Table des matières

Chapitre 1

Introduction

L'objet de ce travail est, en premier lieu, de donner une introduction à la théorie quantique des champs non perturbative et, en particulier, aux équations de Dyson-Schwinger; dans la seconde partie, nous étudierons le formalisme de Dyson-Schwinger dans le cadre de l'électrodynamique quantique et de la chromodynamique quantique. Nous donnerons également les principes généraux qui permettent de résoudre les équations de Dyson-Schwinger et discuterons, au travers d'articles anciens et récents, les différentes solutions obtenues; le comportement de ces solutions sera mis en relation avec différents problèmes tels que le choix de la jauge (covariante ou non) et le confinement en chromodynamique quantique.

On précisera la nature des équations de Dyson-Schwinger : il s'agit des équations exactes (non perturbatives) de la théorie des champs qui contiennent, implicitement, tous les ordres de la théorie des perturbations.

1.1 Au delà de la théorie des perturbations...

En mécanique quantique, on ne sait résoudre analytiquement qu'un petit nombre de problèmes dont la particule libre, le puits de potentiel, l'oscillateur harmonique et l'atome d'hydrogène. Pour surmonter cette difficulté, on est contraint, dans des problèmes généraux, de développer en série la partie du potentiel (considérée comme une perturbation) qui empêche la résolution exacte : ceci conduit à la *théorie des perturbations*. On l'emploie couramment en mécanique quantique, où elle est très efficace; c'est le cas notamment de sa version dépendante du temps qui aboutit à la règle d'or de Fermi et permet de calculer les amplitudes de transition entre les différents niveaux d'énergie. En théorie quantique des champs, la situation est encore moins avantageuse : on ne sait même pas résoudre exactement le problème à zéro corps, c'est-à-dire qu'on n'a pas de solution exacte pour le vide (état fondamental de la théorie). On est donc naturellement conduit à utiliser la théorie des perturbations : c'est ce qu'ont fait Feynman et Schwinger dans les années soixante. Le

résultat fut le développement du formalisme des diagrammes de Feynman et du formalisme des sources de Schwinger qui fournissent une technique simple et élégante pour calculer les amplitudes de diffusion et les sections efficaces des différents processus contenus dans une théorie donnée.
La théorie perturbative connut alors un succès retentissant en électrodynamique quantique où les calculs aux ordres élevés donnèrent des résultats qui furent vérifiés expérimentalement avec une précision relative de 10^{-11} .
Néanmoins, pour que la théorie des perturbations soit applicable, il faut que la valeur de la constante de couplage (constante du lagrangien qui donne l'intensité intrinsèque de l'interaction entre les différentes particules) ne soit pas trop grande. En effet, un théorème, dû à Dyson (voir [1]), prédit que le développement perturbatif commence à diverger après un nombre de termes égal à l'inverse de la constante de couplage. En électrodynamique quantique, la constante de couplage est donnée par la constante de structure fine dont la valeur est approximativement $1/137$; cette faible valeur explique l'efficacité des diagrammes perturbatifs en électrodynamique quantique.
Dans la théorie des interactions fortes, la chromodynamique quantique, il en va tout autrement : la constante de couplage est beaucoup plus grande et diverge à grandes distances, si bien que la théorie des perturbations devient inapplicable. Notre connaissance de QCD se limite donc à la région des petites distances, $\ll 1\,\mathrm{fm}$, où la constante de couplage est suffisamment petite pour obtenir une précision de l'ordre de 15%.
Le formalisme non perturbatif ne connaît pas cette difficulté car il fait intervenir des équations exactes; c'est pourquoi, ce formalisme prend une importance non négligeable en chromodynamique quantique.
Malheureusement, les équations obtenues en théorie non perturbative sont des équations intégro-différentielles couplées d'une grande complexité qui, même avec les moyens informatiques actuels, restent difficiles à résoudre numériquement, sans approximations.
Une des approches en théorie des champs non perturbative est de chercher à résoudre les équations de Dyson-Schwinger pour déterminer toutes les fonctions à n points : cela équivaudrait à la résolution complète de la théorie, car on pourrait alors calculer exactement l'amplitude relative à n'importe quel processus.
Un autre intérêt des méthodes non perturbatives découle de l'espoir qu'elles puissent décrire un phénomène qui est, jusqu'à présent, en grande partie incompris : le confinement des quarks et des gluons en chromodynamique quantique. Le confinement désigne le fait qu'il est impossible d'observer les quarks et les gluons (qui sont des particules colorées) isolément : on ne peut observer directement que des particules non colorées, composées de plusieurs quarks et gluons. Le rapport entre les équations non perturbatives et le confinement est le suivant : la résolution de ces équations permettrait d'obtenir la forme du propagateur exact du gluon; or les propriétés analytiques de ce

dernier sont directement liées au phénomène de confinement.

1.2 La masse en théorie des champs

La notion de masse a beaucoup évolué depuis Newton. En mécanique classique, on distingue deux masses différentes : la masse inertielle et la masse gravitationnelle. La masse inertielle est celle qui intervient dans l'équation de Newton de la dynamique et détermine l'accélération d'un corps soumis à une force. La masse gravitationnelle détermine, quant à elle, la force gravitationnelle s'exerçant entre un corps et un autre. Expérimentalement, on a montré que les deux masses sont égales à 10^{-12} près; Einstein a d'ailleurs érigé cette égalité en principe dans sa théorie de la relativité générale : c'est *le principe d'équivalence* .
En théorie des champs, et plus particulièrement en chromodynamique quantique, le concept de masse est plus ambigu : la "masse" qui intervient dans le lagrangien, dite masse nue, n'est la masse physique de la particule que lorsqu'on a renormalisé la théorie et réabsorbé dans la masse les infinis provenant des amplitudes divergentes de la théorie.
Une définition plus satisfaisante consiste à dire que la masse d'une particule est donnée par le pôle de son propagateur exact : le pôle de ce propagateur contient la masse nue de la particule libre plus les corrections radiatives dues à l'interaction avec le boson de jauge. Les particules ont donc une masse qui, suite aux corrections radiatives (qui s'ajoutent à la masse de la particule libre), varie avec l'impulsion. La situation est analogue à ce qui se passe en état solide, où les électrons contenus dans un cristal ont une "masse effective" (masse de bande) qui provient de leurs interactions avec les phonons.
La question de la masse se pose avec plus d'acuité encore pour les particules confinées (quarks, gluons) : ces particules n'ont pas de masse asymptotique (puisqu'elles ne sont jamais libres) et leur masse, semble-t-il, serait entièrement générée par l'interaction.

1.3 QCD sur réseau

Une technique entièrement différente s'ajoute aux méthodes non perturbatives en chromodynamique quantique : il s'agit de la *QCD sur réseau.* Cette méthode est basée sur des programmes informatiques qui discrétisent l'espace-temps à l'aide d'un réseau. Sur ce réseau, on peut simuler l'interaction des différentes particules (champs) qui interviennent dans la théorie. Nous ne nous étendrons pas davantage sur cette technique, qui possède ses propres difficultés, car elle est très spécialisée : on se contentera d'en utiliser les résultats et de les comparer avec ceux du formalisme de Dyson-Schwinger.

1.4 Structure de ce travail

Dans le chapitre 2, nous introduirons les notions fondamentales qui sont à la base des techniques de Dyson-Schwinger, c'est-à-dire la notion de propagateur et de fonction à n points. En particulier, nous nous attarderons sur la définition non perturbative de ces objets, ainsi que sur celle du vide. Dans le chapitre 3, après une brève introduction aux méthodes fonctionnelles, nous établirons les équations de mouvement d'une théorie quantique des champs générale. Au chapitre suivant, nous expliquerons les complications apportées par le spin et l'invariance de jauge. Dans le chapitre 5, nous exposerons les modifications qui surviennent dans une théorie non abélienne et expliquerons la dérivation des équations dans le cas le plus simple, c'est-à-dire celui de la jauge axiale. Nous mentionnerons le formalisme de Baker, Ball et Zachariasen, qui permet de fermer ces équations en conservant, en partie du moins, l'invariance de jauge, et nous donnerons les résultats obtenus par cette méthode. Dans le dernier chapitre, nous aborderons les résultats des articles récents concernant ce problème. Nous nous concentrerons, par manque d'espace, sur les équations de la théorie de jauge pure, c'est-à-dire celles qui négligent la contribution des quarks. Cette approximation "quenched" constitue en fait la première étape vers une résolution plus générale de la théorie globale. Mais déjà à ce stade, l'étude théorique n'est encore que partielle, et de nombreux résultats contradictoires, provenant d'approximations différentes, apparaissent dans la littérature, comme nous le verrons à la fin de ce travail.

Chapitre 2

La notion de propagateur et de fonction à n points

2.1 Introduction : le propagateur du potentiel électromagnétique

La méthode des fonctions de Green, dont les propagateurs sont des cas particuliers, est d'une grande utilité en physique, car elle permet, en principe, de construire la solution générale des équations aux dérivées partielles qui décrivent la dynamique d'un système donné. Un exemple simple est fourni en électromagnétisme par l'équation d'évolution du potentiel scalaire dans le vide (dans la jauge de Lorentz et en unités de Gauss) :

$$(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})V(\vec{x},t) = -4\pi\rho(\vec{x},t) \tag{2.1}$$

Cette équation est de la forme

$$O(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial t})\,u(\vec{x},t) = f(\vec{x},t) \tag{2.2}$$

La fonction de Green relative à l'opérateur O est définie comme suit:

$$O\,G(x,x') = \delta(x-x') \qquad\qquad o\grave{u}\ x = (\vec{x},t). \tag{2.3}$$

On a alors

$$u(x) = \int d^4x'\,G(x,x')\,f(x') \tag{2.4}$$

On peut aisément résoudre cette équation en considérant la transformée de Fourier de la fonction de Green :

$$G(x,x') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k\int dk^0\,G^*(k)\,e^{i[\vec{k}.(\vec{x}-\vec{x}')-k^0(t-t')]} \tag{2.5}$$

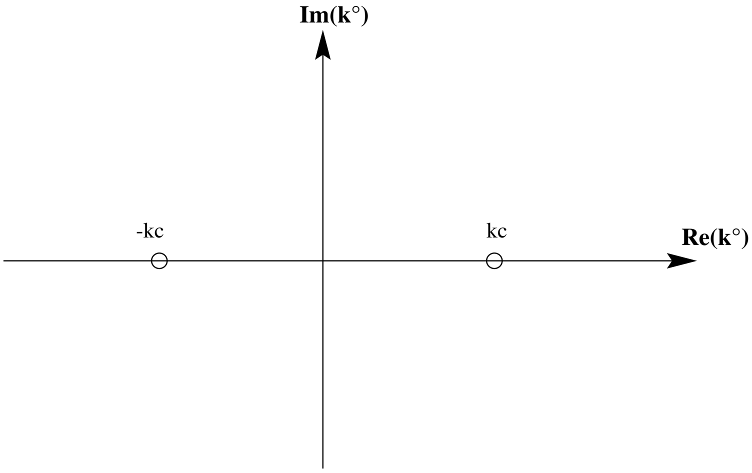


FIG. 2.1 – *Position des pôles de $G^*(k)$*

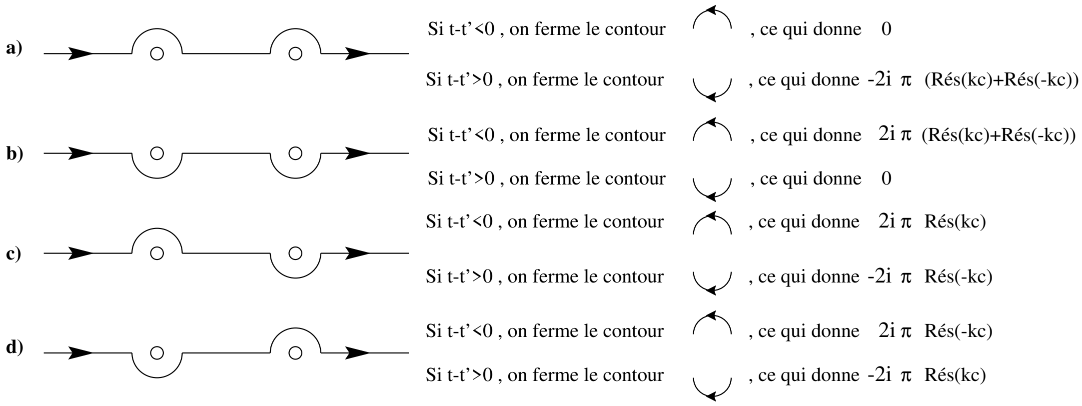


FIG. 2.2 – *Contours d'intégration possibles*

Celle-ci décrit la propagation d'ondes créées par une source ponctuelle en $(\vec{x}', t')$. On montre facilement que

$$G^*(k) = \frac{c^2}{(k^0)^2 - (\vec{k})^2\, c^2} = \frac{c^2}{(k^0 - k\,c)(k^0 + k\,c)} \tag{2.6}$$

Cette fonction présente des pôles d'ordre un en k c et -k c : l'expression (2.5) n'est donc déterminée que lorsque le procédé de contournement des pôles est spécifié : celui-ci aura d'ailleurs une signification physique particulière.
Les figures 2.1 et 2.2 représentent la position des pôles dans le plan complexe ainsi que les différents contours d'intégration possibles.
Le principe de causalité classique (G=0 si $t' > t$) nous impose de choisir le contour b de la figure 2.2 : la fonction de Green correspondante est appelée

propagateur retardé. On a alors, en vertu du théorème des résidus :

$$G(x,x') = \Theta(t-t')\,2i\pi\frac{c^2}{(2\pi)^4}\int d^3k\frac{e^{i\vec{k}.(\vec{x}-\vec{x}')}(e^{ikc(t-t')}-e^{-ikc(t-t')})}{2kc} \tag{2.7}$$

En passant en coordonnées sphériques, on obtient :

$$G(x,x') = \Theta(t-t')\frac{c}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}\{\delta(|\vec{x}-\vec{x}'|-c(t-t'))\} \tag{2.8}$$

et, d'après (2.4):

$$V(\vec{x},t) = \int d^3x'\,\frac{\rho(\vec{x}',t-\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c})}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \tag{2.9}$$

C'est l'expression, bien connue en électrodynamique, des *potentiels retardés.* On voit donc que la connaissance du propagateur revient dans ce cas à la résolution générale de la théorie.

2.2 Le propagateur de Feynman

Nous allons maintenant introduire le propagateur de Feynman dans le cadre de la formulation lagrangienne de la théorie quantique des champs. A partir de maintenant nous utiliserons, sauf mention explicite du contraire, les conventions d'unités $c = \hbar = 1$. Par souci de simplicité, considérons un champ-opérateur scalaire réel $\phi(x)$ (qui est en fait le champ associé aux bosons neutres de spin 0). La densité lagrangienne (dans la suite, on dira simplement le "lagrangien") associée au système est

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\,\partial^\mu\phi(x) - \frac{1}{2}m^2\phi^2(x) + \mathcal{L}_I(x) \tag{2.10}$$

où $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}$ est le lagrangien d'interaction.
L'action s'écrit alors $S = \int d^4x\,\mathcal{L}(x)$, et le principe de moindre action permet d'obtenir l'équation d'évolution suivante pour ϕ (équation de Klein-Gordon) :

$$(\partial_\mu\partial^\mu\phi(x) + m^2)\phi(x) = j(x) \tag{2.11}$$

L'équation précédente est, bien entendu, homogène dans le cas libre, c'est-à-dire quand $\mathcal{L}_I \equiv 0$ (d'où $j = 0$). Elle est identique à l'équation (2.1), au terme de masse près.
Nous allons rechercher le propagateur du champ ϕ qui devra être une fonction de Green de l'équation (2.11). Pour ce faire, nous devons d'abord examiner le sens physique des solutions de (2.11). La forme libre de (2.11) donne, pour des ondes planes $\phi(x) = Ne^{i(\vec{p}.\vec{x}-E\,t)}$, deux types de solutions correspondant respectivement à $E = \sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2}$ et $E = -\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2}$. Pauli et Weisskopf ont montré [2] que la densité de courant associée à l'équation

de Klein-Gordon est en fait une densité de courant de charges et s'écrit : $J^\mu = iq\,(\phi^* \partial^\mu - \phi\, \partial^\mu \phi^*)$ (où q est la charge de la particule). Il en résulte, pour les solutions libres : $J^\mu(part.) = 2q|N|^2(E, \vec{p})$. On voit dès lors qu'une antiparticule d'énergie négative est équivalente (au point de vue de la fonction d'onde) à une particule d'énergie positive et d'impulsion opposée, car on a : $J^\mu\,(\text{antipart.}) = -2q|N|^2(E, \vec{p}) = 2q|N|^2(-E, -\vec{p})$. De plus, les solutions d'énergie négative décrivent des particules qui "remontent le temps" puisque $e^{-i(-E)t} = e^{-iE(-t)}$. En d'autres mots, les solutions d'énergie négative se propageant vers le passé décrivent en fait des antiparticules d'énergie positive qui se propagent vers le futur. Ceci implique que la composante d'énergie négative de ϕ dépendra, en un point donné de l'espace-temps, des valeurs prises par $j(x)$ dans le futur, ou plus précisément dans la partie du cône de lumière de temps supérieur : il faudra tenir compte de cette caractéristique dans le calcul du propagateur de ϕ.

Nous allons maintenant dériver le *propagateur de Feynman* du champ ϕ ou fonction de corrélation à deux points. Il s'agit d'une fonction de Green de l'équation (2.11); on doit donc avoir:

$$(\partial^\mu\, \partial_\mu + m^2) D_F(x, y) = -\delta^{(4)}(x - y) \tag{2.12}$$

Et

$$\phi(x) = -\int d^4y\, D_F(x - y)\, j(y) \tag{2.13}$$

En vertu de l'invariance par translation, on a : $D_F(x, y) = D_F(x-y)$. Passons en espace de Fourier :

$$D_F(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip.(x-y)} \tilde{D_F}(p) \tag{2.14}$$

En utilisant (2.11), on trouve :

$$\tilde{D_F}(p) = \frac{1}{p^2 - m^2} = \frac{1}{(p^0 - E_p)(p^0 + E_p)} \tag{2.15}$$

Comme dans l'exemple du potentiel électromagnétique, l'intégrand du propagateur présente deux pôles (en E_p et $-E_p$); pourtant, on ne pourra pas choisir un contour d'intégration classiquement causal, puisque les solutions d'énergie négative (de la forme $Ne^{ip.x}$) se propagent en remontant le temps. Les quatre contours d'intégration possibles sont les mêmes que dans le cas de l'électromagnétisme classique (voir figure 2.2). Seul le contour c) convient, en vertu de ce qui vient d'être dit, et on a :

$$iD_F(x - y) = \int \frac{d^3p}{2E(2\pi)^3} [\Theta(x^0 - y^0) e^{-ip.(x-y)} + \Theta(y^0 - x^0) e^{ip.(x-y)}] \tag{2.16}$$

On peut réécrire le propagateur de Feynman sous une forme qui contient implicitement le procédé de contournement des pôles :

$$D_F(x-y) = \lim_{\epsilon \to 0} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip.(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \tag{2.17}$$

Le plus souvent, on sous-entend la limite.

Il faut maintenant exprimer le propagateur de Feynman dans le cadre de la seconde quantification, dont nous devons introduire certains éléments du formalisme. Nous pouvons écrire ϕ sous forme d'une intégrale de Fourier :

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{2E(2\pi)^3} \left[a(p) e^{-ip.x} + a^+(p) e^{ip.x} \right] \tag{2.18}$$

où $a(p)$ et $a^+(p)$ sont simplement, à ce stade, des opérateurs dépendant de p.

