Université de Liège
Faculté des Sciences
Département de Physique

Année académique 2001-2002

Diffusion profondément inélastique électron-proton

Benoît Roland

Mémoire présenté en vue
de l'obtention du grade
de licencié en Sciences Physiques

Chapitre 1

Introduction

L'harmonie de notre univers semble régie par quatre interactions fondamentales.

Le ciel étoilé et le mouvement de notre planète obéissent aux lois de la gravitation.

L'orientation de l'aiguille d'une boussole comme les éclairs d'une nuit d'orage, la stabilité atomique et l'édification moléculaire, sont autant de phénomènes soumis à l'interaction électromagnétique. Dans le cadre de l'électrodynamique quantique (QED), sa description combine les principes de la théorie quantique à ceux de relativité restreinte et d'invariance de jauge, l'interaction électromagnétique entre fermions de spin $1/2$ étant alors régie par l'équation de Dirac. La faible valeur de la constante de couplage électromagnétique α donne ainsi naissance à la QED perturbative.

L'interaction faible est responsable pour sa part de certaines désintégrations, telle celle du neutron en un proton, un électron et un anti-neutrino.

La quatrième et dernière interaction fondamentale est l'interaction forte. Celle-ci assure la cohésion de la matière hadronique ainsi que la stabilité des noyaux. Comme son nom l'indique, cette interaction possède une constante de couplage α_s élevée, de l'ordre de l'unité. Sa portée, quant à elle, est limitée à l'échelle du fermi. La théorie la décrivant est la chromodynamique quantique (QCD), dont le lagrangien s'obtient en appliquant le principe d'invariance de jauge au groupe de symétrie non-abélien SU(3). Sa charge caractéristique, le degré de liberté de couleur, peut prendre pour un quark l'une des trois valeurs suivantes : rouge (R), bleu (B) ou vert (G). La particule vecteur du champ de couleur, le gluon, est de masse nulle et peut se trouver dans huit configurations de couleur différentes. Le gluon, contrairement au photon, possède donc la propriété d'interagir avec lui-même et de modifier la charge de couleur des particules en interaction.

L'objectif principal de ce travail est l'étude de la diffusion profondément inélastique électron-proton. Celle-ci nécessite l'introduction d'un certain nombre de concepts théoriques qui sont présentés dans les trois premiers chapitres. Nous utilisons un développement perturbatif de la QCD, justifié par le fait que la constante de couplage $\alpha_s(Q^2)$ décroît lorsque le carré de la quadri-impulsion caractéristique du processus augmente (cf. ch.2).

Le premier chapitre a pour objet l'étude de l'état final en QCD et, plus particulièrement, de l'annulation des divergences infrarouge et colinéaire entre diagrammes décrivant respectivement l'émission d'un gluon réel et virtuel. Pour illustrer cette propriété, nous envisageons l'annihilation électron-positron en une paire quark-antiquark accompagnée d'abord d'un gluon réel. Certaines configurations cinématiques de cet état final à trois corps aboutissent à des divergences colinéaire et infrarouge de la section efficace totale perturbative. Il est cependant possible de régulariser ces divergences via l'introduction d'une masse au gluon. Nous fournissons alors une analyse spatio-temporelle des singularités observées qui nous indique que ces dernières constituent des contributions à longue portée, c.-à-d. caractérisées par une échelle de temps nettement supérieure à celle du processus dur initial. Après avoir introduit d'un point de vue formel les contributions à courte portée que sont les corrections au vertex et au propagateur du quark, nous abordons l'annihilation électron-positron en une paire quark-antiquark avec émission d'un gluon virtuel. Ce processus engendre des divergences ultraviolettes qui se compensent entre diagrammes virtuels et des divergences infrarouges venant exactement annuler celles que génère l'émission réelle.

