Soni, *Nucl. Phys. A* **415**, 351 (1984)

[88] S.P. Klevansky, *Rev. Mod. Phys.* **64**, 649 (1992)

[89] W. Lee and D. Weingarten, *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **63 A-C**, 194 (1998)

[90] W. Lee and D. Weingarten, *Phys. Rev. D* **61**, 014015 (2000)

[91] H. Leutwyler, *in* Restoration of Chiral Symmetry

[92] U.G. Meissner, R. Johnson, N.W. Park and J. Schechter, *Phys. Rev. D* **37**, 1285 (1988)

[93] V.A. Miransky. *Dynamical symmetry breaking in quantum field theory.* World Scientific (1993)

[94] Particle Data Group, L. Montanet et al., *Phys. Rev. D* **50**, 1173 (1994)

[95] K. Nakayama and S. Krewald, *Phys. Lett. B* **273**, 199 (1991)

[96] S. Narison, *Phys. Rev. C* **62**, 068201 (2000)

[97] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **122**, 345 (1961)

[98] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **124**, 246 (1961)

[99] M.L. Nekrasov, *Int. Journal of Mod. Phys. A* **7**, 8069 (1992)

[100] M.L. Nekrasov, *Z. Phys. C* **61**, 147 (1994)

[101] M.L. Nekrasov, *Phys. Rev. D* **56**, 5681 (1997)

[102] W.F. Palmer and S.S. Pinsky, *Phys. Rev. D* **22**, 223 (1980)

[103] *Particles and fields*, *Phys. Rev. D* **54**, 1-720 (1996)

[104] M.E. PESKIN and D.V. SCHROEDER, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley, Menlo Park, California, 1995.

[105] H.J. Pirner, *in* Hadronic physics with multi-GeV electrons (Desplanques and Goutte, Eds), Nova Science, Commack, NY, 199*

[106] A. Polleri, R.A. Broglia, P.M. Pizzochero aand N.N. Scoccola, *Z. Phys. A* **357**, 325 (1997)

[107] H. Reinhardt, *Phys. Lett. B* **244**, 316 (1990)

[108] K. Langfeld, H. Reinhardt and J. Gattnar, *Nucl. Phys. B* **621**, 131 (2002)

[109] L.H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 1985, 1996.

[110] G. Ripka and M. Jaminon, *Ann. of Phys.* **218**, 51 (1992)

[111] C. Rosenzweig, J. Schechter and C.G. Trahern, *Phys. Rev. D* **21**, 3388 (1980)

[112] C. Rosenzweig, A. Salomone and J. Schechter, *Phys. Rev. D* **24**, 2545 (1981)

[113] C. Rosenzweig, A. Salomone and J. Schechter, *Nucl. Phys. B* **206**, 12 (1982)

[114] A. Salomone, J. Schechter and T. Tudron, *Phys. Rev. D* **23**, 1143 (1981)

[115] C. Savkli and F. Tabakin, *Nucl. Phys. A* **628**, 645 (1998)

[116] T. Schäfer, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1707 (1995)

[117] J. Schechter and Y. Ueda, *Phys. Rev. D* **3**, 176 (1971)

[118] J. Schechter, *Phys. Rev. D* **21**, 3393 (1980)

[119] S. Schmidt, D. Blaschke and Y. Kalinovsky, *Phys. Rev. C* **50**, 435 (1994)

[120] K. Senba and M. Tanimoto, *Phys. Rev. D* **25**, 792 (1982)

[121] J. Sexton, A. Vaccarino and D. Weingarten, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4563 (1995)

[122] G.M. Shore and G. Veneziano, *Nucl. Phys. B* **381**, 3 (1992), 23 (1992)

[123] T.H.R. Skyrme, *Nucl. Phys.* **31**, 556 (1962)

[124] S. Spanier, *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **54 A**, 362 (1997)

[125] M. Teper, Oxford University Report. No. OUTP-95-06P, 1995 (unpublished)

[126] T. Teshima and S. Oneda, *Phys. Lett. B* **123**, 455 (1983)

[127] G. Veneziano, *Nucl. Phys. B* **159**, 213 (1979)

[128] D. Weingarten, in *Lattice 93*, Proceedings of the International Symposium, Dallas, Texas, *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **34**, 29 (1994)

[129] E. Witten, *Nucl. Phys. B* **156**, 269 (1979)

[130] I. Zahed and G. E. Brown, *Phys. Rep.* **142**, 1 (1986)