Le champ canoniquement conjugué à ϕ est défini par :

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)} \tag{2.19}$$

Les champs $\phi(x)$ et $\pi(x)$ obéissent aux relations de commutation canoniques (à temps égaux : $x^0 = x'^0 = t$) suivantes :

$$[\phi(x), \phi(x')] = [\pi(x), \pi(x')] = 0 \tag{2.20}$$

$$[\phi(x), \pi(x')] = i\,\delta(\vec{x} - \vec{x'}) \tag{2.21}$$

Nous travaillons ici dans le schéma de Heisenberg; donc, si H est le hamiltonien du système, on a $\frac{d}{dt}A(t) = i[H, A(t)]$. Le hamiltonien s'écrit comme en mécanique classique(où $H = p_i \dot{q}_i - L$) :

$$H = \int d^3x\, \mathcal{H} = \int d^3x \left[\pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L}(x) \right] \tag{2.22}$$

On obtient finalement pour le champ libre :

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \left[\frac{1}{2}\pi^2(x) + \frac{1}{2}(\nabla\phi(x))^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2(x) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{2E(2\pi)^3} E \left[a(p)a^+(p) + a^+(p)a(p) \right] \end{aligned} \tag{2.23}$$

L'opérateur d'impulsion s'écrit :

$$p^\mu = \int d^3x\, T^{0\mu}(x) \tag{2.24}$$

où $T^{0\mu}$ est une des composantes du tenseur énergie-impulsion [3] qui s'écrit :

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu\phi\, \partial^\nu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L} \tag{2.25}$$

On obtient donc

$$\hat{p}^\mu = \frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{2E(2\pi)^3}\, p^\mu \left[a(p)a^+(p) + a^+(p)a(p)\right] \tag{2.26}$$

Les opérateurs $a(p)$ et $a^+(p)$ sont les opérateurs de diminution et d'augmentation de l'impulsion p^μ, car on a :

$$\hat{p}^\mu a^+(p) = a^+(p)(\hat{p}^\mu + p^\mu) \tag{2.27}$$

et

$$\hat{p}^\mu a(p) = a(p)(\hat{p}^\mu - p^\mu) \tag{2.28}$$

Vu que $H\ (= \hat{p}^0)$ est défini positif, il existe un état $|0>$, appelé état fondamental (ou vide) tel que $a(p)|0>= 0$. L'expression (2.23) de H soulève une difficulté : l'énergie de cet état est donnée par une intégrale divergente. C'est une conséquence de l'ambiguïté dans l'ordre des opérateurs a et a^+ lorsqu'on passe de l'expression (2.22) à l'expression (2.23). Puisqu'on ne s'intéresse qu'aux excitations du vide (particules), on soustrait cette énergie du hamiltonien et de l'opérateur d'impulsion, ce qui donne :

$$\hat{p}^\mu = \int \frac{d^3p}{2E(2\pi)^3} p^\mu a^+(p)a(p) \tag{2.29}$$

Cette expression correspond au concept de *produit normal* (noté : :) : le produit normal de deux champs est obtenu à partir du produit de ces champs en plaçant, dans chaque terme, l'opérateur de création à gauche et l'opérateur d'annihilation à droite. Par exemple, $: a(p)a^+(p) := a^+(p)a(p)$. On voit donc immédiatement, à partir de (2.26) et (2.29), que le nouvel opérateur d'impulsion s'écrit :

$$\hat{p}^\mu = \int d^3p : T^{0\mu}(x) : \tag{2.30}$$

Pour donner l'expression du propagateur de Feynman dans le cadre de la seconde quantification, montrons que :

$$iD_F(x-y) =< 0|T(\phi(x)\phi(y))|0> \tag{2.31}$$

où $T(\phi(x)\phi(y)) = \Theta(x^0 - y^0)\phi(x)\phi(y) + \Theta(y^0 - x^0)\phi(y)\phi(x)$ est le *produit chronologique* des champs $\phi(x)$ et $\phi(y)$.
Supposons que $x^0 > y^0$:

$$< 0|T(\phi(x)\phi(y))|0 >=< 0|\phi(x)\phi(y)|0 >$$

$$\phi(y)|0 >= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E}\left[a(p)e^{-ip.y} + a^+(p)e^{ip.y}\right]|0 >= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} a^+(p)e^{ip.y}|0 >$$

De même, on a :

$$< 0|\phi(x) = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E'} < 0|a^+(p')e^{-ip'.y}$$

Donc

$$< 0|\phi(x)\phi(y)|0 >= \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^6 4EE'} e^{-ip'.x+ip.y} < 0|a(p')a^+(p)|0 >$$

Les relations de commutation entre les opérateurs a et a^+ doivent être compatibles avec les relations (2.20) et (2.21) : on montre aisément que l'on doit avoir

$$[a(p), a(p')] = [a^+(p), a^+(p')] = 0 \tag{2.32}$$

et

$$[a(p), a^+(p')] = (2\pi)^3\, 2E\, \delta(\vec{p} - \vec{p}\,') \tag{2.33}$$

Il s'ensuit que

$$< 0|\phi(x)\phi(y)|0 >= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} e^{-ip.(x-y)}$$

si $x^0 > y^0$.
De manière similaire, on trouve :

$$< 0|\phi(y)\phi(x)|0 >= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} e^{-ip.(y-x)}$$

si $y^0 > x^0$.
D'où :

$$< 0|T(\phi(x)\phi(y))|0 >= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} [\Theta(x^0 - y^0)e^{-ip.(x-y)} + \Theta(y^0 - x^0)e^{-ip.(y-x)}]$$

Et finalement :

$$< 0|T(\phi(x)\phi(y))|0 >= i\, D_F(x - y) \tag{2.34}$$

en vertu de la relation (2.16).
Les relations (2.16) et (2.31) donnent une interprétation physique du propagateur (ou fonction de corrélation à deux points) conforme à l'intuition : c'est l'amplitude de propagation d'une particule entre les points x et y (ou d'une antiparticule entre y et x) de l'espace-temps. On voit ici que la masse d'une particule libre peut être définie comme le pôle du propagateur de Feynman. Cette définition peut être étendue au cas où les particules ont des interactions confinantes.

2.3 Fonctions à n points et théorie des perturbations

La théorie des champs décrit des processus à un nombre de particules non déterminé. La simple connaissance du propagateur ne suffit donc pas à résoudre la théorie. On introduit les fonctions de corrélation à n points, définies par :

$$G(x_1, ..., x_n) =< \Omega|T(\phi(x_1), ..., \phi(x_n))|\Omega > \tag{2.35}$$

Ici, $|\Omega >$ désigne l'état fondamental de la théorie d'interaction, qui est en général différent de $|0>$, l'état fondamental de la théorie libre. Dans la théorie libre, la fonction de corrélation à deux points se réduit au propagateur de Feynman décrit plus haut : c'est le propagateur qui apparaît dans les développements de la théorie des perturbations. Pour cette raison, ce propagateur est appelé *propagateur perturbatif* par opposition à $< \Omega|T(\phi(x), \phi(y))|\Omega >$ que l'on nomme *propagateur exact* .

2.3.1 Développement perturbatif du vide

La distinction entre ces deux types de fonctions de corrélation est capitale, et nous allons établir dans cette section la relation qui les lie. Pour fixer les idées, nous nous placerons dans une théorie en $\lambda\phi^4$, c'est-à-dire telle que

$$\mathcal{L}_{\mathrm{I}} = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4 \tag{2.36}$$

(cfr. relation (2.10)).
On a donc :

$$H = \int d^3x \left[\pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L}(x)\right] = H_0 - \int d^3x\, \mathcal{L}_I(x) = H_0 + H_I \tag{2.37}$$

où H_0 est le hamiltonien de Klein-Gordon. En t=0 ,

$$H_0 = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\pi^2(\vec{x},0) + \frac{1}{2}(\nabla\phi(\vec{x},0))^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2(\vec{x},0)\right] \tag{2.38}$$

$$H_I = \int d^3x \frac{\lambda}{4!}\phi^4(\vec{x},0) \tag{2.39}$$

Pour obtenir la théorie perturbative des champs en interaction, on adopte le schéma d'interaction : on définit un état $|\phi(t)>$ tel que le vecteur d'état du système s'écrit :

$$|\Psi(t)>= e^{-iH_0 t}|\phi(t)> \tag{2.40}$$

Ceci mène à l'équation d'évolution suivante pour $|\phi(t)>$:

$$i\frac{d}{dt}|\phi(t)>= H_I(t)|\phi(t)> \tag{2.41}$$

avec $H_I(t) = e^{iH_0\,t}H_I(0)e^{-iH_0\,t} = \int d^3x \frac{\lambda}{4!}\phi_I^4(\vec{x},t)$ où $\phi_I(x) = e^{iH_0\,t}\phi(\vec{x},t)e^{-iH_0\,t}$.
Si on développe $|\phi>$ en série de puissances du paramètre d'interaction (ici, λ), on obtient :

$$\begin{aligned} |\phi(t)> &= \left(1+\frac{1}{i}\int_0^t H_I(t')\,dt' + \frac{1}{i^2}\int_0^t dt'\int_0^{t'} dt''\,H_I(t')H_I(t'') + ...\right)|\phi(0)> \\ &= U(t,0)|\phi(0)> \end{aligned} \tag{2.42}$$

où

$$U(t,0) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{i^n}\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2 ... \int_0^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1)\,...H_I(t_n)$$

est *l'opérateur d'évolution* de $|\phi>$.
Pour deux instants arbitraires $t_i < t_f$, on a : $|\phi(t_f)>= U(t_f,t_i)\,|\phi(t_i)>$ avec

$$U(t_f,t_i) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{i^n}\int_{t_i}^{t_f} dt_1\int_{t_i}^{t_1} dt_2\,...\int_{t_i}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1)...H_I(t_n) \tag{2.43}$$

En utilisant le produit chronologique, $U(t_f,t_i)$ s'écrit

$$\begin{aligned} U(t_f,t_i) &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{i^n}\frac{1}{n!}\int_{t_i}^{t_f} dt_1\int_{t_i}^{t_f} dt_2\,...\int_{t_i}^{t_f} dt_n\,T(H_I(t_1)...H_I(t_n)) \\ &\equiv Texp\left(-i\int_{t_i}^{t_f} H_I(\tau)\,d\tau\right) \end{aligned} \tag{2.44}$$

L'expression précédente est appelée *exponentielle chronologique* .
On montre de suite que U vérifie l'équation :

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(t,t') = H_I(t)\,U(t,t') \tag{2.45}$$

avec $U(t,t) = 1$.
On vérifie ensuite que l'expression suivante (les opérateurs H_0 et H sont ici écrits en schéma de Schrödinger, c'est-à-dire en $t = 0$) est solution de l'équation (2.45) :

$$U(t,t') = e^{iH_0\,t}e^{-iH(t-t')}e^{-iH_0\,t'} \tag{2.46}$$

A partir de (2.44), on voit que U est unitaire et que, pour $t_1 \geq t_2 \geq t_3$, on a :

$$U(t_1,t_3) = U(t_1,t_2)U(t_2,t_3) \tag{2.47}$$

$$U(t_1,t_3)[U(t_2,t_3)]^+ = U(t_1,t_2) \tag{2.48}$$

et

$$\phi(x) = U^+(x^0,0)\phi_I(x^0,\vec{x})U(x^0,0) \tag{2.49}$$

L'évolution de l'état fondamental $|0>$ de H_0 est donnée par

$$e^{-iH\,t}\,|0>= \sum_n e^{-iE_n\,t}\,|n>< n|0>$$

où les E_n sont les valeurs propres de H.
On écrira, en utilisant les notations introduites précédemment :

$$e^{-iHt}|0>= e^{-iE_0\,t} < \Omega|0> |\Omega> + \sum_{n\neq 0} e^{-iE_n\,t}|n>< n|0> \qquad (2.50)$$

où on a fixé le zéro de l'énergie par $H_0\,|0>= 0$.
Puisque $E_n > E_0\ \forall\, n \neq 0$, on peut éliminer tous les termes relatifs à $n \neq 0$ en prenant la limite pour t tendant vers $\infty(1 - i\epsilon)$ où ϵ est une quantité infinitésimale positive.
On obtient ainsi :

$$\lim_{t\to\infty(1-i\epsilon)} e^{-iHt}|0>= \lim_{t\to\infty(1-i\epsilon)} e^{-iE_0\,t} < \Omega|0> |\Omega>$$

$$|\Omega>= \lim_{t\to\infty(1-i\epsilon)} \left(e^{-iE_0\,t} < \Omega|0>\right)^{-1} e^{-iHt}|0>$$

En vertu de (2.46), on a :

$$|\Omega>= \lim_{t\to\infty(1-i\epsilon)} \left(e^{-iE_0\,t} < \Omega|0>\right)^{-1} U(0,-t)|0> \qquad (2.51)$$

De même :

$$< \Omega| = \lim_{t\to\infty(1-i\epsilon)} < 0|U(t,0) \left(e^{-iE_0\,t} < 0|\Omega>\right)^{-1} \qquad (2.52)$$

Les deux équations précédentes montrent que le vide libre (ou perturbatif) $|0>$ peut être interprété comme la limite asymptotique (à un facteur près) du vide d'interaction $|\Omega>$.

2.3.2 Relation entre les fonctions à n points perturbatives et exactes

Considérons maintenant la fonction de corrélation à deux points avec $x^0 > y^0$:

$$\begin{aligned}< \Omega|\phi(x)\,\phi(y)|\Omega> &= \lim_{t\to\infty(1-i\epsilon)} \left(e^{-iE_0\,t} < 0|\Omega>\right)^{-1} < 0|U(t,0)U^+(x^0,0)\phi_I(x) \\ &\quad \times U(x^0,0)U^+(y^0,0)\phi_I(y)U(y^0,0)U(0,-t)|0> \left(e^{-iE_0\,t} < \Omega|0>\right)^{-1} \\ &= \lim_{t\to\infty(1-i\epsilon)} \left(| < 0|\Omega> |^2 e^{-2iE_0\,t}\right)^{-1} < 0|U(t,x^0)\phi_I(x)U(x^0,y^0)\phi_I(y) \\ &\quad \times U(y^0,-t)|0> \end{aligned} \qquad (2.53)$$

où on a utilisé les relations (2.47) à (2.49).
Si le vide est normé, on a :

$$< \Omega|\Omega >= 1 = \lim_{t\to\infty(1-i\epsilon)} \Big(| < 0|\Omega > |^2 e^{-2iE_0 t}\Big)^{-1} < 0|U(t,t_0)U(t_0,-t)|0 > \quad \forall t_0$$

Donc, pour $x^0 > y^0$:

$$< \Omega|\phi(x)\,\phi(y)|\Omega >= \lim_{t\to\infty(1-i\epsilon)} \frac{< 0|U(t,x^0)\phi_I(x)U(x^0,y^0)\phi_I(y)U(y^0,-t)|0 >}{< 0|U(t,-t)|0 >} \tag{2.54}$$

Les deux membres de l'équation (2.54) sont déjà ordonnés dans le temps; par conséquent, elle reste vraie pour le produit chronologique. En utilisant la formule (2.44), on arrive à l'expression finale suivante :

$$< \Omega|T\{\phi(x)\,\phi(y)\}|\Omega >= \lim_{t\to\infty(1-i\epsilon)} \frac{< 0|T\{\phi_I(x)\phi_I(y)exp[-i\int_{-t}^{t} H_I(\tau)\,d\tau]\}|0 >}{< 0|Texp[-i\int_{-t}^{t} H_I(\tau)\,d\tau]|0 >} \tag{2.55}$$

On généralise facilement cette équation pour les fonctions à n points :

$$< \Omega|T\{\phi(x_1)\dots\phi(x_n)\}|\Omega >=$$

$$\lim_{t\to\infty(1-i\epsilon)} \frac{< 0|T\{\phi_I(x_1)\dots\phi_I(x_n)exp[-i\int_{-t}^{t} H_I(\tau)\,d\tau]\}|0 >}{< 0|Texp[-i\int_{-t}^{t} H_I(\tau)\,d\tau]|0 >} \tag{2.56}$$

Avant d'utiliser cette relation qui lie les fonctions de corrélation exactes aux fonctions de corrélation perturbatives, il est nécessaire d'introduire l'important *théorème de Wick* qui permet de passer du produit chronologique au produit normal :

$$T(\phi(x_1)\dots\phi(x_n)) = :\phi(x_1)\dots\phi(x_n): + \sum_{1\le i\le j\le n} :\frac{\phi(x_1)\dots\phi(x_n)}{\phi(x_i)\phi(x_j)}:\, iD_F(x_i-x_j)$$

$$+ \sum_{1\le i\le j\le k\le l\le n} :\frac{\phi(x_1),\ \dots\phi(x_n)}{\phi(x_i)\phi(x_j)\phi(x_k)\phi(x_l)}:$$

$$\times[iD_F(x_i-x_j)iD_F(x_k-x_l)+iD_F(x_i-x_k)iD_F(x_j-x_l)+iD_F(x_i-x_l)iD_F(x_j-x_k)]$$

$$+\dots \tag{2.57}$$

Par exemple :

$$T(\phi(x)\phi(y)) = :\phi(x)\phi(y): + iD_F(x-y)$$

Ici, le second terme correspond à la "contraction" des champs $\phi(x)$ et $\phi(y)$, c'est-à-dire qu'on les a remplacés par le propagateur $iD_F(x-y)$. Cette remarque permet d'écrire le théorème de Wick sous une forme plus synthéthique:

$$T(\phi(x_1)\dots\phi(x_n)) = :\phi(x_1)\dots\phi(x_n) + \textit{toutes les contractions possibles}\ :$$

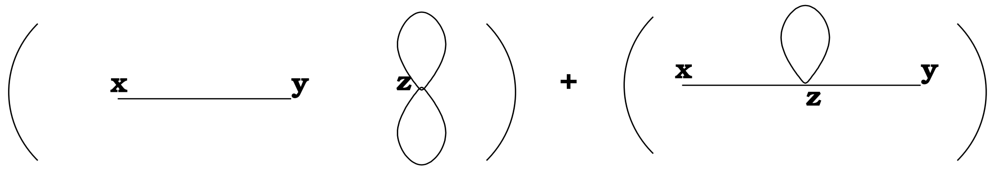


FIG. 2.3 – *Représentation sous forme de diagrammes de Feynman du premier ordre en λ du numérateur de (2.55)*

2.3.3 Développement perturbatif des fonctions à n points

Nous allons maintenant établir le développement perturbatif du propagateur exact; pour les fonctions de corrélation d'ordre supérieur, les choses se passent de manière analogue : il suffit d'utiliser systématiquement le théorème de Wick.
Considérons d'abord le numérateur de (2.55) (où tous les champs sont écrits dans le schéma de Heisenberg); à l'ordre λ :

$$
\begin{aligned}
< 0|T\left\{\phi(x)\phi(y) + \phi(x)\phi(y)\left[-i\int dtH_I(t)\right] + ...\right\}|0 >&= iD_F(x-y) \\
+ < 0|T\left\{\phi(x)\phi(y)(-i)\int dt\int d^3z\,\frac{\lambda}{4!}\phi^4(z)\right\}|0 > &+ ... \\
= iD_F(x-y) + < 0|T\left\{\phi(x)\phi(y)(-i)\int d^4z\frac{\lambda}{4!}\phi^4(z)\right\}|0 > &+ ...
\end{aligned}
$$

Seuls les termes complètement contractés sont non nuls et les contractions y sont de deux types : soit on contracte $\phi(x)$ et $\phi(y)$ ensemble, soit on les contracte avec les $\phi(z)$. Le premier type de contraction se fait de 3 manières différentes et le second de 12 manières différentes. On obtient alors :

$$
\begin{aligned}
< 0|T\left\{\phi(x)\phi(y)\frac{-i\lambda}{4!}\int d^4z\ \phi^4(z)\right\}|0 >&= 3\frac{-i\lambda}{4!}iD_F(x-y)\int d^4z\ iD_F(z-z) \\
\times iD_F(z-z) + 12\frac{-i\lambda}{4!}&\int d^4z\ iD_F(x-z)\,iD_F(y-z)\,iD_F(z-z)
\end{aligned}
$$

Ces termes sont représentés au moyen de diagrammes de Feynman à la figure 2.3. Les points x et y sont dits "externes"; le point "interne" z est associé au facteur $-i\,\lambda\int d^4z$.
Examinons maintenant le terme en λ^2 du développement du numérateur de (2.55) :

$$
< 0|T\{\phi(x)\phi(y)\,\frac{1}{2!}\left(\frac{-i\lambda}{4!}\right)^2\int d^4z\,\phi\phi\phi\phi\int d^4w\,\phi\phi\phi\phi\,|0 >
$$

Une des manières de contracter tous les champs donne le résultat suivant :

$$
\frac{1}{2!}\left(\frac{-i\lambda}{4!}\right)^2\int d^4z\,d^4w\,iD_F(x-z)\,iD_F(y-w)\,iD_F(z-w)\,iD_F(z-z)\,iD_F(w-w)
$$

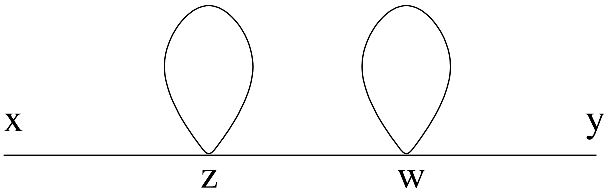


FIG. 2.4 – *Diagramme représentant un terme d'ordre λ^2 du développement du numérateur de (2.55)*

Ce type de contraction correspond au diagramme de la figure 2.4. On trouve 288 termes correspondant à ce diagramme : un facteur 2 provient de la permutation des vertex x et y et 2 facteurs 12 sont dus au placement des contractions dans les vertex z et w .

Il est possible d'établir les règles suivantes qui permettent d'obtenir directement, à tout ordre en λ, l'expression associée à chaque diagramme (y compris le facteur multiplicatif correspondant au nombre de manières différentes d'obtenir le diagramme) :

1. à chaque propagateur reliant les points externes x et y on associe le facteur $iD_F(x-y)$
2. chaque vertex z contribue à raison d'un facteur $-i\lambda \int d^4z$
3. chaque ligne externe (reliée à un point externe) donne une contribution égale à un
4. après avoir tenu compte des points précédents, il faut diviser la quantité obtenue par le facteur de symétrie du diagramme.

Le facteur de symétrie du diagramme est calculé comme suit : chaque boucle produit un facteur 2, chaque couple de propagateurs dont la permutation laisse le diagramme invariant donne aussi un facteur 2; un troisième type de symétrie est l'équivalence de deux vertex. Par exemple, le facteur de symétrie du diagramme précédent est 4 et on a bien $\frac{288}{2!(4!)^2} = \frac{1}{4}$.
Les règles énoncées plus haut sont appelées "règles de Feynman position-espace". En écrivant les propagateurs sous forme d'intégrales de Fourier (cfr. (2.17)) et en effectuant les intégrations sur les quadri-positions des vertex, on obtient les "règles de Feynman impulsion-espace" :

1. à chaque propagateur d'impulsion p, on associe le facteur $\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}$
2. chaque vertex z contribue à raison d'un facteur $-i\lambda$
3. chaque ligne externe d'impulsion p et reliée à un point externe x donne une contribution égale à $e^{-ip.x}$
4. division par le facteur de symétrie du diagramme.

Avec ces règles de calcul des diagrammes, on a donc, pour le numérateur de (2.55) :

$$< 0|T\{\phi_I(x)\phi_I(y)\, exp[-i \int dt\, H_I(t)]\}|0 >=$$

$$\left(\begin{array}{c} \textit{somme de tous les diagrammes avec} \\ \textit{2 points externes} \end{array} \right)$$

Jusqu'à présent, nous avons remplacé, dans tous les calculs, l'expression $\lim_{t\to\infty(1-i\epsilon)} \int_{-t}^{t} dz^0 \int d^3z \ldots$ de (2.54) par $\int d^4z \ldots$; on peut justifier cela en montrant que prendre le limite $\lim_{t\to\infty(1-i\epsilon)} \ldots$ revient à imposer la prescription "$+i\epsilon$" des propagateurs (cfr. (2.17)). Cette remarque n'est cependant pas valable pour les parties déconnectées des diagrammes, c'est-à-dire celles qui ne sont reliées à aucun point externe; mais nous allons montrer que ces diagrammes peuvent être factorisés dans le numérateur et le dénominateur de (2.54) et donc ne contribuent pas à la fonction de corrélation. Un exemple typique de diagramme possédant une partie déconnectée est donné par le premier diagramme de la figure 2.3.