Le deuxième chapitre est consacré à la renormalisation des champs. Dans un premier temps, les divergences ultraviolettes que présentent les corrections au vertex et au propagateur du quark ou du gluon sont régularisées via l'introduction d'un cut-off ultraviolet Λ par exemple. Ces divergences régularisées sont ensuite réabsorbées dans les contre-termes issus de la renormalisation des champs, et par suite dans la définition des quantités physiques. Cette procédure de renormalisation nécessite l'introduction d'un échelle de renormalisation μ, qui ne constitue pas un paramètre intrinsèque à la théorie, mais plutôt un artifice qui nous permet d'organiser le développement perturbatif et nous indique à quelle échelle d'énergie la théorie est redéfinie. L'indépendance des grandeurs physiques vis-à-vis de μ se traduit par l'équation de Callan-Symanzik, dont la résolution repose sur l'introduction d'une constante de couplage effective. La valeur de cette dernière diminue lorsque l'énergie augmente, propriété connue sous le nom de liberté asymptotique et qui permet l'utilisation de la théorie perturbative à énergie élevée. La fin du chapitre est consacrée au choix de l'échelle de renormalisation. Une observable, telle une section efficace, ne serait en effet totalement indépendante de μ que dans la limite d'un développement perturbatif infini. D'un point de vue expérimental, un choix judicieux de μ s'avère dès lors essentiel.

Dans le troisième chapitre, nous présentons une interprétation phénoménologique de la propriété de liberté asymptotique qui nous conduit à comparer le vide de la QCD à un hypothétique milieu diaélectrique. L'antiécrantage auquel celui-ci donnerait naissance permet d'établir un lien entre le confinement et la liberté asymptotique. Nous envisageons alors l'existence possible d'une transition de déconfinement à densité d'énergie élevée, et déterminons à l'aide d'un modèle simple la température à laquelle cette dernière devrait se produire. La suppression anomale du J/ψ, qui constitue le signal le plus révélateur d'un déconfinement possible, est également abordée.

Le dernier chapitre est consacré à l'objectif principal de notre travail, la diffusion profondément inélastique (DPI) électron-proton et utilise l'ensemble des résultats obtenus précédemment : l'annulation des divergences infrarouge et colinéaire entre émissions réelle et virtuelle, la constante de couplage effective et l'utilisation de la théorie perturbative qu'elle permet à haute énergie. Le but de la DPI est la détermination des fonctions de stucture F_1 et F_2 du proton, qui traduisent le caractère non ponctuel de ce dernier et sa constitution en quarks. L'introduction de ces fonctions s'opère de manière élégante en recourant aux symétries de la théorie. Une analyse spatio-temporelle du processus de diffusion nous permet ensuite d'établir intuitivement la propriété de factorisation de la section efficace inclusive. Cette dernière peut s'écrire comme le produit d'une section efficace de diffusion partonique, contrôlée par la physique à courte porté et pouvant être obtenue dans le cadre de la théorie perturbative, et d'une fonction de distribution partonique, soumise aux contributions physiques à longue portée, non perturbatives et nécessitant dès lors le recours à l'expérience. Cette procédure implique l'introduction d'une échelle de factorisation μ_F, qui constitue en quelque sorte la séparation entre le régime dur de la section efficace partonique et le régime mou des fonctions de distribution. La DPI est alors abordée à l'ordre α dans le cadre du modèle des partons libres et dans la limite du régime asymptotique de Bjorken. Dans le cadre de ce modèle, les fonctions de structure vérifient une propriété d'invariance d'échelle connue sous le nom de scaling de Bjorken et sont reliées par une relation simple, dite de Callan-Gross. La prise en considération des corrections réelle et virtuelle à l'ordre α_s nous indique alors une violation du scaling de Bjorken et une évolution des fonctions de structure avec l'énergie du photon utilisé pour sonder le proton. L'indépendance des fonctions de distribution partonique vis-à-vis de l'échelle μ_F nous permet finalement d'établir, de manière simplifiée, l'équation régissant leur évolution avec l'énergie.

Le progrès d'une question, en science,
se reconnaît d'ordinaire à ce que
les grandes lignes s'épurent tandis que
s'embrouillent les petits détails.
Jean Rostand