Notons V_i les différentes parties déconnectées (V_i désignera aussi la valeur du diagramme V_i). Si un diagramme donné possède n_i parties déconnectées de la forme V_i, la valeur de ce diagramme est :

$$(\textit{valeur de la partie connectée}) \times \prod_i \frac{1}{n_i!} (V_i)^{n_i}$$

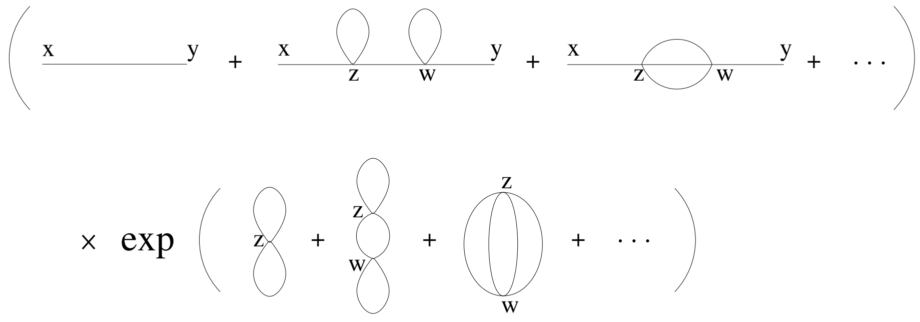
Le facteur $\frac{1}{n_i!}$ provient du fait que la permutation des n_i copies de V_i laisse le diagramme invariant. Le numérateur de la formule de la fonction de corrélation à 2 points s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \sum_{\textit{parties connectées}} \sum_{\textit{tous}\,\{n_i\}} \left(\begin{array}{c} \textit{valeur de la} \\ \textit{partie connectée} \end{array} \right) \times \prod_i \frac{1}{n_i!} (V_i)^{n_i} \\ = (\sum \textit{parties connectées}) \sum_{\textit{tous}\,\{n_i\}} \prod_i \frac{1}{n_i!} (V_i)^{n_i} \\ = (\sum \textit{parties connectées}) \times \prod_i (\sum_{n_i} \frac{1}{n_i!} (V_i)^{n_i}) \\ = (\sum \textit{parties connectées}) \times exp(\sum_i V_i) \qquad (2.58) \end{aligned}$$

On conclut que la somme de tous les diagrammes est égale à la somme de tous les diagrammes connectés multipliée par l'exponentielle de la somme des diagrammes déconnectés.

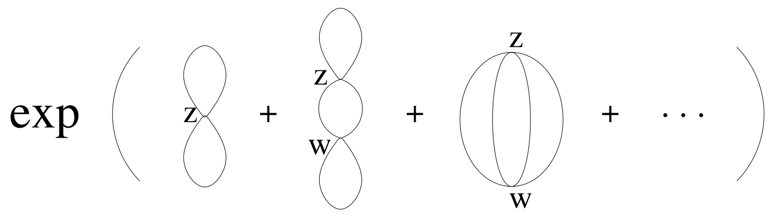
On a donc :

$$\lim_{t\to\infty(1-i\epsilon)} < 0|T\left\{\phi(x)\phi(y) exp\left[-i\int_{-t}^{t} dt H_I(t)\right]\right\}|0 >=$$



Considérons maintenant le dénominateur de (2.55) : celui-ci ne fait intervenir que des diagrammes déconnectés et on a :

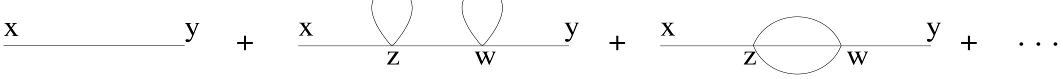
$$\lim_{t \to \infty(1-i\epsilon)} < 0|T\left\{exp\left[-i\int_{-t}^{t} dtH_I(t)\right]\right\}|0>=$$



Ceci donne la formule finale du développement perturbatif du propagateur exact :

$$< \Omega|T\{\phi(x)\phi(y)\}|\Omega>=$$

$$\left(\begin{array}{c} somme\ de\ tous\ les\ diagrammes\ connect\acute{e}s\ avec \\ 2\ points\ externes \end{array} \right) =$$



où chaque diagramme est calculé en fonction des règles édictées précédemment. Cette formule se généralise facilement aux fonctions de corrélation à n points :

$$< \Omega|T\{\phi(x_1)...\phi(x_n)\}|\Omega>=$$

$$\left(\begin{array}{c} somme\ de\ tous\ les\ diagrammes\ connect\acute{e}s\ avec \\ n\ points\ externes \end{array} \right) \tag{2.59}$$

Cette formule, ainsi que les règles de Feynman, permet de développer perturbativement n'importe quelle fonction de corrélation exacte à n points. Ces considérations sur les fonctions de corrélation exactes et perturbatives sont importantes, car, dans la suite, on n'étudiera plus que les fonctions exactes (théorie des champs non perturbatives) et il faudra garder à l'esprit la relation qui les lie aux propagateurs que l'on rencontre d'habitude en théorie perturbative.

Chapitre 3

Les équations de Dyson-Schwinger (D-S)

3.1 Introduction aux méthodes fonctionnelles

Dans ce chapitre, nous allons établir les équations de Dyson-Schwinger qui jouent un rôle central dans l'étude des aspects non perturbatifs de la théorie des champs et plus particulièrement en chromodynamique quantique. Ces équations sont les équations de mouvement de la théorie en interaction qui relient les différentes fonctions de Green entre elles : elles s'obtiennent de manière assez naturelle dans le cadre du formalisme fonctionnel (dû à Feynman); on peut aussi les dériver, mais plus difficilement, en formalisme canonique.
Le point de départ des méthodes fonctionnelles est l'introduction du concept d'intégrale de chemin en mécanique quantique qui mène à un troisième formalisme, équivalent à celui de Schrödinger ou à celui de Heisenberg.
Considérons un système quantique à un seul degré de liberté x.
Soit $U(x_a, x_b; T)$ la probabilité pour qu'une particule voyage du point x_a au point x_b en un temps T. En mécanique quantique, on sait que

$$U(x_a, x_b; T) =< x_b|e^{-i\hat{H}T/\hbar}|x_a > \tag{3.1}$$

On peut adopter une approche différente et s'appuyer sur le principe de superposition qui stipule que lorsqu'un processus peut se dérouler de plusieurs manières, l'amplitude totale qui le décrit est donnée par la somme algébrique des amplitudes relatives à chaque voie. On écrit donc :

$$U(x_a, x_b; T) = \sum_{chemins} e^{i\,(phase)} = \int Dx(t)\; e^{i\,(phase)} \tag{3.2}$$

Ici, "$\int Dx(t)$" signifie "somme sur tous les chemins possibles" et chaque fonction $x(t)$ représente un chemin qui commence en x_a et se termine en x_b : on a en fait l'intégrale de la fonctionnelle $e^{i\,(phase)}$ sur l'espace continu des fonctions $x(t)$.

Recherchons maintenant l'expression de la phase. Il faut que, dans la limite classique, un seul chemin contribue à l'amplitude totale : la trajectoire classique doit correspondre à une phase stationnaire puisque les chemins pour lesquels la phase varie rapidement ne contribuent pas à l'intégrale (3.2) vu les oscillations rapides de l'exponentielle imaginaire. D'autre part, on sait que la trajectoire classique satisfait au principe de moindre action.
Les deux conditions précédentes se traduisent par :

$$\frac{\delta}{\delta x(t)}(phase[x(t)])_{x_{classique}} = 0 \quad et \quad \frac{\delta}{\delta x(t)}(S[x(t)])_{x_{classique}} = 0 \qquad (3.3)$$

On peut donc supposer que la phase est proportionnelle à S, et on prend $S/\hbar$ pour cette phase de manière à ce que le principe de l'action stationnaire soit valide dans la limite classique, c'est-à-dire quand $S >> \hbar$. On écrit donc :

$$U(x_a, x_b; T) = \int Dx(t)\ e^{i\,S[x(t)]/\hbar} \qquad (3.4)$$

Pour calculer l'intégrale fonctionnelle (3.4), on procède par discrétisation : on découpe [0,T] en un grand nombre (N) d'intervalles de durée ϵ. On définit alors l'intégrale de chemin par :

$$\int Dx(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{C(\epsilon)} \int \frac{dx_1}{C(\epsilon)} \ldots \int \frac{dx_{N-1}}{C(\epsilon)} = \frac{1}{C(\epsilon)} \prod_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_k}{C(\epsilon)} \qquad (3.5)$$

où $x_n = x(n\epsilon)$ et $T = N\epsilon$.
On peut montrer que pour $C(\epsilon) = \sqrt{\frac{2\pi\epsilon\hbar}{-im}}$, la définition (3.4) est équivalente à l'expression (3.1), bien connue en mécanique quantique. Le formalisme de Feynman permet ainsi de quantifier un système en ne faisant pas référence au hamiltonien, mais plutôt à l'action.
Dans le cas d'un système quantique général, de coordonnées q^i, d'impulsions conjuguées p^i et de hamiltonien $H(p, q)$, on a :

$$U(q_a, q_b; T) =< q_b|e^{-i\hat{H}T}|q_a > \qquad \text{avec } \hbar = 1,\ q = \{q^i\} \text{ et } p = \{p^i\} \qquad (3.6)$$

On découpe de nouveau [0,T] en N intervalles de durée ϵ, et on écrit :

$$e^{-i\hat{H}T} = e^{-i\hat{H}\epsilon}e^{-i\hat{H}\epsilon}\ldots e^{-i\hat{H}\epsilon}$$

Ensuite, on insère, entre chacun des facteurs de l'expression précédente, un ensemble complet d'états intermédiaires de la forme :

$$\mathbf{1} = \left(\prod_i \int dq_k^i\right) |q_k >< q_k|$$

avec $k = 1...(N-1)$. On doit donc évaluer ($\epsilon \to 0$) un produit de facteurs de type $< q_{k+1}|1 - i\hat{H}\epsilon + ...|q_k >$. Considérons d'abord l'expression :

$$< q_{k+1}|\hat{f}(q)|q_k >= f(q_k) \prod_i \delta(q_k^i - q_{k+1}^i)$$

Elle peut aussi s'écrire :

$$< q_{k+1}|\hat{f}(q)|q_k >= f\left(\frac{q_{k+1}+q_k}{2}\right)\left(\prod_i \int \frac{dp_i^k}{2\pi}\right) exp\left[i\sum_i p_k^i(q_{k+1}^i - q_k^i)\right]$$

De la même manière, mais en introduisant cette fois un ensemble complet d'états propres de l'impulsion, on obtient :

$$< q_{k+1}|\hat{f}(p)|q_k >= \left(\prod_i \int \frac{dp_i^k}{2\pi}\right) f(p_k)\, exp\left[i\sum_i p_k^i(q_{k+1}^i - q_k^i)\right]$$

Les deux relations précédentes se généralisent aisément pour un hamiltonien général :

$$< q_{k+1}|\hat{H}(q,p)|q_k >= \left(\prod_i \int \frac{dp_i^k}{2\pi}\right) H\left(\frac{q_{k+1}+q_k}{2}, p_k\right) exp\left[i\sum_i p_k^i(q_{k+1}^i - q_k^i)\right] \tag{3.7}$$

En intégrant sur toutes les coordonnées intermédiaires q_k et en prenant la limite pour $\epsilon \to 0$, on trouve finalement (en vertu de la définition des intégrales fonctionnelles) :

$$U(q_a, q_b; T) = \prod_i \int Dq^i(t)\, Dp^i(t)\, exp\left[i\int_0^T dt\ \left(\sum_j p^j \dot{q}^j - H(q,p)\right)\right] \tag{3.8}$$

où les fonctions $q(t)$ sont fixées en $t = 0$ et $t = T$ ($q(0) = q_a$ et $q(T) = q_b$); les fonctions $p(t)$ ne sont, quant à elles, évidemment pas contraintes aux points extrêmes, vu le principe d'incertitude.
Cette équation est la formule la plus générale pour calculer des amplitudes de transition d'un système quantique donné via les intégrales fonctionnelles; elle va nous permettre d'obtenir facilement son extension à la théorie des champs où le nombre de degrés de liberté est infini non dénombrable.

3.2 Théorie fonctionnelle du champ scalaire

La formule (3.8) est valable pour tout système quantique; on peut donc l'étendre directement à la théorie quantique des champs au moyen des substitutions suivantes : $i \to \vec{x}$, $q_i \to \phi(\vec{x})$ et $\sum_i \to \int d^3x$.
Dans le cas d'un champ scalaire neutre, le lagrangien et le hamiltonien du système s'écrivent :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - V(\phi) \quad et \quad H = \int d^3x\ \left[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi)\right]$$

Notons $|\phi_a>$ et $|\phi_b>$ deux états propres du champ ϕ (ici, dans le schéma de Schrödinger) tels que :

$$\hat{\phi}_S(\vec{x})|\phi_a>=\phi_a(\vec{x})|\phi_a> \quad et \quad \hat{\phi}_S(\vec{x})|\phi_b>=\phi_b(\vec{x})|\phi_b> \tag{3.9}$$

La formule (3.8) revient alors à :

$$<\phi_b|e^{-i\hat{H}T}|\phi_a>=$$
$$\int D\phi(x)\,D\pi(x)\,exp\left\{i\int_0^T dt\,\int d^3x\,\left[\pi(x)\dot{\phi}(x)-\frac{1}{2}\pi^2(x)-\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2-V(\phi)\right]\right\} \tag{3.10}$$

où les fonctions $\phi(\vec{x})$ sont fixées en $x^0=0$ ($\phi_a(\vec{x})$) et en $x^0=T$ ($\phi_b(\vec{x})$).
En effectuant l'intégration sur $D\pi$, on obtient :

$$<\phi_b|e^{-i\hat{H}T}|\phi_a>=\int D\phi\,exp\left[i\int_0^T dt\int d^3x\,\mathcal{L}\right] \tag{3.11}$$

Nous allons maintenant établir la forme du propagateur $<\Omega|T\{\phi_H(x_1)\phi_H(x_2)\}|\Omega>$ en formalisme fonctionnel, qui correspond à la propagation d'une particule scalaire entre les points fixes x_1 et x_2.
Considérons l'expression suivante :

$$I=\int D\phi(x)\;\phi(x_1)\phi(x_2)\,exp\left\{-i\int_{-T}^T dt\int d^3x\,\mathcal{L}[\phi]\right\}$$

avec, comme conditions aux limites : $\phi(-T,\vec{x})=\phi_a(\vec{x})$ et $\phi(T,\vec{x})=\phi_b(\vec{x})$.
En décomposant l'intégrale sur $D\phi$, on obtient :

$$\begin{aligned}I &= \int D\phi_1(\vec{x})\int D\phi_2(\vec{x})\int_{\substack{\phi(x_1^0,\vec{x})=\phi_1(\vec{x})\\ \phi(x_2^0,\vec{x})=\phi_2(\vec{x})}} D\phi(x)\;\phi(x_1)\phi(x_2)\\ &\qquad\times exp\left[i\int_{-T}^T dt\int d^3x\,\mathcal{L}\right]\\ &= \int D\phi_1(\vec{x})\;\phi_1(\vec{x}_1)\int D\phi_2(\vec{x})\;\phi_2(\vec{x}_2)\int_{\substack{\phi(x_1^0,\vec{x})=\phi_1(\vec{x})\\ \phi(x_2^0,\vec{x})=\phi_2(\vec{x})}} D\phi(x)\\ &\qquad\times exp\left[i\int_{-T}^T dt\int d^3x\,\mathcal{L}\right]\end{aligned}$$

Supposons que $x_1^0<x_2^0$, la dernière intégrale de cette expression se factorise en trois facteurs qui sont, en vertu de (3.11), les amplitudes de transition correspondant aux intervalles $[-T,x_1^0]$, $[x_1^0,x_2^0]$ et $[x_2^0,T]$ (si $x_1^0>x_2^0$, il suffit d'intervertir les indices 1 et 2) :

$$I=\int D\phi_1(\vec{x})\int D\phi_2(\vec{x})\;\phi_1(\vec{x}_1)\phi_2(\vec{x}_2)\;\;<\phi_b|e^{-i\hat{H}(T-x_2^0)}|\phi_2>$$

$$\times \ < \phi_2|e^{-i\hat{H}(x_0^2-x_1^0)}|\phi_1 >< \phi_1|e^{-i\hat{H}(x_0^1+T)}|\phi_a >$$

En utilisant $\hat{\phi}_S(\vec{x}_1)|\phi_1 >= \phi_1(\vec{x}_1)|\phi_1 >$, $\int D\phi_1 \ |\phi_1 >< \phi_1| = \mathbf{1}$ et les relations analogues pour ϕ_2, on peut passer aux champs de Heisenberg (pour rappel, $\hat{\phi}_H = e^{i\hat{H}t} \ \hat{\phi}_S \ e^{-i\hat{H}t}$) :

$$I =< \phi_b|e^{-i\hat{H}T}\{\hat{\phi}_H(x_2)\hat{\phi}_H(x_1)\}e^{-i\hat{H}T}|\phi_a >$$

Si $x_1^0 > x_2^0$, x_1 et x_2 sont permutés, ce qui introduit un produit chronologique dans l'expression générale :

$$I =< \phi_b|e^{-i\hat{H}T}T\{\hat{\phi}_H(x_2)\hat{\phi}_H(x_1)\}e^{-i\hat{H}T}|\phi_a > \tag{3.12}$$

On décompose ensuite $|\phi_a >$ sur les états propres $|n >$ de H :

$$e^{-i\hat{H}T}|\phi_a >= \sum_n e^{-iE_nT}|n >< n|\phi_a >$$

En utilisant la même astuce qu'au chapitre précédent (voir (2.50)), on obtient :

$$|\Omega >= \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \frac{e^{-i\hat{H}T}|\phi_a >}{e^{-iE_0T} < \Omega|\phi_a >}$$

où $E_0 =< \Omega|\hat{H}|\Omega >$ est l'énergie de l'état fondamental.
De même, on a :

$$< \Omega| = \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \frac{< \phi_b|e^{-i\hat{H}T}}{e^{-iE_0T} < \phi_b|\Omega >}$$

En rassemblant ces différentes relations, on trouve finalement :

$$< \Omega|T\{\phi_H(x_1)\phi_H(x_2)\}|\Omega >=$$

$$\lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \frac{\int D\phi(x) \ \phi(x_1)\phi(x_2) \, exp\{-i\int_{-T}^{T}\int d^4x \ \mathcal{L}[\phi]\}}{\int D\phi(x) \ exp\{-i\int_{-T}^{T}\int d^4x \ \mathcal{L}[\phi]\}} \tag{3.13}$$

Cette formule se généralise de manière évidente aux fonctions à n points.
Pour le champ scalaire libre ($\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}\mathrm{m}^2\phi^2$), (3.13) permet, en calculant explicitement les intégrales fonctionnelles, de retrouver l'expression (2.17) du propagateur. De plus, dans la théorie d'interaction en $\lambda\phi^4$, si on développe en série la partie de l'exponentielle correspondant au lagrangien d'interaction, on obtient à nouveau l'équation (2.56).

3.3 Fonctionnelle génératrice des fonctions de Green

Introduisons maintenant la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green qui est à la base d'une méthode formelle de calcul de ces fonctions :

$$Z[J] = \int D\phi \ exp\left\{i\int d^4x \ [\mathcal{L}(x) + J(x)\phi(x)]\right\} \tag{3.14}$$

Le terme $J(x)$ joue le rôle d'un multiplicateur de Lagrange et porte le nom de "terme source". Les fonctions de corrélation s'obtiennent par dérivation fonctionnelle multiple (cfr. (3.13)) :

$$< \Omega|T\{\phi(x_1)...\phi(x_n)\}|\Omega >= \frac{1}{Z_0}\left(-i\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\right)...\left(-i\frac{\delta}{\delta J(x_n)}\right)\ Z[J]\ \Bigg|_{J=0} \tag{3.15}$$

où $Z_0 = Z[J=0]$ et où on a défini la dérivée fonctionnelle par :

$$\frac{\delta J(y)}{\delta J(x)} = \delta^{(4)}(x-y) \quad ou \quad \frac{\delta}{\delta J(x)}\int d^4x\ J(y)\phi(y) = \phi(x) \tag{3.16}$$

Dans la formule (3.15), $|\Omega >$ désigne le vide de la théorie correspondant au lagrangien complet $\mathcal{L}(x)$.
Pour la théorie de Klein-Gordon libre, (3.14) donne, après calculs :

$$Z[J] = Z_0\, exp\left[-\frac{1}{2}\int d^4x\, d^4y\ J(x)\, iD_F(x-y)J(y)\right]$$

On retrouve alors immédiatement :

$$\begin{aligned}< 0|T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\}|0 >= &-\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\ \delta\delta J(x_2)\ exp\left[-\frac{1}{2}\int d^4x\, d^4y\ J(x)\right.\\ &\left.\times\ iD_F(x-y)J(y)\right]\\ &= iD_F(x-y)\end{aligned} \tag{3.17}$$

L'utilisation de cette méthode est un peu plus compliquée dans le cas du champ de Dirac et nécessite alors l'introduction de variables anticommutatives appelées *variables de Grassman* .

3.4 Dérivation des équations de Dyson-Schwinger

Dans cette section, nous allons montrer comment on peut obtenir, à partir du formalisme fonctionnel, les équations de mouvement qui relient entre elles les différentes fonctions de Green. Pour fixer les idées, considérons la fonction à 3 points du champ scalaire libre :

$$< 0|T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\}|0 >= Z_0^{-1}\int D\phi\ \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\, e^{i\int d^4x\,\mathcal{L}}$$

avec $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}\mathrm{m}^2\phi^2$.
En formalisme canonique, on obtient les équations de mouvement à partir du principe de moindre action, selon lequel l'action est stationnaire sous la variation infinitésimale :

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + \epsilon(x) \tag{3.18}$$

Dans le formalisme fonctionnel, le procédé analogue consiste à considérer (3.18) comme un changement de variables infinitésimal, ce qui donne :

$$\int D\phi\ e^{i\int d^4x\ \mathcal{L}[\phi]}\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) = \int D\phi\ e^{i\int d^4x\ \mathcal{L}[\phi']}\ \phi'(x_1)\phi'(x_2)\phi'(x_3)$$

Donc, au premier ordre, on a :

$$0 = \int D\phi\ e^{i\int d^4x\ \mathcal{L}[\phi]}\Big\{i\int d^4x\ \epsilon(x)[-(\partial^2+m^2)\phi(x)]\ \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)$$
$$+\ \epsilon(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) + \epsilon(x_2)\phi(x_1)\phi(x_3) + \epsilon(x_3)\phi(x_1)\phi(x_2)\Big\}$$

Cette équation est valable pour tout $\epsilon(x)$ tendant vers 0, et en prenant $\epsilon(x) = \epsilon\ \delta^{(4)}(x-x')$ (avec $\epsilon \to 0$), on obtient facilement :

$$0 = \int D\phi\ e^{i\int d^4x\ \mathcal{L}}\{(\partial^2+m^2)\phi(x')\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) + i\delta^{(4)}(x'-x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)$$
$$+i\delta^{(4)}(x'-x_2)\phi(x_1)\phi(x_3) + i\delta^{(4)}(x'-x_3)\phi(x_1)\phi(x_2)\} \qquad (3.19)$$

Dans le cas d'un seul champ $\phi(x_1)$, l'expression précédente se réduit à :

$$(\partial^2+m^2) < \Omega|T\{\phi(x)\phi(x_1)\}|\Omega >= -i\delta^{(4)}(x-x_1) \qquad (3.20)$$

Cette équation, qui est notre première équation de Dyson-Schwinger, montre de nouveau que le propagateur de Feynman est bien une fonction de Green de l'équation de Klein-Gordon : la fonction de corrélation vérifie l'équation de Klein-Gordon excepté quand x et x_1 coincident. La modification de l'équation en ce point est appelée "terme de contact".
Pour la fonction à n points, on a :

$$(\partial^2+m^2) < \Omega|T\{\phi(x)\phi(x_1)...\phi(x_n)\}|\Omega >=$$
$$\sum_{i=1}^{n} < \Omega|T\{\phi(x_1)...(-i\delta(x-x_i))...\phi(x_n)\}|\Omega > \qquad (3.21)$$

On conclut donc que $\phi(x)$ vérifie l'équation de mouvement de Klein-Gordon dans n'importe quelle valeur moyenne quantique (fonction de corrélation) à un terme de contact près.
Après ces deux exemples, nous pouvons maintenant passer au cas général : considérons un champ quantique $\varphi(x)$ (scalaire, spinoriel ou vectoriel) associé au lagrangien $\mathcal{L}[\varphi]$. Pour un champ en deux points différents $\varphi(x_1)$ et $\varphi(x_2)$, on obtient, tout comme précédemment :

$$0 = \int D\varphi\ e^{i\int d^4x\ \mathcal{L}}\ \left\{i\int d^4x\ \epsilon(x)\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\left(\int d^4x'\ \mathcal{L}\right)\varphi(x_1)\varphi(x_2)\right.$$
$$\left. +\ \epsilon(x_1)\varphi(x_2) + \varphi(x_1)\epsilon(x_2)\right\} \qquad (3.22)$$

Or on a justement :

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\left(\int d^4x'\ \mathcal{L}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}$$

On aura reconnu le premier membre des équations de mouvement d'Euler-Lagrange.
A partir de (3.19), généralisée à n champs, on est finalement conduit à :

$$\left\langle \left(\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\int d^4x'\ \mathcal{L}\right)\varphi(x_1)...\varphi(x_n)\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle\varphi(x_1)...(-i\delta(x-x_i))...\varphi(x_n)\rangle \tag{3.23}$$

ici, les "crochets" notent une fonction de corrélation dans laquelle toutes les dérivées (spatio-temporelles) portant sur $\varphi(x)$ sont placées à l'extérieur du produit chronologique :

$$\begin{aligned} <\phi(x_1)...\phi(x_n)> &\equiv <\Omega|T\{\phi(x_1)...\phi(x_n)\}|\Omega> \\ <\partial_\mu\phi(x)> &\equiv \partial_\mu <\Omega|\phi(x)|\Omega> \end{aligned} \tag{3.24}$$

Les équations (3.23) portent le nom *d'équations de Dyson-Schwinger* : elles constituent en fait un système infini d'équations intégro-différentielles couplées qui lient toutes les fonctions de Green entre elles. Ces équations, qui sont les équations de mouvement des fonctions de Green, montrent que ces dernières vérifient les équations d'Euler-Lagrange à des termes de contact près.
Nous avons dérivé ici la forme générique des équations de Dyson-Schwinger (applicable pour n'importe quelle théorie), mais elle ne ressemble pas encore aux équations que l'on rencontre d'habitude (en QED ou QCD par exemple) : ces équations font intervenir d'autres fonctions de Green (moins générales) que celles que nous avons étudiées jusqu'à présent. Ces nouvelles fonctions de Green seront introduites dans le chapitre suivant et nous redériverons les équations de Dyson-Schwinger qui leur correspondent (bien qu'il soit possible d'obtenir ces dernières équations à partir de (3.23) et de la relation qui lie les fonctions de Green complètes à ces nouvelles fonctions de Green).

Chapitre 4

Les équations de Dyson-Schwinger en électrodynamique quantique (QED)

Après les considérations générales du chapitre précédent, et avant de se lancer dans l'étude de la chromodynamique quantique, il est important de se familiariser avec le formalisme de Dyson-Schwinger au travers de l'électrodynamique quantique qui, en raison de son caractère abélien, est beaucoup plus simple. De plus, en QED, il n'y a pas de termes de "ghost" (les termes de "ghost" sont des termes supplémentaires et non physiques à ajouter au lagrangien pour restaurer l'unitarité de certaines théories, notamment QCD), ce qui constitue une simplification appréciable. Enfin, certaines équations que nous allons obtenir dans ce chapitre seront directement exportables en QCD, moyennant l'ajout d'indices de couleur.

4.1 Obtention des équations

Nous allons maintenant redériver les équations de Dyson-Schwinger (D-S) pour le tenseur de polarisation du photon, la self-énergie fermionique et la fonction de vertex fermion-photon (voir [4]). Le lagrangien de l'électrodynamique quantique s'écrit comme suit (en adoptant le couplage minimum) :

$$\mathcal{L}_\xi = \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - \mathrm{m}_0 + \mathrm{e}_0\gamma^\mu \mathrm{A}_\mu)\psi - \frac{1}{4}\,\mathrm{F}^{\mu\nu}\,\mathrm{F}_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi_0}(\partial_\mu \mathrm{A}^\mu)^2 \tag{4.1}$$

Le dernier terme du lagrangien sert à fixer la jauge covariante (voir [5]) tandis que ξ_0, e_0 et m_0 désignent respectivement le paramètre de jauge, la charge et la masse non renormalisés (cfr. section suivante). La fonctionnelle génératrice des fonctions de Green est donnée par :

$$Z[\bar{\eta}, \eta, J_\mu] = \int D\bar{\psi}\, D\psi\, DA\; exp(i\int d^4x[\mathcal{L}_\xi + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + A_\mu J^\mu]) \tag{4.2}$$

où η, $\bar{\eta}$ et J^μ sont les sources des champs $\bar{\psi}$, ψ et A^μ.
Une nouveauté se présente ici : comme on décrit des fermions, les champs $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ et $\bar{\eta}(x)$ doivent être des champs anticommutatifs ou *champs de Grassman.*
La fontionnelle Z génère les *fonctions de Green complètes,* alors que ce sont les *fonctions de Green connectées* (telles que deux points quelconques sont toujours reliés) qui interviennent dans les équations de Dyson-Schwinger; en effet, les parties déconnectées des fonctions à n points ne contribuent pas aux amplitudes de diffusion. Nous avons montré au chapitre 2, qu'exprimée en termes de $< 0|T\phi\phi|0 >$, $< \Omega|T\phi\phi|\Omega >$ ne faisait intervenir que des diagrammes connectés. Néanmoins, par rapport au vide $|\Omega >$, les fonctions de Green considérées jusqu'à présent ne sont pas connectées. Il est possible de montrer (voir [6]) que la fonctionnelle génératrice des fonctions connectées, G, est liée à Z par la relation :

$$Z[\bar{\eta}, \eta, J_\mu] = \ exp(G[\bar{\eta}, \eta, J_\mu]) \tag{4.3}$$

Pour déduire les équations de Dyson-Schwinger de QED, il suffit de remarquer que, comme dans le cas des intégrales usuelles, l'intégrale fonctionnelle d'une dérivée fonctionnelle totale s'annule (moyennant les conditions aux limites adéquates). On peut donc écrire :

$$0 = \int D\bar{\psi}\, D\psi\, DA\, \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)}\, exp\left(i \int d^4x\, [\mathcal{L}_\xi + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + \mathrm{A}_\mu \mathrm{J}^\mu]\right)$$

Ceci mène directement à :

$$\left[\partial^\rho \partial_\rho\, g^{\mu\nu} - (1 - \frac{1}{\xi_0})\partial^\mu \partial^\nu\right] \frac{\delta G}{i\,\delta J^\nu(x)} + e_0 \left(\frac{\delta G}{\delta \eta(x)}\, \gamma^\mu\, \frac{\delta G}{\delta \bar{\eta}(x)}\right.$$
$$\left. + \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \left[\gamma^\mu\, \frac{\delta G}{\delta \bar{\eta}(x)}\right]\right) = -J^\mu(x) \tag{4.4}$$

A ce stade, on effectue une transformation de Legendre pour introduire les fonctions de Green connectées et *irréductibles à une particule* (1-PI) : ce sont des fonctions connectées qu'il est impossible de séparer en deux parties distinctes en ne supprimant qu'un seul propagateur. Si Γ est la fonctionnelle génératrice de ces nouvelles fonctions de Green, il vient (voir [7]) :

$$G[\bar{\eta}, \eta, J_\mu] = i\,\Gamma[\bar{\psi}, \psi, A_\mu] + i \int d^4x\ [\bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + A_\mu J^\mu] \tag{4.5}$$

Cette relation implique que :

$$A_\mu(x) = \frac{\delta G}{i\,\delta J^\mu(x)} \quad , \quad \psi(x) = \frac{\delta G}{i\,\delta \bar{\eta}(x)} \quad , \quad \bar{\psi}(x) = -\frac{\delta G}{i\,\delta \eta(x)}$$

$$J_\mu(x) = -\frac{\delta\Gamma}{\delta A^\mu(x)} \quad , \quad \eta(x) = -\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}(x)} \quad , \quad \bar{\eta}(x) = \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi(x)} \tag{4.6}$$

En utilisant l'identité $\delta\bar{\psi}_\alpha(x)/\delta\bar{\psi}_\beta(y) = \delta_{\alpha\beta}\,\delta^4(x-y)$ et les relations précédentes, on trouve :

$$i\int d^4x\, \frac{\delta^2 G}{\delta\eta_\alpha(x)\,\delta\bar{\eta}_\gamma(z)}\, \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi_\gamma(z)\,\delta\bar{\psi}_\beta(y)} = \delta_{\alpha\beta}\,\delta^4(x-y) \tag{4.7}$$

L'équation (4.4) prend alors la forme suivante :

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta A^\mu(x)} = \left[\partial^\rho\partial_\rho\, g^{\mu\nu} - (1-\frac{1}{\xi_0})\partial^\mu\partial^\nu\right] A_\nu(x) - i\,e_0\; tr[\gamma^\mu S(x,x,[A^\mu])] \tag{4.8}$$

où le propagateur fermionique dans un champ électromagnétique externe, $S(x,y,[A^\mu])$, a été indentifié à $(\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\psi}(x)\,\delta\psi(y)})^{-1}$ en vertu de la relation (4.7) et du fait que la dérivée seconde de G est la fonction de Green à deux points, connectée. Le propagateur fermionique $S(x,y)$ s'obtient en annulant A^μ dans (4.8). Pour obtenir les équations de Dyson-Schwinger relatives au tenseur de polarisation du photon, il nous reste à prendre la dérivée fonctionnelle par rapport à $A_\nu(y)$ des deux membres de l'équation (4.8) et à annuler ensuite A_μ.
La fonction de vertex fermion-photon, Γ_μ (à ne pas confondre avec la fonctionnelle Γ), c'est-à-dire le fonction de Green 1-PI à trois points s'obtient comme suit :

$$e_0\,\Gamma_\mu(x;y,z) = \frac{\delta}{\delta A^\mu(x)}\, \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\psi}(y)\delta\psi(z)}\bigg|_{0=A_\mu=\psi=\bar{\psi}} \tag{4.9}$$

Comme dans le cas du fermion, on peut aussi montrer que la dérivée seconde de Γ par rapport à A donne l'inverse du propagateur du photon, $(D^{-1})^{\mu\nu}(x,y)$.
En définissant le tenseur de polarisation de photon par :

$$\Pi^{\mu\nu}(x,y) = i\,e_0^2\int d^4z_1\; d^4z_2\; tr[\gamma^\mu\, S(x,z_1)\,\Gamma^\nu(y;z_1,z_2)\,S(z_2,x)] \tag{4.10}$$

on obtient finalement l'équation différentielle de Dyson-Schwinger qui le lie au propagateur du photon :

$$(D^{-1})^{\mu\nu}(x,y) = [\partial^\rho\partial_\rho\, g^{\mu\nu} - (1-\frac{1}{\xi_0})\partial^\mu\partial^\nu]\;\delta^d(x-y) + \Pi_{\mu\nu}(x,y) \tag{4.11}$$

Les deux équations précédentes s'écrivent sous une forme plus agréable en espace de Fourier :

$$i\,\Pi^{\mu\nu}(q) = -\,e_0^2\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4}\; tr[(i\gamma^\mu)(iS(l))(i\Gamma^\nu(l,l+q))(iS(l+q))] \tag{4.12}$$

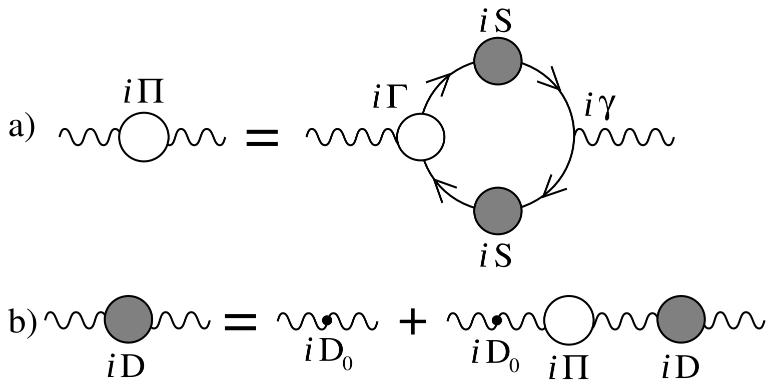


FIG. 4.1 – *Equations de Dyson-Schwinger pour le tenseur de polarisation et le propagateur du photon*

et

$$D^{\mu\nu}(q) = \frac{-g^{\mu\nu} + (q^\mu\, q^\nu/(q^2 + i\epsilon))}{q^2 + i\epsilon}\, \frac{1}{1 + \Pi(q^2)} - \xi_0 \frac{q^\mu\, q^\nu}{(q^2 + i\epsilon)^2} \tag{4.13}$$

où on a utilisé *l'identité de Ward-Takahashi*

$$q_\mu\, \Pi^{\mu\nu}(q) = 0 \tag{4.14}$$

pour définir $\Pi(q^2)$ par $\Pi^{\mu\nu}(q) \equiv (-g^{\mu\nu} q^2 + q^\mu\, q^\nu)\, \Pi(q^2)$.
Il existe toute une famille d'identités de Ward-Takahashi qui expriment le fait que l'invariance de jauge mène à la conservation de courant électromagnétique : ces identités seront discutées plus loin. Les cas $\xi_0 = 0$ et $\xi_0 = 1$ sont respectivement connus sous les noms de jauges de Landau et de Feynman. Pour obtenir l'ordre le plus bas de la théorie des perturbations, il faut prendre $\Pi = 0$, $\Gamma_\nu(y; z_1, z_2) = \gamma_\nu\, \delta^4(y - z_1)\, \delta^4(y - z_2)$ et $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0) S(x, y) = \delta^4(x - y)$.

La figure 4.1 donne la représentation des équations (4.12) et (4.13) sous forme de diagrammes : les cercles pleins représentent les fonctions de Green connectées complètes et les cercles vides les fonctions de Green connectées irréductibles à une particule (introduites à l'équation (4.5)).
En procédant de manière analogue à ce qui vient d'être fait, on peut déduire les équations de Dyson-Schwinger pour la self-énergie du fermion et pour le vertex fermion-photon.
On définit la self-énergie du fermion, $\Sigma(p)$, comme suit :

$$S(p) = \frac{1}{\gamma^\mu p_\mu - m_0 - \Sigma(p)} \tag{4.15}$$

L'équation de D-S relative au propagateur fermionique prend alors la forme :

$$-i\, \Sigma(x, y) = e_0^2 \int d^4 z_1\, d^4 z_2\, \gamma_\mu D^{\mu\nu}(x, z_1) S(x, z_2) \Gamma_\nu(z_1; z_2, y) \tag{4.16}$$

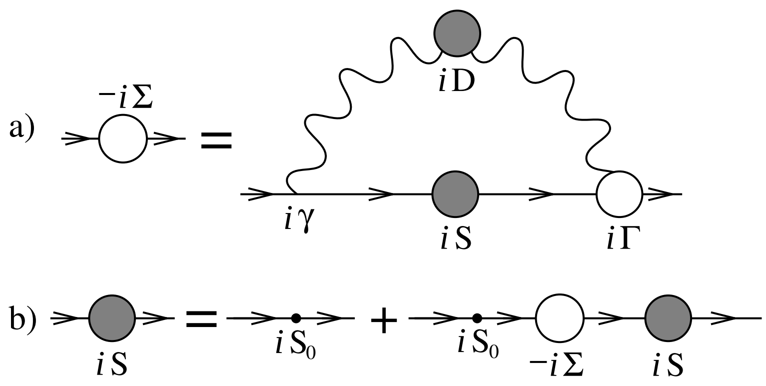


FIG. 4.2 – *Equations de Dyson-Schwinger pour la self-énergie et le propagateur de l'électron*

En espace de Fourier, cela donne :

$$-i\,\Sigma(p) = e_0^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4}\,(i\gamma_\mu)(iS(l))(iD^{\mu\nu}(p-l))(i\Gamma_\nu(l,p)) \tag{4.17}$$

Les équations (4.17) et (4.15) sont représentées à la figure 4.2.

Après calculs, on montre de même que la fonction de vertex vérifie l'équation suivante (en espace de Fourier) :

$$i\,\Gamma_\mu(p',p) = i\,\gamma_\mu + \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4}\,(iS(p'+l))(i\,\Gamma_\mu(p'+l,p+l))(iS(p+l))K(p+l,p'+l,l) \tag{4.18}$$

où K est le noyau de diffusion fermion-antifermion : c'est une fonction fermionique à quatre points.
La figure 4.3 donne la représentation sous forme de diagrammes de cette équation.

On voit que Γ_μ est couplé au propagateur fermionique et aussi à une amplitude de diffusion fermion-antifermion, notée M, et qui est une fonction à 4 points. A l'ordre le plus bas de la théorie des perturbations, on a :

$$M = K = e_0^2(i\gamma_\mu)(iD_0^{\mu\nu})(i\gamma_\nu)$$

où D_0 est le propagateur perturbatif du photon.

4.2 Les identités de Ward-Takahashi (WTI)

Les identités de Ward-Takahashi ont une importance considérable dans le cadre du formalisme de Dyson-Schwinger car elles relient les fonctions à n points aux fonctions à n+1 points : elles permettent ainsi d'établir des méthodes de fermeture des équations de Dyson-Schwinger (voir chapitre suivant)

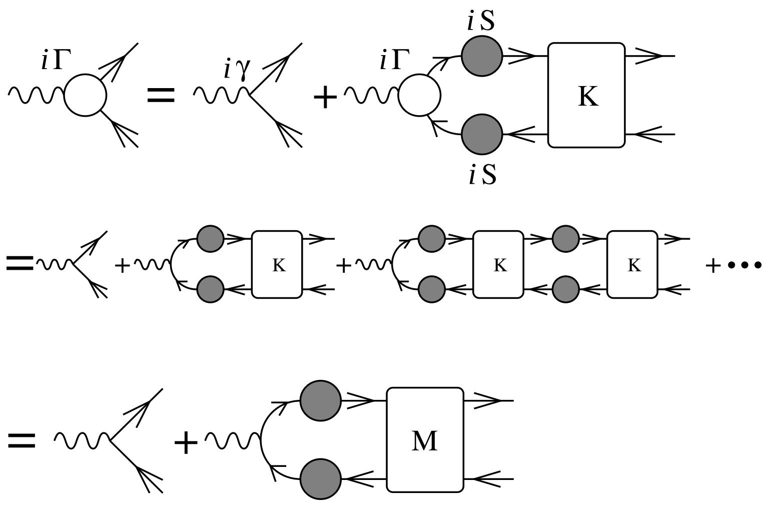


FIG. 4.3 – *Equation de Dyson-Schwinger pour la fonction à 3 points : le vertex électron-photon*

et leur sont donc complémentaires. Ces identités résultent de l'invariance du lagrangien sous une transformation de jauge globale, invariance qui se traduit par la conservation d'un courant et d'une charge (en QED, c'est la charge électrique). On peut déduire les différentes WTI par dérivations fonctionnelles de l'équation de conservation du courant, mais nous allons montrer qu'elles sont aussi des conséquences exactes des équations non perturbatives de Dyson-Schwinger établies précédemment.