Chapitre 2

L'annihilation électron-positron

Ce chapitre est consacré à la structure de l'état final en QCD. Nous débuterons par l'annihilation $e^+e^- \to q\,\bar{q}$ et envisagerons ensuite le processus $e^+e^- \to q\,\bar{q}\,g$ pour lequel l'annihilation s'accompagne de l'émission d'un gluon réel. Après avoir introduit la cinématique de ce processus, nous établirons sa section efficace différentielle et examinerons le comportement de cette dernière lorsque deux des partons émis deviennent colinéaires ou lorsque l'un des partons émis est faiblement énergétique. Nous verrons que ces deux configurations sont synonymes de divergences pour la section efficace perturbative[1]. Nous tenterons alors de distinguer les contributions du processus dur[2] pour lesquelles la théorie pertubative est d'application, des contributions à longue portée pour lesquelles le développement perturbatif diverge. Pour ce faire, nous introduirons un outil très utile : les coordonnées du cône de lumière. Nous montrerons ensuite que la section efficace totale du processus $e^+e^- \to q\,\bar{q}$ ou $q\,\bar{q}\,g$ ne présente pas les divergences précédemment rencontrées si l'émission d'un gluon virtuel est prise en considération. Nous rechercherons finalement des observables insensibles aux contributions à longue portée et nous permettant par là de sonder la physique du processus dur initial [1–5].

2.1 Section efficace totale de l'annihilation $e^+e^- \to q\,\bar{q}$

L'annihilation $e^+e^- \to q\,\bar{q}$ est illustrée à l'ordre[3] α par le diagramme de Feynman de la figure 2.1, où k, k', p et p' désignent respectivement les quadri-impulsions de l'électron, du positron, du quark et de l'antiquark, $q = k + k'$ désignant celle du photon virtuel [2].

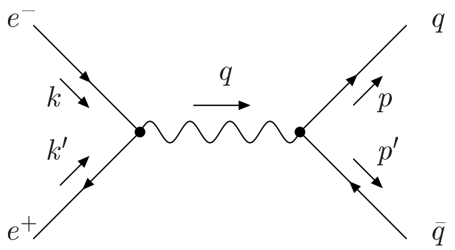


FIG. 2.1 – Diagramme de Feynman pour le processus $e^+e^- \to q\,\bar{q}$ à l'ordre α.

Nous nous intéressons à la section efficace totale non polarisée à haute énergie et négligeons donc l'ensemble des masses. En désignant par Q_f la charge du quark de saveur f en unité de la

[1] Section efficace obtenue par développement de la théorie en série de puissances de la constante de couplage.
[2] Processus initial hautement énergétique.
[3] $\alpha = e^2/4\pi$ désigne la constante de couplage de l'interaction électromagnétique.

charge électronique, l'amplitude invariante correspondant au diagramme de la figure 2.1 s'écrit :

$$\mathcal{M} = \frac{Q_f\, e^2}{q^2} \overline{v}^{s'}(k')\gamma^\mu u^s(k)\overline{u}^r(p)\gamma_\mu v^{r'}(p'), \tag{2.1}$$

où s, s', r et r' désignent respectivement les spins de l'électron, du positron, du quark et de l'antiquark. Le carré de l'amplitude invariante, moyenné sur les spins de l'état initial et sommé sur les spins de l'état final, est donné par :

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4}\sum_{s,s'}\sum_{r,r'} \mathcal{M}\,\mathcal{M}^*. \tag{2.2}$$

En substituant à $\mathcal{M}$ la valeur donnée par l'expression (2.1), il vient alors :

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{Q_f^2\, e^4}{16(k\cdot k')^2} L^{\mu\rho} H_{\mu\rho}, \tag{2.3}$$

où $L^{\mu\rho}$ et $H_{\mu\rho}$ désignent respectivement les traces associées aux lignes de courant e^+e^- et $q\bar{q}$:

$$\begin{aligned} L^{\mu\rho} &= tr(\not{k}'\,\gamma^\mu\,\not{k}\,\gamma^\rho), & (2.4)\\ H_{\mu\rho} &= tr(\not{p}\,\gamma_\mu\,\not{p}'\,\gamma_\rho). & (2.5)\end{aligned}$$

Les expressions (2.4) et (2.5) se calculent aisément à l'aide de la relation :

$$tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}), \tag{2.6}$$

et l'on obtient ainsi pour $L^{\mu\rho}$ et $H_{\mu\rho}$:

$$\begin{aligned} L^{\mu\rho} &= 4\,(k^\mu k'^\rho - k\cdot k' g^{\mu\rho} + k'^\mu k^\rho), & (2.7)\\ H_{\mu\rho} &= 4\,(p_\mu p'_\rho - p\cdot p' g_{\mu\rho} + p'_\mu p_\rho). & (2.8)\end{aligned}$$

En tenant compte des relations (2.7) et (2.8), nous obtenons pour le carré de l'amplitude invariante (2.3) :

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{2Q_f^2\, e^4}{(k\cdot k')^2}(p\cdot k\;\; p'\cdot k' + p\cdot k'\;\; p'\cdot k). \tag{2.9}$$

L'introduction des variables s, t, u de Mandelstam :

$$\begin{aligned} s &= \left(k+k'\right)^2 = \left(p+p'\right)^2 = 2\,k\cdot k' = 2\,p\cdot p',\\ t &= (k-p)^2 = \left(p'-k'\right)^2 = -2\,k\cdot p = -2\,k'\cdot p',\\ u &= \left(k-p'\right)^2 = \left(p-k'\right)^2 = -2\,k\cdot p' = -2\,p\cdot k',\end{aligned} \tag{2.10}$$

nous permet alors de réécrire l'expression (2.9) sous la forme :

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 2Q_f^2\, e^4\, \frac{t^2+u^2}{s^2}. \tag{2.11}$$

Plaçons-nous à présent dans le référentiel du centre de masse[4]. Les variables de Mandelstam s'y écrivent :

$$\begin{aligned} s &= E_{tot}^2,\\ t &= -\frac{s}{2}(1-\cos\theta),\\ u &= -\frac{s}{2}(1+\cos\theta),\end{aligned} \tag{2.12}$$

[4]Ce processus étant réalisé dans un collisionneur, référentiels du centre de masse et du laboratoire coïncident.

E_{tot} désignant l'énergie totale et θ l'angle entre la direction du faisceau e^-e^+ et celle du quark. Dans le référentiel du centre de masse, le carré de l'amplitude invariante s'écrit dès lors :

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = Q_f^2\, e^4\, (1 + \cos^2\theta). \tag{2.13}$$

La section efficace différentielle y prend quant à elle la forme :

$$d\sigma = \frac{3}{F} d\Pi_2 \overline{|\mathcal{M}|^2}, \tag{2.14}$$

où F désigne le facteur de flux et $d\Pi_2$ l'élément de l'espace de phase à deux corps, respectivement donnés par :

$$F = 2s, \tag{2.15}$$
$$d\Pi_2 = \frac{1}{16\pi} d\cos\theta. \tag{2.16}$$

Dans la relation (2.14), la présence du facteur 3 trouve son origine dans la prise en considération du degré de liberté de couleur pour la paire $q\bar{q}$. Dans le référentiel du centre de masse, la section efficace différentielle s'écrit donc finalement :

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{3\pi}{2s} Q_f^2\, \alpha^2 (1 + \cos^2\theta), \tag{2.17}$$

où $\alpha = e^2/4\pi$ désigne la constante de couplage de l'interaction électromagnétique. Son comportement en fonction de l'angle polaire θ est représenté sur la figure 2.2.

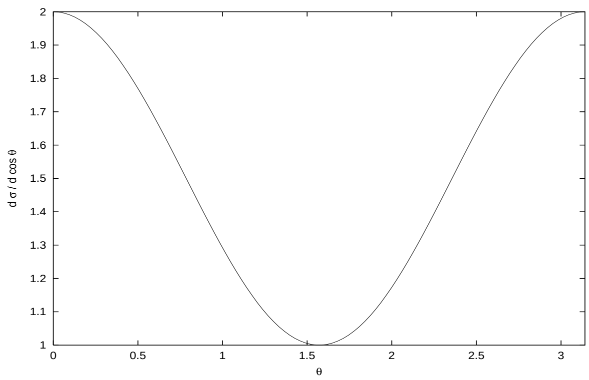


FIG. 2.2 – Section efficace différentielle du processus $e^+e^- \to q\,\bar{q}$ en fonction de l'angle polaire θ.