Pour obtenir l'identité de Ward pour le tenseur de polarisation du photon, reprenons l'équation (4.4) et écrivons-la sous la forme suivante (en dérivant les deux membres par rapport à x^μ) :

$$\partial_\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu(x)} = \frac{1}{\xi_0}\partial^2\partial^\rho A_(x) + e_0\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) + \frac{\delta}{\delta\eta(x)}(i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)) \tag{4.19}$$

En dérivant fonctionnellement les deux membres de cette équation par rapport à $A_\nu(y)$, on obtient :

$$\partial_\mu\,(D^{-1})^{\mu\nu}(x,y) = \frac{1}{\xi_0}\partial^2\partial^\nu\,\delta^4(x-y) \tag{4.20}$$

En utilisant la relation (4.11), on trouve l'identité de Ward-Takahashi pour $\Pi^{\mu\nu}$:

$$\partial_\mu\Pi^{\mu\nu}(x,y) = 0 \tag{4.21}$$

ou encore, en espace de Fourier :

$$\Pi^{\mu\nu}(q)\,q_\nu = 0 \tag{4.22}$$

En suivant la même démarche, toujours basée sur les équations de Dyson-Schwinger relatives aux fonctions qui interviennent dans les identités recherchées, on peut obtenir toutes les autres WTI.
Les premières identités de Ward-Takahashi sont données ci-dessous :

$$-iq_\mu \Gamma^\mu(p+q,p) = S^{-1}(p+q) - S^{-1}(p) \tag{4.23}$$

$$p_1^\mu \Gamma_{\mu\nu\rho\sigma}(p_1,p_2,p_3,p_4) = p_2^\nu \Gamma_{\mu\nu\rho\sigma}(p_1,p_2,p_3,p_4) = ... = 0 \tag{4.24}$$

où $\Gamma_{\mu\nu\rho\sigma}(p_1,p_2,p_3,p_4)$ est la fonction 1-PI à quatre photons externes.
Ces identités qui expriment l'invariance de jauge de la théorie, devront être conservées lors de la procédure de renormalisation : cette contrainte essentielle aura des conséquences importantes (voir chapitre 5 : article [8]) et assurera notamment l'universalité de la constante de couplage (voir section suivante).

4.3 Renormalisation des équations

La renormalisation est un des chapitres les plus importants et en même temps les plus subtils de la théorie des champs; c'est pourquoi nous nous contenterons de donner ici les idées directrices de la renormalisation des équations de Dyson-Schwinger de l'électrodynamique quantique. La renormalisation répond au problème suivant : quand l'ordre de la théorie des perturbations s'élève, de nombreux diagrammes deviennent infinis et perdent donc, tels quels, toute signification physique. La renormalisation vise à extraire de ces infinis des valeurs finies pour les grandeurs physiques.
Pour ce faire, on réabsorbe les infinis dans les constantes de couplage du lagrangien. Celles-ci ne représentent pas des constantes physiques, mesurables expérimentalement : les constantes de couplage deviennent donc infinies (ou nulles), alors que les quantités physiques (sections efficaces, largeurs de désintégration, etc) demeurent finies. Avant de procéder à cette réabsorption, il faut d'abord rendre finies les quantités mesurables en ajoutant des termes de compensation au lagrangien : ce sont les *contre-termes*. La nature des contre-termes à ajouter est déterminée par le degré de divergence superficiel des diagrammes (calculé par comptage des puissances) et le calcul de ces diagrammes. A ce point de vue, l'électrodynamique quantique est particulière, car le degré de divergence, et donc le nombre de contre-termes à ajouter, ne dépend pas de l'ordre de la théorie des perturbations : c'est une propriété générale, à 4 dimensions, des théories dont les constantes de couplage sont sans dimension.
Les théories pour lesquelles le nombre de contre-termes est fini sont dites *renormalisables*; en particulier, si le nombre de contre-termes diminue avec

l'ordre, la théorie est *super-renormalisable*. Enfin, si le nombre de contre-termes augmente avec l'ordre, la théorie est *non-renormalisable*. Le calcul des diagrammes divergents requiert l'emploi de méthodes de régularisation pour pouvoir calculer explicitement les intégrales et faire apparaître et séparer les termes finis et infinis; les méthodes les plus souvent employées sont les suivantes :

1. Régularisation par coupure : elle consiste à remplacer des intégrales divergentes du type $\int_0^\infty f(q)\,dq$ par $\lim_{\Lambda\to\infty}\int_0^\Lambda f(q)\,dq$. Cette méthode engendre des difficultés de calcul parce qu'elle brise les invariances de jauge et par translation.
2. Régularisation de Pauli-Villars : pour éliminer les divergences, on introduit des fermions fictifs de grande masse ainsi qu'un photon virtuel également très massif. On fait ensuite disparaître les contributions fictives en faisant tendre la masse de ces "particules" vers l'infini. Comme la précédente, cette méthode brise l'invariance de jauge à cause de l'introduction du boson vectoriel massif.
3. Régularisation dimensionnelle : on calcule les intégrales dans un espace de dimension d telle qu'elles convergent; on prolonge ensuite analytiquement le résultat dans le plan complexe de la dimension. L'expression obtenue présente alors des pôles pour $d = 4$ qui contiennent les divergences de l'intégrale de départ.

Bien qu'elles soient non perturbatives, les équations de Dyson-Schwinger doivent aussi être renormalisées, car les quantités qui apparaissent dans les deux membres de ces équations sont infinies. Pour obtenir des équations finies, on ajoute les contre-termes nécessaires au lagrangien et on reprend ensuite la procédure de dérivation décrite à la section précédente.
A ce stade, il est intéressant d'introduire un indice supplémentaire sur toutes les quantités relatives aux fermions (m_0, e_0, ψ, $\bar{\psi}$, η, $\bar{\eta}$ et K deviennent m_0^f, e_0^f, ψ^f, $\bar{\psi}^f$, η^f, $\bar{\eta}^f$ et $K^{ff'}$) : cet indice de saveur permet de faire intervenir plusieurs types de fermions.
Il est possible de montrer (cfr. [10]) que les constantes infinies qui renormalisent QED sont les suivantes :

1. La constante de renormalisation de la fonction d'onde fermionique, Z_2, qui relie le champ fermionique "nu", ψ_0, (celui qu'on a rencontré jusqu'à présent) et le champ fermionique renormalisé, ψ : $\psi_0^f = \sqrt{Z_2^f}\psi^f$
2. La constante de renormalisation de la fonction d'onde du photon, Z_3 : $A_0^\mu = \sqrt{Z_3}A^\mu$
3. La constante de renormalisation du vertex, Z_1, qui lie la charge nue e_0 à la charge renormalisée, e : $e_0^f = \frac{Z_1^f}{Z_2^f\sqrt{Z_3}}e^f$.

Comme signalé précédemment, la procédure de renormalisation doit conserver les identités de Ward-Takahashi; on peut alors montrer que l'identité

(4.23) implique que :

$$Z_1^f = Z_2^f \tag{4.25}$$

Cette égalité assure, en vertu des relations précédentes, l'universalité de la charge électrique puisque le facteur de renormalisation de celle-ci est indépendant du type de fermion considéré et ne dépend que de Z_3.

L'action renormalisée, $\tilde{S}_\xi[\bar{\psi}, \psi, A^\mu]$, s'obtient, grâce aux relations précédentes, en exprimant les différentes quantités nues en fonction de leurs versions renormalisées :

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_\xi[\bar{\psi}, \psi, A^\mu] &= \int d^4x \, \left[\sum_f \left[Z_2^f \bar{\psi}^f (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_0^f)\psi^f + Z_1^f e^f \bar{\psi}^f \gamma_\mu A^\mu \right] \right. \\
&\left. - \frac{Z_3}{4} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{Z_3}{2\xi_0}(\partial_\mu A^\mu)^2 \right] = \int d^4x \, \left[\sum_f \bar{\psi}^f (i\gamma_\mu \partial^\mu - m^f + e^f \gamma_\mu A^\mu)\psi^f \right. \\
&- \frac{1}{4} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \sum_f \left[(Z_2^f - 1)\bar{\psi}^f i\gamma_\mu \partial^\mu \psi^f - \delta m^f \bar{\psi}^f \psi^f \right. \\
&\left. \left. + \delta e^f \bar{\psi}^f \gamma_\mu A^\mu \psi^f \right] - \frac{Z_3 - 1}{4} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \right]
\end{aligned} \tag{4.26}$$

où $\delta m^f = Z_2^f m_0^f - m^f$ et $\delta e^f = (Z_1^f - 1)e^f$.
Les masses et charges renormalisées (c'est-à-dire physiques) sont respectivement m^f et e^f, alors que $\xi = \xi_0 / Z_3$ est le paramètre de jauge renormalisé.
L'action renormalisée permet d'obtenir les fonctionnelles génératrices renormalisées $\tilde{Z}$, $\tilde{G}$, et $\tilde{\Gamma}$; ces fonctionnelles conduisent aux fonctions de Green renormalisées $\tilde{D}^{\mu\nu}$, $\tilde{S}^f$, $\tilde{K}^{ff'}$, etc.
Les constantes Z intervenant dans les contre-termes ne sont pas encore complètement déterminées, même après avoir rendu finies les équations de Dyson-Schwinger : les termes finis qui seront extraits de ces équations infinies (et donc les constantes Z) ne seront fixés qu'en choisissant *le schéma de renormalisation*. Plusieurs schémas de renormalisation sont possibles; nous choisirons ici le schéma de renormalisation sur la couche de masse, qui se traduit par les conditions aux limites suivantes :

$$(\tilde{S}^f)^{-1}(p)\Big|_{p^2=(m^f)^2} \equiv \gamma_\mu p^\mu - m^f \quad , \quad \tilde{\Gamma}^{f\mu}(p,p)\Big|_{\gamma_\mu p^\mu = m^f} \equiv \gamma^\mu$$

$$\text{et} \qquad \tilde{\Pi}(0) = 0 \tag{4.27}$$

avec, comme pour les grandeurs non renormalisées :

$$(\tilde{S}^f)^{-1}(p) = \gamma_\mu p^\mu - m^f - \tilde{\Sigma}^f(p)$$

$$\tilde{D}^{\mu\nu}(q) = \frac{-g^{\mu\nu} + (q^\mu \, q^\nu / (q^2 + i\epsilon))}{q^2 + i\epsilon} \, \frac{1}{1 + \tilde{\Pi}(q^2)} - \xi \frac{q^\mu \, q^\nu}{(q^2 + i\epsilon)^2} \tag{4.28}$$

La première des conditions de (4.27) impose que le propagateur d'un fermion ait un pôle en sa masse physique (m^f). La seconde condition stipule que la charge mesurée lors de l'interaction d'un fermion sur sa couche de masse et d'un photon dont l'impulsion tend vers zéro (interaction à longue distance) est bien la charge physique du fermion. La dernière condition impose au photon de garder une masse nulle (pôle du propagateur en $p^2 = 0$) après les corrections de polarisation du vide; en fait, on peut montrer que cette condition découle de l'identité (4.22) et de l'équation (4.12).
En reprenant la procédure de dérivation de la section (4.1) à partir de l'action renormalisée, et en y intégrant les conditions aux limites que nous venons d'énoncer, on obtient les équations de Dyson-Schwinger renormalisées. Comme illustration, nous donnerons simplement l'équation de Dyson-Scwhinger renormalisée pour le propagateur du photon. L'équation (4.9) est remplacée par :

$$\tilde{\Gamma}_\mu(x; y, z) = \frac{\delta}{\delta A^\mu(x)} \left. \frac{\delta^2 \tilde{\Gamma}}{\delta \bar{\psi}(y) \delta \psi(z)} \right|_{0=A_\mu=\psi=\bar{\psi}} \tag{4.29}$$

La forme renormalisée de (4.11) est :

$$(\tilde{D}^{-1})^{\mu\nu}(x, y) = Z_3 \left[\partial^\rho \partial_\rho \, g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu\right] \; \delta^4(x - y) + \frac{1}{\xi} \partial^\mu \partial^\nu \delta^4(x - y) + \Pi'_{\mu\nu}(x, y) \tag{4.30}$$

où $\Pi'_{\mu\nu}(x, y)$ est défini par :

$$\Pi'_{\mu\nu}(x, y) = i \sum_f Z_1^f (e^f)^2 \int d^4 z_1 \; d^4 z_2 \; tr \left[\gamma_\mu \, \tilde{S}^f(x, z_1) \, \tilde{\Gamma}_\nu(y; z_1, z_2) \, \tilde{S}^f(z_2, x)\right] \tag{4.31}$$

La relation entre $\Pi'_{\mu\nu}$ et $\Pi_{\mu\nu}$ est la suivante :

$$i\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(q) = i(-g_{\mu\nu} q^2 + q_\mu q_\nu) \tilde{\Pi}(q^2) = i(-g_{\mu\nu} q^2 + q_\mu q_\nu)[\Pi'(q^2) - \Pi'(0)] \tag{4.32}$$

avec $\Pi'_{\mu\nu}(q) = (-g_{\mu\nu} q^2 + q_\mu q_\nu) \Pi'(q^2)$.

On voit que, comme annoncé, l'identité (4.22) a été conservée lors de la renormalisation. Après la renormalisation, les équations de Dyson-Schwinger sont finies. On peut alors en rechercher les solutions et étudier le comportement de ces dernières.

4.4 L'approximation "rainbow"

L'approximation "rainbow" est couramment utilisée (voir [4]) et s'écrit

$$\Gamma_\mu(p, q) = \gamma_\mu \tag{4.33}$$

Si on la combine avec l'approximation "quenched" (qui consiste à imposer $\Pi(q^2) = 0$, c'est-à-dire à négliger les boucles fermioniques dans la polarisation du vide), cela provoque le découplage de l'équation (4.17) des autres équations de Dyson-Schwinger. Il est alors possible d'étudier cette équation isolément. Ceci constitue l'avantage principal de cette approximation qui pose par ailleurs certains problèmes : elle implique la perte de l'invariance de jauge (l'identité de Ward (4.23) est violée) et elle génère un propagateur fermionique dont la structure analytique (singularités) n'a plus de sens physique. Cette approximation conduit à l'équation intégro-différentielle suivante (pour plus de simplicité, on utilise ici les équations non renormalisées en jauge de Feynman) :

$$-i\Sigma(p) = e_0^2 \int d^4l \; (i\gamma_\mu) \, \frac{1}{\gamma_\mu p^\mu - m_0 - \Sigma(p)} \, \frac{g^{\mu\nu}}{(p-l)^2 + i\epsilon} \, (i\gamma_\nu) \tag{4.34}$$

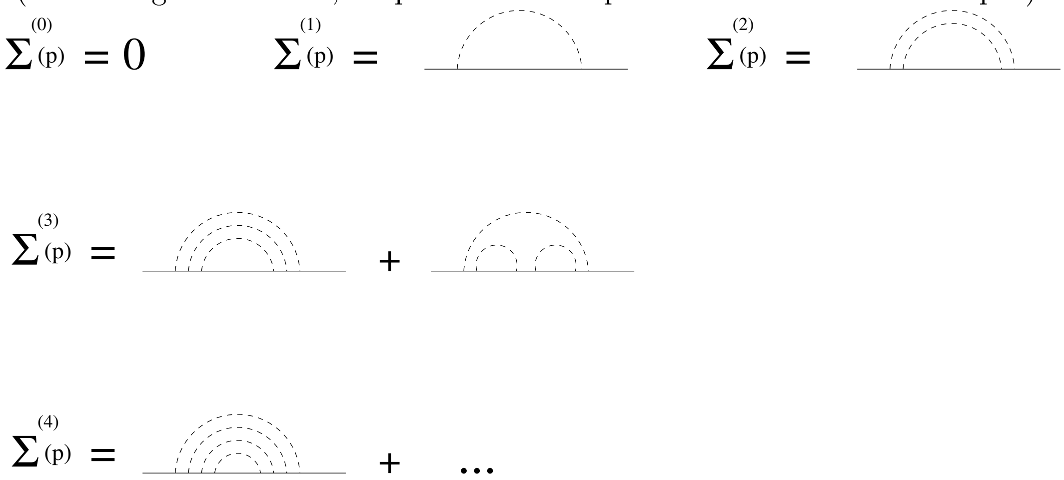
On peut résoudre cette équation par itérations : on prend $\Sigma^{(0)}(p) = 0$ et, à chaque étape, on résoud l'équation suivante :

$$\begin{aligned} -i\Sigma^{(n)}(p) = e_0^2 \int d^4l \; (i\gamma_\mu) \, \frac{1}{\gamma_\mu p^\mu - m_0 - \Sigma^{(n-1)}(p)} \, \frac{g^{\mu\nu}}{(p-l)^2 + i\epsilon} \, (i\gamma_\nu) \\ + i\Sigma^{(n-1)}(p) \end{aligned} \tag{4.35}$$

On a alors :

$$\Sigma(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \Sigma^{(n)}(p) \tag{4.36}$$

Chaque terme $\Sigma^{(n)}(p)$ ainsi obtenu est d'ordre n en α ($\alpha = \frac{e_0^2}{4\pi}$).
L'intérêt majeur de la résolution de l'équation (4.34) réside dans la représentation sous forme de diagrammes de Feynman à laquelle elle donne lieu (dans la figure suivante, les photons sont représentés en traits interrompus) :



La forme de ces diagrammes explique le nom de "rainbow approximation".

L'intérêt du formalisme de Dyson-Schwinger en QED réside principalement dans l'étude du pôle de Landau. Lorsqu'on effectue la renormalisation en théorie des perturbations, on constate que la constante de couplage devient infinie pour une valeur très grande de l'impulsion : c'est le pôle de Landau (noté Λ_{QED}). Il semble que cette singularité provienne de la théorie des perturbations en elle-même, car elle n'apparaît pas dans le formalisme non perturbatif. L'approximation "rainbow" permet, en injectant des éléments perturbatifs dans les équations exactes, de rechercher l'origine de ce pôle .

Chapitre 5

La chromodynamique quantique (QCD)

5.1 Introduction

La chromodynamique quantique, ou théorie des interactions fortes, est une théorie de jauge non abélienne dont le lagrangien est invariant sous les transformations du groupe $SU(3)$ (voir [11]).
On construit le lagrangien de QCD de la même façon que celui de QED : on suppose que les champs fermioniques réalisent des représentations irréductibles de $SU(3)$. Le lagrangien est alors invariant sous une transformation de jauge globale; et pour le rendre invariant sous une transformation locale (transformation de $SU(3)$ dont le paramètre est local), il faut introduire un champ de jauge qui est couplé au champ fermionique. On ajoute ensuite le terme (invariant de jauge) correspondant à l'énergie cinétique du champ de jauge ($-\frac{1}{4}\, F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ en QED). Le lagrangien de QCD est donc le suivant :

$$\mathcal{L} = \sum_f \bar{\psi}_b^f (i\gamma_\mu D^\mu_{bc} - m_0^f\, \delta_{bc})\psi_c^f - \frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu\, a} \tag{5.1}$$

avec

$$F_a^{\mu\nu} = \partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu + g_0 f_{abc} A_b^\mu A_c^\nu \tag{5.2}$$

$$D^\mu_{bc} = \partial^\mu\, \delta_{bc} - i g_0\, (A_a^\mu t_a)_{bc} \tag{5.3}$$

Les champs A_a^μ sont les champs gluoniques et ψ^f les champs des quarks (f est l'indice de saveur des quarks); les indices latins ($a = 1, ..., 8$) sont les indices de couleur et la répétition de ces indices implique leur sommation. Les opérateurs t_a, qui interviennent dans la dérivée covariante, sont les générateurs du groupe $SU(3)$ et les constantes f_{abc} sont les constantes de structure ($[t_a, t_b] = f_{abc}\, t_c$). Dans la représentation fondamentale de $SU(3)$, les matrices 3×3 représentant les générateurs sont données par les 8 matrices hermitiennes

λ_a de Gell-Mann ($t_a = \lambda_a/2$) (voir [12]).
Il est parfois utile de se placer dans la représentation adjointe de $SU(3)$, qui est de dimension 8, car les éléments de matrice des génerateurs y sont donnés par les constantes de structure ($(\mathrm{t}_c)_{ab} = if_{cba}$); la dérivée covariante s'écrit alors :

$$D_{\mu ab} = \partial_\mu \delta_{ab} + g_0 f_{abc} A_{\mu c} \tag{5.4}$$

Le caractère non abélien de la chromodynamique quantique implique que les champs gluoniques interagissent avec eux-mêmes : on a ainsi des vertex à 3 et à 4 gluons. Cette nouveauté par rapport à QED donnera des termes supplémentaires impliquant ces vertex dans les équations de Dyson-Schwinger.

5.2 Les "ghosts"

Dans le lagrangien de QED (4.1), le dernier terme servait à fixer la jauge; en fait, en l'absence de celui-ci, la fonctionnelle génératrice Z (cfr. éq.(4.2)) serait divergente, car on intégrerait dans ce cas sur une infinité de configurations de champs équivalentes de jauge.
Le même problème se pose en QCD, mais la manière de le résoudre est plus compliquée : il ne suffit pas d'ajouter simplement au lagrangien un terme analogue à celui qui apparaissait dans l'équation (4.1). Le caractère non abélien de la théorie nous impose, en plus, d'introduire des champs (non physiques) scalaires et anticommutatifs $\bar{c}_a$ et c_a : ces champs sont appelés *ghosts de Faddeev-Popov*. Signalons toutefois que les ghosts n'interviennent pas en jauge axiale ($n.A = 0$).
Le lagrangien de QCD s'écrit en définitive :

$$\mathcal{L}_\xi = \sum_f \bar{\psi}_b^f (i\gamma_\mu D_{bc}^\mu - m_0^f \, \delta_{bc}) \psi_c^f - \frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu a} - \frac{1}{2\xi_0} (\partial^\mu A_{\mu a})^2$$
$$- \bar{c}_a (\delta_{ab} \, \partial^2 - g_0 f_{abe} \, \partial_\mu A_e^\mu) c_b \tag{5.5}$$

Les ghosts permettent aussi de restaurer l'unitarité de la théorie qui n'était pas assurée avec le lagrangien (5.1) : ils se comportent comme des "degrés de liberté négatifs" qui éliminent les effets des états non physiques des gluons que sont les polarisations longitudinales et temporelles.
Comme on peut le voir dans le lagrangien (5.5), les ghosts sont couplés aux gluons : on a donc un vertex avec un gluon et deux ghosts.