L'intégration de la relation (2.17) fournit la section efficace totale de l'annihilation $e^+e^- \to q\,\bar{q}$:

$$\sigma_{tot}(e^+e^- \to q\bar{q}) = \sigma_0 = \frac{4\pi\, Q_f^2\, \alpha^2}{s}. \tag{2.18}$$

Le quark et l'antiquark issus du processus d'annihilation étant des objets colorés, le principe de confinement[5] les rend non-observables. Expérimentalement, on constate alors que chacun des partons issus de l'interaction dure produit un jet de hadrons, c'est-à-dire un ensemble de hadrons possédant une faible impulsion transversale par rapport à la direction de propagation du parton qui leur a donné naissance et se concentrant dès lors dans un cône d'ouverture réduite [4]. C'est le processus d'hadronisation. L'annihilation $e^+e^- \to q\,\bar{q}$ engendre de cette façon un état hadronique final constitué de deux jets colinéaires, ainsi qu'illustré sur la figure 2.3 [5].

[5]La notion de confinement sera abordée plus en détail par la suite.

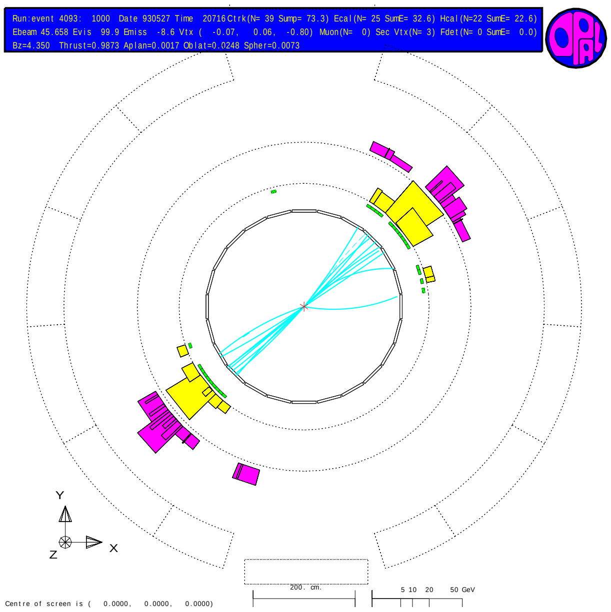


FIG. 2.3 – Evénement à deux jets correspondant au processus $e^+ e^- \to q\,\bar{q}$, observé au CERN dans le cadre du programme OPAL.

2.2 Cinématique de l'annihilation $e^+e^- \to q\,\bar{q}\,g$

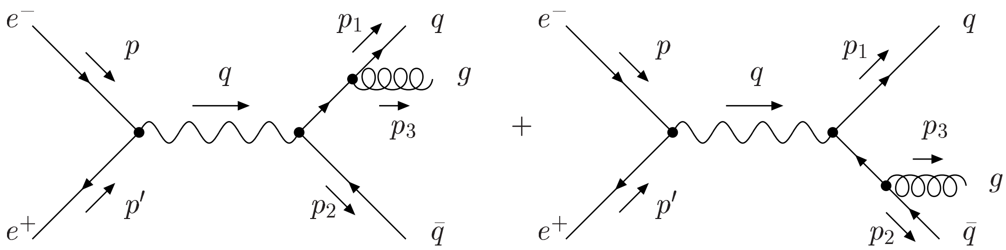


FIG. 2.4 – Diagrammes de Feynman pour le processus $e^+e^- \to q\,\bar{q}\,g$.

Considérons à présent le processus $e^+e^- \to q\,\bar{q}\,g$, illustré par les diagrammes de Feynman de la figure 2.4. A présent, l'annihilation s'accompagne de l'émission d'un gluon réel par le quark ou l'antiquark. Nous débutons par l'analyse cinématique de ce processus que nous envisageons dans le référentiel du centre de masse. Soient s le carré de l'énergie totale dans ce référentiel, p et p' les quadri-impulsions de l'électron et du positron, q la quadri-impulsion du photon virtuel et p_i celles des partons q, $\bar{q}$ et g de l'état final ($i = 1, 2, 3$ pour q, $\bar{q}$ et g respectivement). La fraction d'énergie x_i emportée par le parton i est définie par :

$$x_i = \frac{E_i}{\sqrt{s}/2} = \frac{2\,p_i \cdot q}{s} > 0. \tag{2.19}$$

La conservation de l'énergie implique :

$$\sum_{i=1}^{3} x_i = 2. \tag{2.20}$$

Seules deux des fractions x_i sont donc indépendantes. Soit θ_{ij} l'angle entre les impulsions des partons i et j. Nous pouvons relier ces angles aux fractions x_i de la manière suivante :

$$\begin{aligned} q &= p_1 + p_2 + p_3, \\ (p_1+p_2)^2 &= (q-p_3)^2, \\ 2\,E_1\,E_2\,(1-\cos\,\theta_{12}) &= s - 2\sqrt{s}\,E_3. \end{aligned} \tag{2.21}$$