5.3 Passage en espace euclidien, rotation de Wick

Très souvent, on passe de l'espace de Minkowski à un espace euclidien pour pouvoir calculer les intégrales en utilisant des coordonnées sphériques

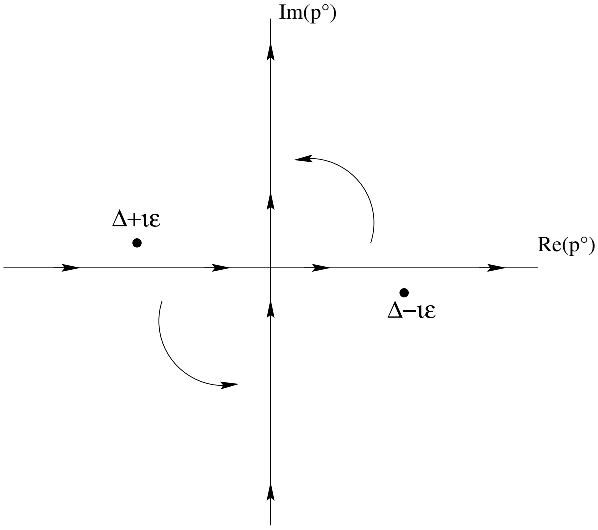


FIG. 5.1 – *Rotation de Wick*

généralisées.
Pour fixer les idées, considérons l'intégrale suivante :

$$\int d^4p \, \frac{f(p)}{(p^0)^2 - \Delta + i\epsilon} \tag{5.6}$$

où $f(p)$ est dépourvue de pôles.
Initialement, le contour d'intégration utilisé pour calculer l'intégrale sur p^0 est le suivant : on intègre sur l'axe réel et on ferme le contour par un demi-cercle dont la contribution est nulle. Or la causalité implique que les amplitudes soient des fonctions analytiques qui peuvent être continuées pour des valeurs complexes de p^0. Pour passer en espace euclidien, on fait tourner le contour d'intégration de 90° (voir figure 5.1) de manière à ne pas rencontrer de pôle (donc sans changer la valeur de l'intégrale) : on obtient ainsi un nouveau contour d'intégration dans lequel on intègre sur l'axe imaginaire. Cette rotation de Wick s'effectue en définissant une variable euclidienne p_E :

$$p^0 = ip_E^0 \quad et \;\; \vec{p} = \vec{p}_E \tag{5.7}$$

L'intégrale (5.6) devient alors :

$$-i \int d^4p_E \, \frac{f(p(p_E))}{(p_E^0)^2 + \Delta - i\epsilon} = -i \int d\Omega_4 \int_0^\infty dp_E \, \frac{f(p(p_E))}{(p_E^0)^2 + \Delta - i\epsilon} \tag{5.8}$$

où Ω_4 est l'angle solide à 4 dimensions.

Pour que cette transformation soit possible, il faut que la fonction à intégrer n'ait pas de singularités dans la région où s'effectue la rotation de Wick. Malheureusement, dans certains cas, notamment dans la résolution d'équations intégro-différentielles, on ne connaît pas à priori la structure analytique de cette fonction; il faut donc être très prudent et rejeter toute solution qui présenterait des singularités mal placées. Ce problème survient notamment dans l'article [13] où les auteurs obtiennent un propagateur avec des pôles dans la région parcourue en effectuant la rotation de Wick.

5.4 Les équations de Dyson-Schwinger de QCD

En suivant exactement la même procédure de dérivation qu'au chapitre précédent, mais avec le lagrangien (5.5), on obtient les équations de Dyson-Schwinger de QCD (voir [4], [8], [9] et [14]). Comme nous l'avons vu, les deux différences majeures par rapport à QED, sont la présence de vertex à 3 et 4 gluons ainsi que l'intervention des ghosts qui se couplent aux gluons.
La figure 5.2 donne les représentations sous forme de diagrammes des équations obtenues (les ghosts sont représentés en traits interrompus et les quarks en traits pleins). Comme précédemment, les cercles pleins représentent les propagateurs complets tandis que les cercles vides désignent les vertex irréductibles à une particule; notons cependant une petite différence de convention par rapport au chapitre précédent : les membres de gauche des équations représentées à la figure 5.2 sont les inverses des propagateurs exacts (fonction de Green 1-PI à 2 points) alors que le membre de gauche de l'équation a) de la figure 4.1 (tenseur de polarisation du photon $\Pi^{\mu\nu}$) correspond à la différence des inverses des propagateurs photoniques exacts et perturbatifs. La figure 5.3 représente l'équation de Dyson-Schwinger pour le vertex quark-gluon.

5.5 L'approche de Baker, Ball et Zachariasen

5.5.1 Introduction

L'article de Baker, Ball et Zachariasen (voir [8] et [9]) est paru en 1981; il traite d'un calcul non perturbatif de la limite infrarouge du propagateur du gluon en jauge axiale ($n_\mu A^a_\mu(x) = 0$), dans une théorie de Yang-Mills pure (c'est-à-dire sans champs fermioniques). Cet article peut être considéré comme l'archétype des publications sur les équations couplées de Dyson-Schwinger en QCD : on retrouvera les méthodes développées ici dans tous les travaux postérieurs (voir [13] à [17]). Cette approche présente en outre l'intérêt de ne pas briser l'invariance de jauge : à chaque ordre, on garde la conservation du courant. Notons aussi que les auteurs travaillent en espace euclidien.
La structure de cet article est la suivante : les auteurs commencent par la dérivation de l'équation de D-S pour le tenseur de polarisation du gluon et de la relation qui lie ce dernier au propagateur gluonique; ensuite, ils posent pour le propagateur du gluon un ansatz tel que les singularités infrarouges

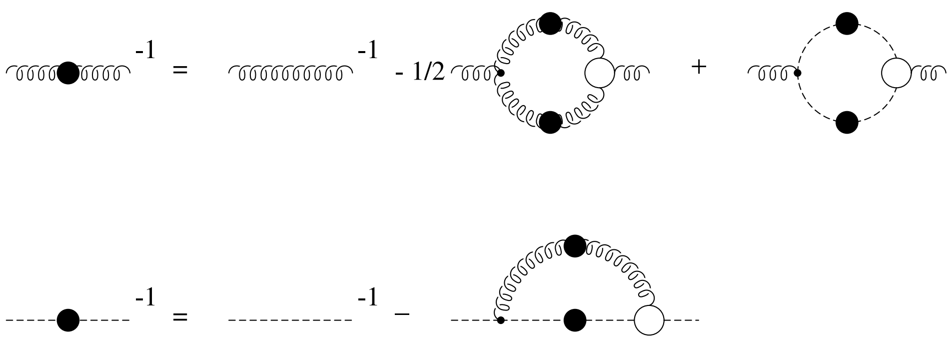


FIG. 5.2 – *Equations de Dyson-Schwinger pour les inverses des propagateurs du gluon, du ghost et du quark*

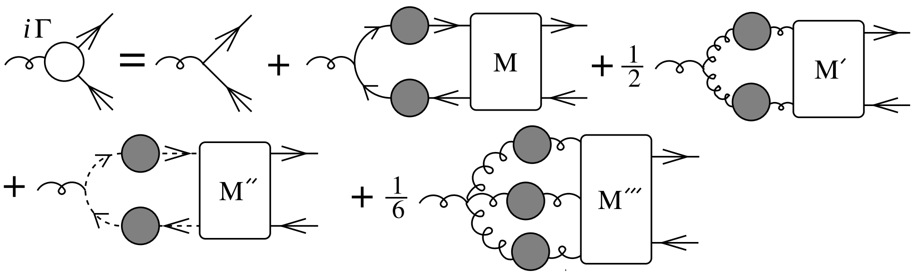


FIG. 5.3 – *Equation de Dyson-Schwinger pour le vertex quark-gluon*

ne soient présentes que dans une des deux fonctions scalaires indépendantes constitutives de ce propagateur. Il en résulte une équation scalaire unique impliquant le vertex à 3 gluons. En utilisant l'identité de Ward, on exprime la partie longitudinale du vertex à 3 gluons en fonction du propagateur. Vient ensuite l'hypothèse centrale : les auteurs supposent que la partie transverse du vertex à 3 gluons ne fournit pas de contribution dominante aux singularités infrarouges du propagateur : on remplace donc le vertex par sa partie longitudinale. Enfin, on renormalise l'équation de D-S (renormalisation de la masse et de la charge) et on recherche les types de propagateurs dont le comportement IR serait consistant avec cette équation : ceci conduit à un propagateur en $1/k^4$.

5.5.2 Dérivation de l'équation de D-S pour le tenseur de polarisation du gluon en jauge axiale

L'action de Yang-Mills en présence d'une source externe $J_\mu^a(x)$ est donnée par :

$$S(A) = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a(x) F_{\mu\nu}^a(x) - J_\mu^a(x) A_\mu^a(x) \right] \tag{5.9}$$

Comme signalé dans la section précédente, la jauge axiale offre l'avantage de ne pas faire intervenir les ghosts; son désavantage principal est l'introduction de singularités non physiques.
Les fonctions de Green sont données par les moyennes fonctionnelles suivantes dans lesquelles nous introduisons la même notation qu'au chapitre 3 (voir équation (3.24) :

$$\left\langle A_{\mu_1}^{a_1}(x_1)...A_{\mu_n}^{a_n}(x_n) \right\rangle = \frac{1}{Z} \int DA_\mu \, \delta(n.A) \, e^{iS} A_{\mu_1}^{a_1}(x_1)...A_{\mu_n}^{a_n}(x_n) \tag{5.10}$$

avec

$$Z = \int DA_\mu \, \delta(n.A) \, e^{iS} \tag{5.11}$$

Le propagateur du gluon est défini par (voir équation (3.15)) :

$$\Delta_{\mu\nu}^{ab}(x,y) = \frac{\delta \langle A_\lambda^a(x) \rangle}{\delta(-iJ_\mu^b(y))} = \frac{1}{Z} \frac{\delta^2 Z}{\delta(-iJ_\lambda^a(x))\delta(-iJ_\mu^b(y))} \Bigg|_{J=0} \tag{5.12}$$

On peut imposer la jauge axiale en introduisant un nouveau champ $C^a(x)$ dans l'action par l'équation :

$$\delta(n.A) = \int DC^a \, e^{-iC^a(n.A^a(x))} \tag{5.13}$$

En couplant ce champ à une source auxiliaire K, on obtient la fonctionnelle génératrice suivante :

$$Z(J,K) = \int DA_\mu^a \int DC^a \, e^{iS - iC^a(n.A + K^a)} \tag{5.14}$$

En faisant varier les champs C^a et A^a_μ dans la fonctionnelle génératrice, on établit les équations de mouvement :

$$n_\mu \left\langle A^a_\mu(x) \right\rangle = -K^a(x) \tag{5.15}$$

et

$$-\left\langle D^{ab}_\mu F^a_{\lambda\mu} \right\rangle = J^b_\lambda + \left\langle C^b \right\rangle n_\lambda \tag{5.16}$$

A la fin des calculs, on fixe K à zéro et l'équation (5.15) se réduit simplement à la condition de jauge. L'équation (5.16) présente plus d'intérêt car elle va nous mener à l'équation de D-S pour le tenseur de polarisation du gluon. L'inverse du propagateur du gluon $\Pi^{ak}_{\lambda\kappa}(x, v, A)$ s'écrit :

$$\Pi^{ak}_{\lambda\kappa}(x, v, A) = -i \left. \frac{\delta J^a_\lambda(x)}{\delta A^k_\kappa(v)} \right|_{C^a(x)} \tag{5.17}$$

On définit maintenant le tenseur de polarisation du gluon $\Pi^{ab}_{\lambda\kappa}(x, v)$:

$$\left. \Pi^{ak}_{\lambda\kappa}(x, v, A) \right|_{A=0} = -i(\delta_{\lambda\kappa}\partial^2 - \partial_\lambda\partial_\kappa)\delta^{ab}\delta^{(4)}(x - v) - \Pi^{ab}_{\lambda\kappa}(x, v) \tag{5.18}$$

A partir de l'équation de mouvement (5.16) et des deux dernières relations, on tire finalement l'équation de Dyson-Schwinger pour $\Pi^{ab}_{\lambda\kappa}(x, v)$ (implicitement, on intègre sur les variables répétées) :

$$\begin{aligned} \Pi^{ab}_{\lambda\kappa}(x, v) = & -\frac{1}{2} ig\Gamma^{(0)abc}_{\lambda\mu\nu}(x, y, z) \frac{\delta}{\delta A^k_\kappa(v)} \left. \Delta^{bc}_{\mu\nu}(y, z) \right|_{A=0} \\ & -\frac{1}{2} ig^2 \Gamma^{(0)akcd}_{4\lambda\kappa\nu\sigma}(x, v, z, w) \left. \Delta^{cd}_{\nu\sigma}(z, w) \right|_{A=0} \\ & -\frac{ig^2}{3!} \Gamma^{(0)abcd}_{4\lambda\mu\nu\sigma}(x, y, z, w) \frac{\delta}{\delta A^k_\kappa(v)} \left. \frac{\delta \Delta^{bc}_{\mu\nu}(y, z)}{\delta(-iJ^d_\sigma(w))} \right|_{A=0} \end{aligned} \tag{5.19}$$

Dans cette dernière équation, $\Gamma^{(0)abc}_{\lambda\mu\nu}(x, y, z)$ et $\Gamma^{(0)abcd}_{4\lambda\mu\nu\sigma}(x, y, z, w)$ sont respectivement les vertex perturbatifs à 3 et 4 gluons donnés par :

$$\begin{aligned} \Gamma^{(0)abc}_{\lambda\mu\nu}(x, y, z) = f^{abc} \Bigg[& \delta_{\mu\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial y_\nu} - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) \delta^{(4)}(x - z)\delta^{(4)}(y - z) \\ & + \delta_{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial z_\lambda} - \frac{\partial}{\partial y_\lambda} \right) \delta^{(4)}(x - y)\delta^{(4)}(x - z) \\ & + \delta_{\nu\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{\partial}{\partial z_\mu} \right) \delta^{(4)}(x - y)\delta^{(4)}(y - z) \Bigg] \end{aligned} \tag{5.20}$$

et

$$\begin{aligned} \Gamma^{(0)abcd}_{4\lambda\mu\nu\sigma}(x, y, z, w) \;=\; & [f^{abe}f^{cde}(\delta_{\lambda\nu}\delta_{\mu\sigma} - \delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma}) + f^{bce}f^{dae}(\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda} - \delta_{\nu\sigma}\delta_{\mu\lambda}) \\ & + f^{bde}f^{cae}(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma} - \delta_{\sigma\nu}\delta_{\mu\lambda})] \; \delta^{(4)}(x - y) \; \delta^{(4)}(z - w) \\ & \times \delta^{(4)}(y - z) \end{aligned} \tag{5.21}$$

De la même manière que pour $\Pi^{ab}_{\lambda\kappa}(x,v)$, on définit la fonction de Green 1-PI suivante qui est le vertex non perturbatif à 3 gluons :

$$g\,\Gamma^{abc}_{\mu\nu\sigma}(x,y,z) = -i\,\frac{\delta\Pi^{ab}_{\mu\nu}(x,y)}{\delta A^c_\sigma(z)}\bigg|_{A=0} \tag{5.22}$$

En dérivant fonctionnellemnt l'équation (5.19) par rapport à A, on peut obtenir l'équation de D-S pour Γ : cette équation couple Γ à des fonctions à 4 et 5 points (Γ_4 et Γ_5,cfr. figure 5.3). Comme $\delta\Delta/\delta A$ et $\delta^2\Delta/\delta A\delta J$ peuvent être exprimées en fonction de Δ et des vertex non perturbatifs Γ et Γ_4, l'équation de Dyson-Schwinger (5.19) relie Π (qui est essentiellement l'inverse de Δ) à Δ, Γ et Γ_4. De manière générale, les équations de Dyson-Schwinger constituent un système infini d'équations intégro-différentielles couplées où chaque équation relie une fonction de Green Γ_n aux fonctions Γ_{n+1} et Γ_{n+2}. Il faudra donc trouver une procédure systématique de fermeture de ces équations qui permette de les résoudre et d'étudier le comportement infrarouge de la théorie.
Il faut maintenant compléter l'équation (5.19) par une équation qui lie Π et Δ; en jauge axiale, il résulte de (5.17) :

$$\Pi^{ak}_{\lambda\kappa}(x,v)\,\Delta^{kb}_{\kappa\mu}(v,y) = \left(\delta_{\lambda\mu} - \frac{n_\lambda\partial_\mu}{n.\partial}\right)\delta^{ab}\,\delta^{(4)}(x-y) \tag{5.23}$$

5.5.3 Fermeture des équations et identités de Slavnov-Taylor (STI)

Comme en QED, les solutions des équations de Dyson-Schwinger devront conserver l'invariance de jauge. L'invariance de jauge implique une série d'identités qui lient les fonctions à n points aux fonctions à n+1 points : ce sont *les identités de Slavnov-Taylor* (qui correspondent en QCD aux identités de Ward-Takahashi de QED). On peut dériver facilement ces identités à partir de l'équation de conservation du courant gluonique, qui est une conséquence de l'invariance de jauge :

$$\partial_\kappa J^k_\kappa(v) + g f^{kpq} A^p_\kappa(v) J^q_\kappa(v) = 0 \tag{5.24}$$

où J^k_κ désigne le courant total $J^k_\kappa + n_\kappa C^k$.
En dérivant l'équation (5.24) par rapport à $A^a_\lambda(x)$, on a :

$$\frac{\partial}{\partial v_k}\Pi^{ak}_{\lambda\kappa}(x,v) + g f^{kpq} A^p_\kappa(v)\Pi^{aq}_{\lambda\kappa}(x,v) = ig f^{kaq} J^q_\lambda(x)\delta^{(4)}(x-v) \tag{5.25}$$

Les STI pour $\Gamma_3, ..., \Gamma_n$ s'obtiennent en dérivant $1, ..., n-2$ fois l'équation précédente par rapport à A, et en annulant ensuite A dans l'équation résultante. Pour l'inverse du propagateur du gluon, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial v_k}\Pi^{ak}_{\lambda\kappa}(x,v,A)\bigg|_{A=0} = 0 \tag{5.26}$$

De la même manière, on peut aussi établir les STI pour les amplitudes $\delta\Delta/\delta A$ et $\delta^2\Delta/\delta A\delta J$.
Signalons en premier lieu que ces identités permettront de voir quelles approximations seront cohérentes avec l'invariance de jauge : si, par exemple, on cherche à résoudre l'équation de Dyson-Schwinger (5.19) de manière à obtenir une solution (approchée) pour Π vérifiant l'identité (5.26), il faut prendre, pour les amplitudes $\delta\Delta/\delta A$ et $\delta^2\Delta/\delta A\delta J$, des expressions qui satisfont les STI correspondant à ces amplitudes. De manière générale, si on utilise, dans l'équation de Dyson-Schwinger pour la fonction à n points Γ_n, des vertex Γ_{n+1} et Γ_{n+2} vérifiant les identités STI, l'expression de Γ_n qui en découlera, vérifiera automatiquement l'identité de Slavnov-Taylor qui lui correspond.
Le procédé de fermeture des équations de Dyson-Schwinger se fonde sur une deuxième remarque importante (qui est spécifique à la jauge axiale) : dans l'équation de D-S (5.19) pour Π, on peut toujours éliminer le terme impliquant $\delta\Delta/\delta J$ en projetant les deux membres de l'équation sur n_μ, tout en gardant une expression de Π qui vérifie l'équation (5.26). Plus généralement, on peut toujours éliminer Γ_{n+2} dans l'équation de D-S pour Γ_n, sans violer la conservation du courant (pourvu que l'expression de Γ_{n+1} vérifie l'identité STI qui lui correspond) : notons $\Gamma_n = F'_n(\Gamma_{n+1})$ la relation résultant de cette élimination.

Nous pouvons maintenant donner la procédure systématique de fermeture (telle qu'à chaque étape, les STI sont satisfaites) des équations de D-S dans le cadre de l'étude du comportement à longue distance (limite infrarouge) de la théorie. A longue distance, c'est-à-dire quand la séparation relative entre deux coordonnées quelconques des fonctions à n points est grande, une simplification survient : l'identité STI pour Γ_{n+1} permet, grâce à la condition de symétrie de Bose et en supposant l'absence de singularités cinématiques, d'exprimer Γ_{n+1} en terme de Γ_n (nous noterons cette approximation à longue distance $\Gamma_{n+1}(\Gamma_n)$). A la première étape du procédé de fermeture, on remplace l'équation de Dyson

$$\Pi = F'_2(\Gamma_3) \tag{5.27}$$

par

$$\Pi = F'_2(\Gamma_3(\Pi)) \tag{5.28}$$

où $\Gamma_3(\Pi)$ est l'approximation à longue distance du vertex à 3 gluons en terme de Π. Comme $\Gamma_3(\Pi)$ est une solution exacte des identités STI, le membre de droite de (5.28) satisfait l'équation (5.26), vu ce qui a été dit plus haut. Les équations (5.26) et (5.28) constituent donc un système fermé d'équations pour Π (ou Δ) dont la solution satisfait la conservation du courant. Les étapes suivantes du procédé de fermeture se déroulent de façon analogue : à la $(n-1)^{ième}$ étape, on utilise l'approximation à longue distance $\Gamma_{n+1}(\Gamma_n)$ pour fermer le système d'équations. On a donc le système suivant d'équations couplées :

$$\Pi = F_2'(\Gamma_3), \quad \Gamma_3 = F_3'(\Gamma_4), \ ...$$
$$..., \ \Gamma_{n-1} = F_{n-1}'(\Gamma_n), \quad \Gamma_n = F_n'(\Gamma_{n-1}(\Gamma_n)) \tag{5.29}$$

Puisque $\Gamma_{n+1}(\Gamma_n)$ est une solution des identités STI, cela implique que l'expression de Γ_n, obtenue à l'aide de la dernière équation de (5.29), est aussi une solution des identités STI. En répétant cet argument, on conclut que le système d'équations couplées (5.29) produit des expressions de $\Pi, \Gamma_3, ..., \Gamma_n$ qui sont bien des solutions des identités de Slavnov-Taylor.

Une des caractéristiques intéressantes de cette procédure de fermeture est que l'approximation à longue distance ($\Gamma_{n+1}(\Gamma_n)$) sur laquelle elle repose devient de plus en plus fiable quand n augmente. En effet, pour que cette approximation soit valide, il faut que la distance relative entre deux coordonnées quelconques apparaissant dans Γ_{n+1} devienne grande; donc, quand n augmente, l'approximation est valide dans une région de l'espace des phases de plus en plus grande, par conservation de l'énergie.

5.5.4 Ansatz pour $\Pi_{\mu\nu}$ et hypothèse centrale

A partir de maintenant, nous nous placerons dans l'espace des impulsions et nous omettrons (sauf quand cela peut prêter à confusion) les indices de couleur. En espace des impulsions, l'équation (5.23) s'écrit comme suit ($\Pi_{\mu\nu}(q)$ désigne la transformée de Fourier de $\Pi_{\mu\nu}(x, v, A)|_{A=0}$) :

$$\Pi_{\mu\lambda}(q)\Delta_{\lambda\nu}(q) = \delta_{\mu\nu} - \frac{n_\mu q_\nu}{n.q} \tag{5.30}$$

L'équation de Dyson (5.19) s'écrit, quant à elle :

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu}(q) \quad = \quad & -q^2(\delta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu/q^2) \\
& + \frac{1}{2}g_0^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} i\Gamma^{(0)}_{\mu\lambda\lambda'}(q, -k, -k')\Delta_{\lambda\sigma}(k)\Delta_{\lambda'\sigma'}(k') i\Gamma_{\sigma\sigma'\nu}(k, k', -q) \\
& + \frac{1}{2}g_0^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} i\Gamma^{(0)}_{4\mu\nu\lambda\sigma}(q, k, -k, -q)\Delta_{\lambda\sigma}(k) \\
& + \textit{termes à } 4 \textit{ gluons}
\end{aligned} \tag{5.31}$$

où k et k' sont les impulsions entrantes du vertex à 3 gluons ($q = k + k'$). Le premier terme du membre de droite de l'équation précédente est l'inverse du propagateur libre. L'équation (5.31) est représentée par la première équation de la figure 5.2, amputée des deux derniers diagrammes du membre de droite (puisqu'il n'y a pas de ghosts en jauge axiale et qu'on ne considère pas les champs fermioniques dans cet article). Les termes à 4 gluons sont représentés par les quatrième et cinquième termes de la figure 5.2.

Une autre relation importante est l'identitié de Ward (identité STI pour le vertex à 3 gluons $\Gamma_{\sigma\sigma'\nu}$) :

$$i\Gamma_{\sigma\sigma'\nu}(k,k',-q)(-q)_\nu = \Pi_{\sigma\sigma'}(k) - \Pi_{\sigma\sigma'}(-k') \tag{5.32}$$

De plus, on a aussi l'identité (5.26) qui s'écrit :

$$\Pi_{\mu\nu}(q)q_\nu = 0 \tag{5.33}$$

A partir de l'équation de Dyson (5.31) et de l'identité précédente, on peut montrer que :

$$\Pi_{\mu\nu}(q) \to 0 \;\; si \;\; q_\lambda \to 0 \tag{5.34}$$

Cette dernière relation montre que le gluon n'a pas de masse; c'est-à-dire que sa masse reste nulle même quand on a tenu compte des corrections radiatives (ce qui est bien en accord avec l'invariance de jauge).
En général, $\Pi_{\mu\nu}$ et $\Delta_{\mu\nu}$ contiennent deux fonctions scalaires indépendantes qui dépendent chacune de deux variables : une de ces variables est le carré de l'impulsion et l'autre est une variable dépendant de la jauge et définie comme suit : $\gamma = q^2 n^2/(q.n)^2$.
A ce stade, et pour plus de simplicité, les auteurs posent un ansatz pour $\Delta_{\mu\nu}$, en supposant que les singularités infrarouges dominantes de $\Delta_{\mu\nu}$ se produisent uniquement dans une des deux fonctions scalaires (notée $Z(q^2)$), qui, en outre, est supposée ne dépendre que de q^2. On écrit donc, pour $q^2 \to 0$:

$$\Delta_{\mu\nu}(q) \to -\frac{Z(q^2)}{q^2}\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu n_\nu + n_\mu q_\nu}{q.n} + \frac{q_\mu q_\nu n^2}{(q.n)^2}\right) = Z(q^2)\Delta^{(0)}_{\mu\nu}(q) \tag{5.35}$$

Comme on peut le voir, cet ansatz revient à supposer que la limite infrarouge du propagateur a la même structure tensorielle que le propagateur libre $\Delta^{(0)}_{\mu\nu}$: cette supposition sera vérifiée par la suite.
L'expression de $\Pi_{\mu\nu}$ qui correspond à (5.35) est la suivante (pour $q^2 \to 0$) :

$$\Pi_{\mu\nu}(q) \to -\frac{Z(q^2)}{q^2}\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) \tag{5.36}$$

En multipliant l'équation (5.31) par $n_\mu n_\nu/n^2$, l'ansatz choisi mène à :

$$\begin{aligned}-\frac{q^2}{Z(q^2)}\left(1-\frac{1}{\gamma}\right) = -q^2\left(1-\frac{1}{\gamma}\right) + \frac{1}{2}g_0^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{n.(k-k')}{n^2} \\ \times\Delta_{\lambda\sigma}(k)\Delta_{\lambda\sigma'}(k')\, i\Gamma_{\sigma\sigma'\nu}(k,k',-q)\, n_\nu + \frac{1}{2}g_0^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\Delta_{\lambda\lambda'}(k)\end{aligned} \tag{5.37}$$

Tous les termes à 4 gluons ont disparu : cette simplification résulte de la forme de $\Gamma_4^{(0)}$ et du fait que $n_\mu\Delta_{\mu\nu} = 0$.

Pour résoudre l'équation (5.37), il faudrait pouvoir exprimer le vertex à 3 gluons Γ en fonction du propagateur (et donc de Z). Pour ce faire, on utilise l'identité de Ward (5.32) et la relation (5.36); on peut ainsi montrer que le vertex à 3 gluons le plus général s'écrit comme suit :

$$\Gamma_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}(q_1,q_2,q_3) = \Gamma^{(L)}_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}(q_1,q_2,q_3) + \Gamma^{(T)}_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}(q_1,q_2,q_3) \tag{5.38}$$

avec

$$\begin{aligned}\Gamma^{(L)}_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}(q_1,q_2,q_3) = f^{abc}\Big\{&\delta_{\sigma_1\sigma_2}\left[Z^{-1}(q_1^2)(q_1)_{\sigma_3} - Z^{-1}(q_2^2)(q_2)_{\sigma_3}\right] \\ -&\frac{Z^{-1}(q_1^2)-Z^{-1}(q_2^2)}{q_1^2-q_2^2}\left[q_1.q_2\,\delta_{\sigma_1\sigma_2} - (q_2)_{\sigma_1}(q_1)_{\sigma_2}\right](q_1-q_3)_{\sigma_3}\Big\} \\ +&\ \textit{permutations cycliques}\end{aligned} \tag{5.39}$$

$\Gamma^{(L)}$ est le vertex longitudinal, tandis que $\Gamma^{(T)}$ est le vertex transverse (ce qui correspond à $\Gamma^{(T)}_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}(q_1,q_2,q_3)(q_1)_{\sigma_1} = 0$). Le vertex longitudinal vérifie l'identité de Ward (5.32) et domine dans la limite où une des trois impulsions tend vers 0 :

$$\Gamma^{(T)}/\Gamma^{(L)} \to 0 \quad si\ q_1/q_2\ et\ q_1/q_3 \to 0 \tag{5.40}$$

Nous ne donnerons pas ici l'expression du vertex transverse $\Gamma^{(T)}$, qu'on peut trouver dans [16] et [17].

L'hypothèse centrale de ce travail est la suivante : les auteurs supposent que le fait de négliger la partie transverse $\Gamma^{(T)}$ du vertex dans l'équation de Dyson (5.37) n'affecte pas les singularités infrarouges du propagateur; cela revient à dire qu'en remplaçant Γ par $\Gamma^{(L)}$ dans (5.37), on obtient une équation intégrale dont la solution se comporte, dans la limite infrarouge, comme le propagateur réel. Comment peut-on justifier une telle hypothèse? L'affirmation analogue est vraie en QED : la partie magnétique de la fonction de vertex est dominée par la partie électrique dans la limite infrarouge, ce qui correspond au fait que, avec la distance, les forces magnétiques diminuent plus vite que les forces électriques. En QCD, la situation est moins claire : même si la relation (5.40) conforte l'hypothèse et si on peut vérifier cette dernière à l'ordre d'une boucle en théorie des perturbations, on ne sait pas très bien quels peuvent être les effets non perturbatifs sur le vertex à 3 gluons. Il faut donc juger cette hypothèse sur les résultats qu'elle fournira. Avec cette approximation et l'ansatz (5.35) pour Δ, l'équation de Dyson devient :

$$\begin{aligned}\frac{n_\mu \Pi_{\mu\nu}(q) n_\nu}{n^2} = -\frac{q^2}{Z(q^2)}\left(1-\frac{1}{\gamma}\right) &= -q^2\left(1-\frac{1}{\gamma}\right) \\ -g_0^2\int dk\,&\frac{n.(k-k')n.k'}{n^2}\Delta^{(0)}_{\lambda\sigma}(k)\Delta^{(0)}_{\lambda\sigma'}(k') \\ \times\Big\{&-\frac{Z(k^2)}{Z(q^2)}\frac{Z(k'^2)-Z(q^2)}{k'^2-q^2}(q+k')_\sigma q_{\sigma'}\end{aligned}$$

$$+\frac{Z(k^2)-Z(k'^2)}{k^2-k'^2}(k.k'\delta_{\sigma\sigma'}-k'_\sigma k_{\sigma'})+Z(k^2)\delta_{\sigma\sigma'}\Bigg\}$$
$$+g_0^2\int\frac{dk}{k^2}\,Z(k^2)\left(2+\frac{k^2n^2}{(k.n)^2}\right) \qquad (5.41)$$

Dans cette équation, $\int dk$ désigne $N_c\int d^4k/(2\pi)^4$, où N_c est le nombre de couleurs.
Notons que le fait de négliger $\Gamma^{(T)}$ ne viole pas l'identité de Ward (5.32); les relations (5.33) et (5.34) restent vraies pour la solution de l'équation précédente.

5.5.5 Renormalisation de la masse

L'équation (5.41) est l'équation non renormalisée pour le propagateur, et g_0, la constante de couplage non renormalisée. En théorie des perturbations, l'équation (5.41) contient des divergences quadratiques qui rendent caduque la relation (5.33); la renormalisation de la masse aura pour but de faire disparaître ces divergences. Les divergences devront être régularisées de telle sorte que soit restaurée l'équation (5.33), qui exprime la nécessité du maintien de la masse nulle du gluon (d'où le nom de "renormalisation de la masse").
La manière la plus simple d'éliminer les divergences est de soustraire $\Pi_{\mu\nu}(0)$ (ou plutôt sa projection sur n_μ) du membre de droite de l'équation de Dyson (5.41).
Si $Z(k^2)$ présente une singularité en $1/k^2$, correspondant à un propagateur en $1/k^4$, il faut ajouter un terme supplémentaire à $\Pi_{\mu\nu}(0)$. Une telle singularité ne rend pas le membre de droite de (5.41) infini, mais lui confère une valeur finie dont le comportement infrarouge est en contradiction avec (5.34). Pour préserver la relation (5.34), il faut soustraire cette valeur finie en l'incluant dans $\Pi_{\mu\nu}(0)$. Si $Z(k^2)\to 1/k^2$ quand $k^2\to 0$, on écrit $Z(k^2)=A/k^2+Z_1(k^2)$, où Z_1 est moins singulier que $1/k^2$. L'expression à soustraire du membre de droite de (5.41) est ainsi donnée par :

$$\frac{n_\mu\Pi_{\mu\nu}(0)n_\nu}{n^2}=2g_0^2\int dk\frac{(n.k)^2}{n^2}\Delta^{(0)}_{\lambda\sigma}(k)\Delta^{(0)}_{\lambda\sigma'}(k)$$
$$\times\left\{Z_1(k^2)\delta_{\sigma\sigma'}+\frac{\partial Z_1(k^2)}{\partial k^2}(-k^2\delta_{\sigma\sigma'}+k_\sigma k_{\sigma'})\right\}$$
$$+g_0^2\int dk Z_1(k^2)\left(2+\frac{k^2n^2}{(k.n)^2}\right)$$
$$+2Ag_0^2\int dk\frac{(n.k)^2}{n^2}\Delta^{(0)}_{\lambda\sigma}(k)\Delta^{(0)}_{\lambda\sigma'}(k)\left(\frac{2}{k^2}\delta_{\sigma\sigma'}-\frac{k_\sigma k_{\sigma'}}{k^4}\right) \qquad (5.42)$$

Insistons sur le fait que le terme A n'est inclus dans cette expression que si Z présente une singularité en $1/k^2$.

5.5.6 Renormalisation de la constante de couplage

La procédure de soustraction qui vient d'être décrite élimine les divergences quadratiques, mais il reste encore des divergences perturbatives logarithmiques qu'il faudra aussi traiter.
Quand la renormalisation de la masse a été effectuée (procédure de soustraction), l'équation (5.41) a la structure (voir [18]) :

$$\frac{1}{Z(q^2)} = 1 - g_0^2 \frac{1}{Z(q^2)} \int_{q^2}^{\infty} \frac{dk^2}{k^2} Z^2(k^2) \tag{5.43}$$

On définit alors Z_R par $Z(q^2) = Z(M^2)Z_R(q^2)$, où M_μ est un quadrivecteur fixé, de genre espace (avec $Z_R(M^2) = 1$). Ceci mène à l'équation suivante pour Z_R :

$$\frac{1}{Z_R(q^2)} = 1 - g_0^2 \frac{Z(M^2)}{Z_R(q^2)} \int_{q^2}^{M^2} \frac{dk^2}{k^2} Z_R^2(k^2) \tag{5.44}$$

Si $g_R^2(M^2) = g_0^2 Z(M^2)$ est la constante de couplage renormalisée, on aboutit à l'équation de Dyson renormalisée (qui est finie, comme on peut le voir) :

$$\frac{1}{Z_R(q^2)} = 1 - g_R^2(M^2) \frac{1}{Z_R(q^2)} \int_{q^2}^{M^2} \frac{dk^2}{k^2} Z_R^2(k^2) \tag{5.45}$$

Nous avons ainsi obtenu une constante de couplage qui varie avec l'impulsion q et cette impulsion est mesurée par rapport au point de renormalisation M.
Nous sommes maintenant près du but : l'équation de Dyson pour le propagateur du gluon est devenue une équation intégro-différentielle finie dont on peut rechercher les solutions.

5.5.7 Comportements infrarouge et ultraviolet des solutions de l'équation de Dyson et conclusion

Pour trouver les solutions de l'équation (5.45), on introduit dans le membre de droite des fonctions génériques correspondant aux différents comportements infrarouges possibles; on calcule ensuite les solutions $Z_R(q^2)$ correspondantes et on voit si elles sont consistantes avec les expressions introduites dans l'équation. Cette recherche est assez technique; c'est pourquoi nous nous bornerons à en donner le résultat.
Le seul type de fonction $Z_R(q^2)$ qui soit consistant avec l'équation (5.45) est :

$$Z_R(q) \to \frac{AM^2}{q^2} \quad \text{pour } q^2 \to 0 \tag{5.46}$$

Le résultat final, pour le propagateur du gluon (renormalisé) est donc :

$$\Delta_{R\mu\nu}(q) \to -\frac{AM^2}{q^4} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu n_\nu + n_\mu q_\nu}{q.n} + \frac{q_\mu q_\nu n^2}{(q.n)^2} \right) \quad \text{pour } q^2 \to 0 \tag{5.47}$$

Ce comportement en $1/q^4$ du propagateur du gluon est étroitement lié au phénomène du confinement des quarks : G. West (voir[19]) a montré qu'un propagateur gluonique en $1/q^4$ implique un potentiel d'interaction linéaire entre les quarks. Certains voient dans un tel potentiel l'expression du confinement, mais ce dernier n'a pas encore reçu de définition mathématique claire au niveau de la théorie des champs.

La seconde partie de cet article traite du comportement ultraviolet ($q^2 \to \infty$) de la solution de l'équation de Dyson. On peut montrer que :

$$Z_R(q) \to \frac{constante}{(ln(\frac{q^2}{M^2}))^{11/16}} \quad \text{pour } q^2 \to \infty \tag{5.48}$$

Ce résultat est en contradiction avec le groupe de renormalisation et la limite perturbative de QCD qui prévoit un comportement en $1/ln(\frac{q^2}{M^2})$. Cette difficulté se retrouve aussi au niveau de la constante de couplage : le facteur de renormalisation de la constante de couplage que les auteurs obtiennent dépend de la particule considérée, ce qui n'est pas très correct. Ces problèmes sont probablement dus aux approximations qui ont été faites (vertex longitudinal et structure du propagateur). Un travail intéressant (mais certainement très lourd) serait de reprendre les calculs avec un vertex transverse et le propagateur complet, en imposant comme condition de retrouver le bon comportement dans la limite perturbative.

Nous pouvons donc résumer cet article de la manière suivante : on commence par projeter l'équation de Dyson sur n_μ pour éliminer les termes à 4 gluons. On pose ensuite un ansatz (en supposant que le propagateur a la même structure tensorielle que le propagateur libre) pour Δ et on néglige la partie transverse du vertex à 3 gluons; on obtient alors une équation fermée et renormalisable pour la fonction Z. Le propagateur issu de la résolution de cette équation intégrale présente une dépendance en $1/k^4$ dans la limite infrarouge et se comporte comme indiqué par l'équation (5.48) dans la limite ultraviolette.

Ces comportements soulèvent bien des questions quant à leur origine; on peut ainsi se demander s'ils ne proviennent pas du choix de la jauge axiale, qui, en dépit de la simplification des calculs qu'elle permet, amène des singularités non physiques. Une autre inconnue est l'influence sur le comportement du propagateur de la supposition consistant à négliger le vertex transverse : pour répondre à cette question, il faudrait essayer plusieurs formes pour le vertex transverse et déterminer les propagateurs correspondants. On pourrait également étudier les effets des autres termes du propagateur (termes négligés dans l'ansatz) : il serait intéressant de comparer le propagateur complet avec celui obtenu en jauges covariantes (par exemple la jauge de Landau). Le dernier point suspect est la procédure de soustraction dans la renormalisation de la masse : pour maintenir la masse nulle du gluon, on soustrait un terme en $1/k^4$ (en prévision du cas où le propagateur exhiberait un tel comportement); or, après la résolution de l'équation renormalisée, on obtient précisément un propagateur en $1/k^4$. L'existence d'une solution semble donc découler entièrement de la soustraction.

Chapitre 6

Situation actuelle et conclusion

6.1 Revue des articles récents sur le propagateur du gluon

6.1.1 L'article de Brown et Pennington

Cet article [15], paru en 1987, traite de la théorie de Yang-Mills pure (sans fermions); il figure parmi les premiers à proposer une étude des propriétés infrarouges du propagateur du gluon dans une jauge covariante (jauge de Landau). Il s'inspire néanmoins largement des méthodes développées en jauge axiale (troncation des équations, renormalisation...), dans les articles [8] et [9] du chapitre précédent.

En jauge covariante, la présence des ghosts complique la situation : on a cette fois, dans la même équation de Dyson-Schwinger, le propagateur du ghost et le vertex ghost-gluon, en plus du propagateur et du vertex à 3 gluons qui s'y trouvaient déjà en jauge axiale (voir la première équation de la figure 5.1, sans le terme fermionique). La première simplification de ce travail (approximation courante dans les articles qui traitent des équations de D-S) consiste à négliger les termes à 4 gluons dans l'équation de D-S pour le propagateur du gluon.

La particularité majeure de cette publication (et elle conditionne toute la suite) est la suivante : les auteurs négligent purement et simplement les termes de ghosts. Cette simplification facilite grandement les calculs, mais est assez discutable quand on compare les résultats de Brown et Pennington avec ceux des articles postérieurs. Même si, reconnaissent les auteurs, les termes de ghosts sont nécessaires pour assurer la transversalité de la fonction à 2 points ($\Pi_{\mu\nu}(q)q_\mu = 0$), ces termes n'affectent pas, selon eux, le comportement global du propagateur du gluon : ils sont confortés dans cette idée par le fait que le calcul perturbatif à l'ordre d'une boucle montre que la contribution des ghosts au propagateur du gluon est inférieure à 10%. Cet argument est,

lui aussi, discutable puisqu'il peut y avoir des effets non perturbatifs !
En l'absence de ghosts, on peut résoudre l'identité STI relative à la partie longitudinale du vertex à 3 gluons (identité de Ward) et exprimer cette dernière en fonction du propagateur du gluon. Etant donné que la partie transverse du vertex à 3 gluons s'annule quand une des impulsions devient nulle, on peut supposer que le comportement infrarouge du propagateur sera uniquement déterminé par la partie longitudinale de ce vertex.
Les auteurs obtiennent donc (vu les approximations mentionnées antérieurement) une équation fermée pour la fonction scalaire intervenant dans le propagateur.
La procédure de renormalisation de cette équation est en tous points identique à celle de l'article précédent : les mêmes divergences y apparaissent et les deux étapes de la renormalisation (renormalisation de la masse et de la constante de couplage) se déroulent de la même manière.
Le propagateur renormalisé s'écrit :

$$\Delta_{R\mu\nu}(q) = \frac{G_R(q^2)}{q^2}\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) \tag{6.1}$$

La résolution de l'équation renormalisée donne la solution suivante :

$$G_R(q^2) = A\frac{M^2}{q^2} + \textit{ termes supplémentaires} \tag{6.2}$$

où M est, comme au chapitre précédent, le point de renormalisation et se trouve dans la région perturbative, c'est-à-dire à grand q^2. Les termes supplémentaires dépendent de paramètres ajustables et servent à assurer l'égalité entre les deux membres de l'équation renormalisée pour G_R. Comme la renormalisation de la fonction à deux points à été effectuée à l'ordre d'une boucle, on peut écrire la constante de couplage en terme d'un seul paramètre d'échelle (noté Λ) :

$$\alpha_S(M) \sim \frac{1}{ln\left(\frac{M^2}{\Lambda^2}\right)} \tag{6.3}$$

Le paramètre d'échelle Λ (qu'on devrait plutôt noter Λ_{QCD}) correspond, en QCD, au pôle de Landau de QED. Ce point, où la constante de couplage diverge en théorie des perturbations, est situé à petit q^2 : c'est l'inverse de ce qui se passe en QED. Cette caractéristique fondamentale de QCD explique que la région perturbative de cette théorie se situe aux petites distances (grands q^2).

On obtient donc (comme dans l'article précédent, en jauge axiale) un propagateur en $1/q^4$, ce qui pourrait expliquer le phénomène de confinement. La figure 6.1 représente la fonction G_R, pour $M^2 = 10\,\mathrm{GeV}^2$ et deux valeurs du paramètre d'échelle.
Cet article ne semble pas à l'abri de la critique : le comportement infrarouge

que les auteurs obtiennent pour le propagateur paraît fortement tributaire de l'approximation consistant à négliger les ghosts. Dans l'article suivant, nous verrons qu'en gardant les termes de ghosts, on obtient un comportement infrarouge du propagateur radicalement différent.

6.1.2 L'article d'Alkofer, Hauck et von Smekal

Nous allons maintenant présenter le dernier article [14] de ce mémoire : il s'agit d'un travail paru en 1998 qui traite du même sujet que le précédent : la solution des équations couplées de Dyson-Schwinger en jauge de Landau. Contrairement à Brown et Pennington, les auteurs gardent les termes de ghosts et cherchent à résoudre les équations pour obtenir les propagateurs du gluon et du ghost. Les éléments nouveaux par rapport à [15] sont le propagateur du ghost et le vertex ghost-gluon. Comme d'habitude, on utilisera les identités de Slavnov-Taylor pour exprimer les différents vertex en termes des fonctions à deux points, c'est-à-dire, les propagateurs du ghost et du gluon. Pour obtenir les équations tronquées, on commence par négliger les termes à 4 gluons et on renormalise ensuite les deux équations obtenues. Les propagateurs du ghost et du gluon sont paramétrisés de la manière suivante :

$$D_G(k) = -\frac{G(k^2)}{k^2} \quad et \quad D_{\mu\nu}(k) = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) \frac{Z(k^2)}{k^2} \tag{6.4}$$

En vue d'obtenir un système d'équations fermé pour les fonctions G et Z, les auteurs construisent l'expression du vertex ghost-gluon à partir d'une identité (du type de Slavnov-Taylor) qui relie la partie longitudinale de ce vertex au propagateur du ghost. Cette identité, qui est similaire à l'identité STI pour le vertex quark-gluon, n'apparaît pas dans la littérature avant cet article; c'est pourquoi les auteurs la dérivent à partir de l'invariance du lagrangien sous une transformation de Becchi-Rouet-Stora (voir [20]).
Quand on connaît la forme du vertex ghost-gluon, on obtient facilement le vertex à 3 gluons en résolvant l'identité STI qui lie ces deux vertex.
La résolution des deux équations couplées pour G et Z (par recherche de solutions self-consistantes, comme précédemment) donne les résultats suivants (dans la limite infrarouge et avec $x \equiv k^2$) :

$$G(x) \sim \left(\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{2}\right)^{-1} x^{-\kappa} \tag{6.5}$$

et

$$Z(x) \sim \left(\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{2}\right) x^{2\kappa} \tag{6.6}$$

où κ est un paramètre fixé numériquement à 0.92 pour assurer l'auto-cohérence de la solution.
On voit que le propagateur du gluon s'annule en $x = 0$, tandis que celui du

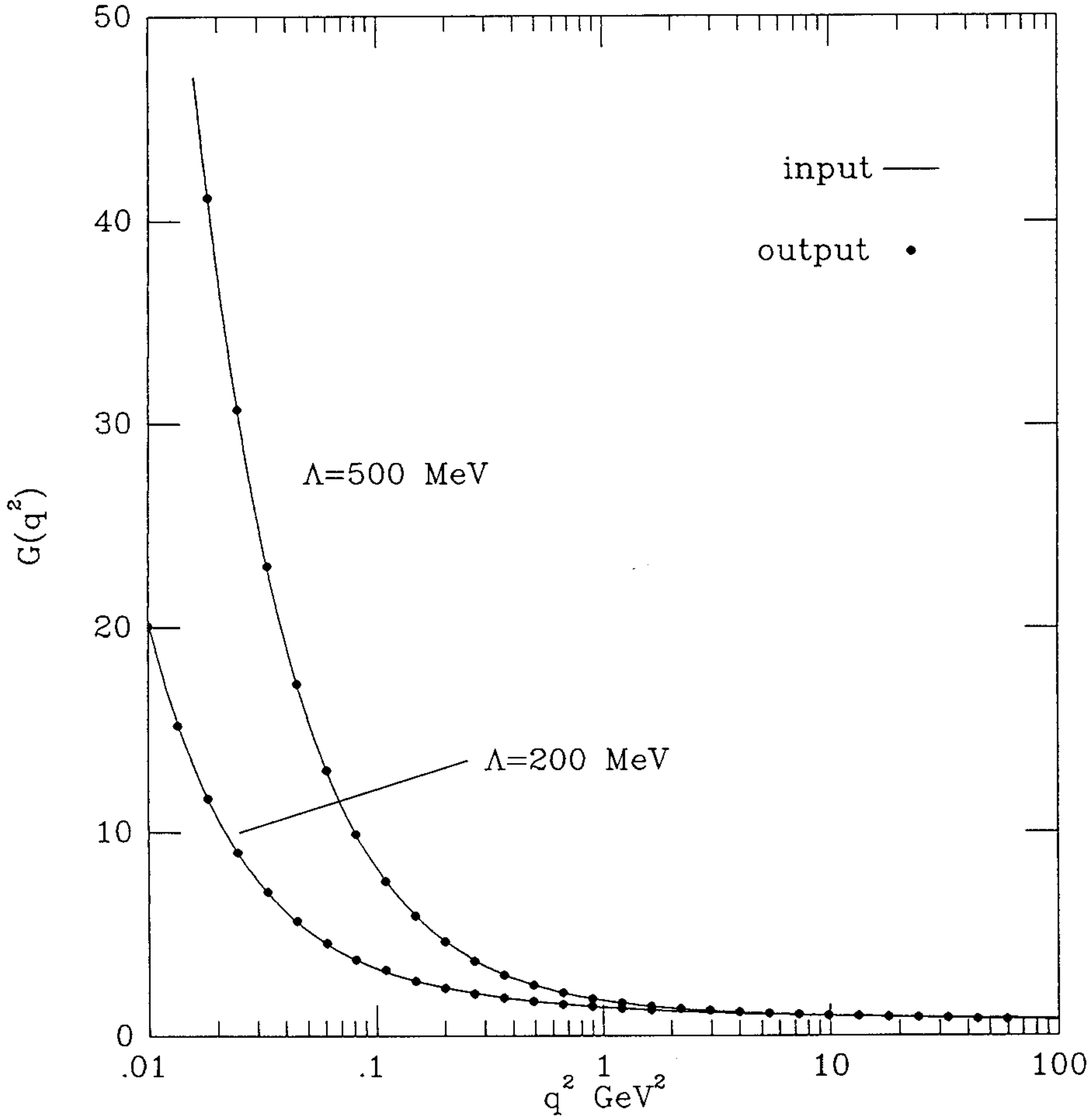


FIG. 6.1 – *Solution auto-cohérente pour la fontion scalaire G_R du propagateur gluonique*

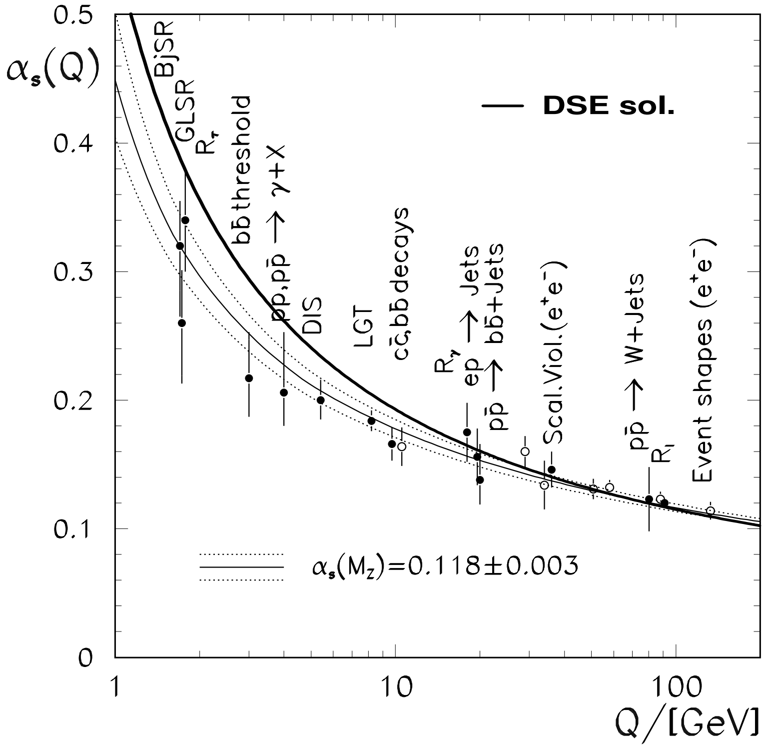


FIG. 6.2 – *Constante de couplage comparée à divers résultats expérimentaux*

ghost "explose" dans cette limite. Cela indique que les contributions dominantes aux propagateurs du ghost et du gluon sont, dans la limite infrarouge, exclusivement dues aux ghosts. Ce comportement est en contradiction avec celui de l'article précédent; cela s'explique par le fait que Brown et Pennington négligeaient complètement les ghosts, approximation qui est complètement invalidée ici.
La constante de couplage tend, quant à elle, vers une valeur finie dans la limite infrarouge :

$$\alpha_S(q^2) = \frac{g^2}{4\pi} Z(q^2) G^2(q^2) \to \frac{16\pi}{9}\left(\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{2}\right)^{-1} \approx 9.5 \qquad (6.7)$$

De plus, cette constante de couplage présente bien un comportement logarithmique (en accord avec la théorie des perturbations) dans la limite ultraviolette. La figure 6.2 montre la constante de couplage obtenue, comparée à différents résultats expérimentaux. Dans ces calculs, on utilise comme contrainte la valeur phénoménologique $\alpha_s(M_Z) = 0.118$ à la masse du boson Z^0. La courbe entourée de traits interrompus résulte d'un calcul perturbatif à deux boucles.

L'intérêt de cette publication réside aussi dans le fait que les auteurs comparent leurs résultats avec les résultats obtenus par simulation sur réseau (lattice QCD) : les figures 6.3 et 6.4 comparent les résultats de cet article avec

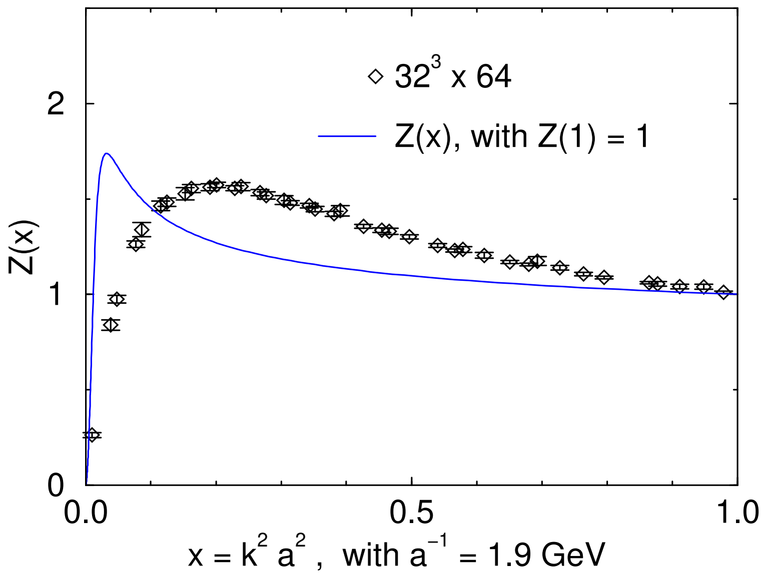


FIG. 6.3 – *Comparaison avec le réseau pour la fonction Z*

ceux du réseau (résultats récents : voir [21] et [22]) pour les fonctions Z et G (a est le pas du réseau).

On voit que les résultats obtenus collent assez bien avec ceux du réseau; la figure 6.4 montre qu'ils sont même meilleurs qu'un ajustement (représenté en traits interrompus) des données du réseau par la forme $G(k^2)/k^2 = c/k^2 + d/k^4$. En ce qui concerne la fonction Z, on voit, à la figure 6.3, que les résultats du réseau et de la résolution de l'équation de Dyson ne sont pas tout à fait en accord pour les petites valeurs de x : il faut prendre avec prudence les données du réseau car cette simulation est très récente et ce sont les premiers résultats relatifs au comportement des propagateurs du gluon et du ghost. De plus, les simulations sur réseau rencontrent des difficultés pour les petites valeurs de l'impulsion (effets de bord). La convergence des résultats obtenus par QCD sur réseau et de ceux du formalisme de Dyson-Schwinger est encourageante; il est probable que, dans l'avenir, les deux méthodes se développeront en parallèle.

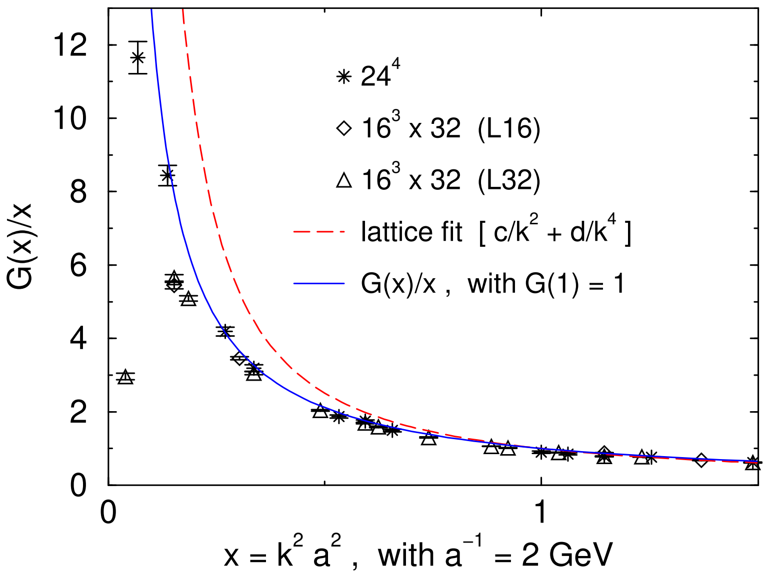


FIG. 6.4 – *Comparaison avec le réseau pour la fonction G*

6.2 Conclusion

Nous pouvons maintenant dresser le tableau récapitulatif des résultats obtenus dans les articles que nous avons présentés :

Article	jauge	prop. à $q^2 \to 0$	$\alpha_S \times$ prop. à $q^2 \to \infty$	approx.
[8] et [9]	axiale	$1/q^4$	$\frac{C}{q^2(ln(\frac{q^2}{M^2}))^{11/16}}$	$\Gamma^{(T)} \approx 0$ $\partial_\gamma Z(q^2,\gamma) = 0$ ansatz pour le prop.
[15]	Landau	$1/q^4$	$\frac{C}{q^2 ln(\frac{q^2}{\Lambda^2})}$	pas de ghosts $\Gamma^T \approx 0$ vert. à 4 gluons négligé
[14]	Landau	$(q^2)^{0.84}$ (gluon) $(q^2)^{-1.92}$ (ghost)	$\frac{C}{q^2 ln(\frac{q^2}{\Lambda^2})}$	vert. à 4 gluons négligé

Ce mémoire a donné un aperçu de certains aspects non perturbatifs en théorie des champs et plus particulièrement de leur application en QCD. Les différents articles présentés brossent un panorama de la recherche entreprise sur les équations de Dyson-Schwinger durant les 20 dernières années. Les articles récents relatifs au comportement à grande distance des propagateurs du gluon et du ghost montrent que les effets non perturbatifs peuvent avoir une grande importance et modifier de façon considérable les résultats obtenus dans le domaine perturbatif; cela est apparu clairement lors de la comparaison des deux derniers articles présentés où une approximation basée sur un calcul perturbatif (négliger les termes de ghosts) s'est révélée fort discutable. Les toutes dernières publications (que nous n'avons malheureusement pas eu le temps de décrire), bien que fort semblables aux articles que nous avons présentés, obtiennent de meilleurs résultats : elles font en effet moins d'approximations (elles tiennent par exemple compte des termes fermioniques). Cette constatation illustre bien le dilemme de ce formalisme : incapable de connaître à l'avance l'impact des différentes approximations, on serait tenté de les limiter au maximun, mais les calculs deviennent alors d'une telle complexité (inhérente aux équations de Dyson-Schwinger) que leur résolution est extrêmement ardue (même avec les moyens informatiques actuels). Ce domaine de recherche est récent et reste très largement ouvert; il offre de nombreuses voies d'investigation encore inexplorées. Signalons notamment l'étude systématique des différentes structures de vertex possibles et de leur influence sur le comportement infrarouge des différents propagateurs. Cette branche de la théorie des champs laisse entrevoir l'espoir d'obtenir, dans l'avenir, une description cohérente et satisfaisante du phénomène du confinement, dont la compréhension est, pour l'instant, embryonnaire. Il existe plusieurs manières d'obtenir une théorie confinante : outre un propagateur en $1/q^4$ (qui induit un potentiel d'interaction linéaire), on peut aussi considérer comme confinant un propagateur dépourvu de pôle en $1/q^2$ puisqu'il rend impossible l'existence d'états libres. On voit donc qu'un propagateur du gluon comme celui obtenu dans le dernier travail présenté n'implique pas nécessairement une absence de confinement : d'une part, il faut considérer toutes les interprétations possibles du confinement et d'autre part, il faudrait aussi tenir compte des quarks et de leur propagateur.

Pour terminer, signalons que ce formalisme exact peut être appliqué à d'autres théories que QED ou QCD et qu'il constitue un des derniers chantiers inachevés de la théorie quantique des champs.

Bibliographie

[1] F.J. Dyson, “Selected papers of Freeman Dyson with commentary," *Providence, USA: AMS (1996).*

[2] W. Pauli et V.F. Weisskopf, “Sur la quantification de l'équation d'onde scalaire relativiste. (en allemand)," Helv. Phys. Acta **7**, 709 (1934).

[3] M.E. Peskin et D.V. Schroeder, “An Introduction to quantum field theory," *Reading, USA: Addison-Wesley (1995)*, p. 19.

[4] C.D. Roberts et A.G. Williams, “Dyson-Schwinger equations and their application to hadronic physics," Prog. Part. Nucl. Phys. **33**, 477 (1994) hep-ph/9403224.

[5] R.J. Rivers, “Path Integral Methods In Quantum Field Theory," *Cambridge, UK: Univ. Pr. (1987) (Cambridge monographs on mathematical physics)*, p. 182-185.

[6] C. Itzykson et J.B. Zuber, “Quantum Field Theory," *New York, Usa: Mcgraw-hill (1980) (International Series In Pure and Applied Physics).*, p. 211-212

[7] C. Itzykson et J.B. Zuber, “Quantum Field Theory," *New York, Usa: Mcgraw-hill (1980) (International Series In Pure and Applied Physics).*, p. 289-294

[8] M. Baker, J.S. Ball et F. Zachariasen, “A Nonperturbative Calculation Of The Infrared Limit Of The Axial Gauge Gluon Propagator. 1," Nucl. Phys. **B186**, 531 (1981).

[9] M. Baker, J.S. Ball et F. Zachariasen, “A Nonperturbative Calculation Of The Infrared Limit Of The Axial Gauge Gluon Propagator. 2," Nucl. Phys. **B186**, 560 (1981).

[10] J.D. Bjorken et S.D. Drell, “Relativistic Quantum Fields ," *New York, Usa : McGraw-Hill (1965).*

[11] M.E. Peskin et D.V. Schroeder, “An Introduction to quantum field theory," *Reading, USA: Addison-Wesley (1995)*, p. 545-649.

[12] Fl. Stancu, “Group Theory in Subnuclear Physics," *Oxford, UK: Oxford Science Publications (1996) (Oxford studies in nuclear physics)*, p. 276-277.

[13] U. Habel *et al.*, "A Nonperturbative Solution To The Dyson-Schwinger Equations Of Quantum Chromodynamics. 1. General Properties," Z. Phys. **A336**, 423 (1989).

[14] A. Hauck, R. Alkofer et L. von Smekal, "A Solution to coupled Dyson-Schwinger equations for gluons and ghosts in Landau gauge," hep-ph/9804387.

[15] N. Brown et M.R. Pennington, "Preludes To Confinement : Infrared Properties Of The Gluon Propagator In The Landau Gauge," Phys. Lett. **202B**, 257 (1988).

[16] J.S. Ball et T. Chiu, "Analytic Properties Of The Vertex Function In Gauge Theories. 1," Phys. Rev. **D22**, 2542 (1980).

[17] J.S. Ball et T. Chiu, "Analytic Properties Of The Vertex Function In Gauge Theories. 2," Phys. Rev. **D22**, 2550 (1980).

[18] J.R. Cudell et D.A. Ross, "Theory and phenomenology of the gluon propagator from the Dyson-Schwinger equation in QCD," Nucl. Phys. **B359**, 247 (1991).

[19] G.B. West, "Confinement, The Wilson Loop And The Gluon Propagator," Phys. Lett. **115B**, 468 (1982).

[20] A. Burnel, "Introduction aux théories de jauge," Notes de cours.

[21] D.B. Leinweber, J.I. Skullerud, A.G. Williams et C. Parrinello [UKQCD Collaboration], "Gluon propagator in the infrared region," Phys. Rev. **D58**, 031501 (1998) hep-lat/9803015.

[22] H. Suman et K. Schilling, "First lattice study of ghost propagators in SU(2) and SU(3) gauge theories," Phys. Lett. **B373**, 314 (1996) hep-lat/9512003.