En divisant l'équation (2.21) par $s/2$ et en répétant l'argument pour les deux autres paires de partons, nous obtenons trois relations pour les angles θ_{ij} [1] :

$$\begin{aligned} x_1\,x_2\,(1-\cos\,\theta_{12}) &= 2(1-x_3), \\ x_1\,x_3\,(1-\cos\,\theta_{13}) &= 2(1-x_2), \\ x_2\,x_3\,(1-\cos\,\theta_{23}) &= 2(1-x_1). \end{aligned} \tag{2.22}$$

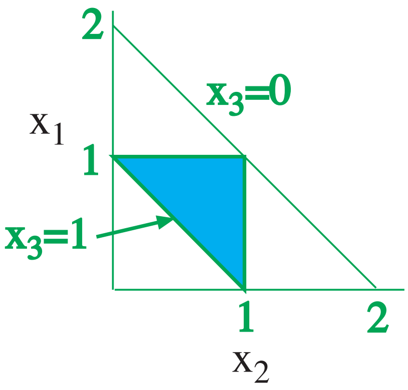
Nous pouvons immédiatement tirer deux conséquences des relations (2.22). Premièrement,

$$x_i \,<\, 1. \tag{2.23}$$

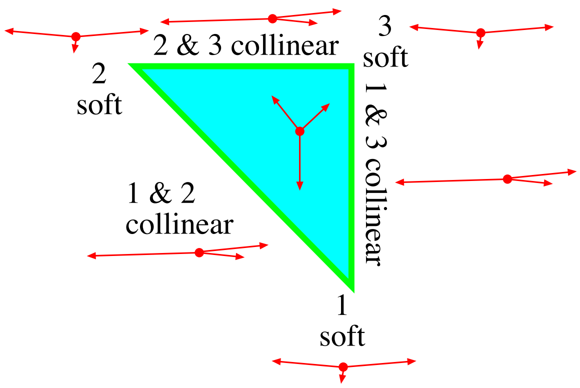
Deuxièmement, les trois configurations colinéaires possibles pour les partons q, $\bar{q}$ et g s'interprètent très simplement en terme des x_i :

$$\begin{aligned} &q \text{ et } \bar{q} \text{ colinéaires : } \theta_{12} \to 0 : \, x_3 \to 1, \\ &g \text{ et } \bar{q} \text{ colinéaires : } \theta_{23} \to 0 : \, x_1 \to 1, \\ &g \text{ et } q \text{ colinéaires : } \theta_{13} \to 0 : \, x_2 \to 1. \end{aligned} \tag{2.24}$$

La relation (2.20) et le fait que $0 < x_i < 1$ impliquent que la région physiquement permise dans le plan (x_1, x_2) est un triangle, comme indiqué sur la figure (2.5).



(a)



(b)

FIG. 2.5 – (a) Région physiquement permise dans le plan (x_1, x_2) et (b) configurations des trois partons aux limites de cette région.

Les côtés $x_i = 1$ de ce triangle correspondent aux configurations où deux des partons sont colinéaires, ses sommets $x_i = 0$ aux différentes situations où l'un des partons émis est faiblement énergétique.

2.3 Expression de la section efficace différentielle

Nous nous intéressons à nouveau à la section efficace différentielle non polarisée à haute énergie et négligeons donc l'ensemble des masses. Désignons par $\mathcal{M}_1$ l'amplitude invariante correspondant au diagramme de Feynman de la figure 2.4 où le gluon est attaché au quark et par $\mathcal{M}_2$ celle où le gluon est attaché à l'antiquark. Ces dernières ont pour expression :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1 &= \frac{-g\,Q_f\,e^2}{2\,q^2\,p_1\cdot p_3}\overline{v}^{s'}(p')\gamma^\mu u^s(p)\overline{u}^{r_1}(p_1)\gamma^\lambda t^a(\not p_1+\not p_3)\gamma_\mu v^{r_2}(p_2)\varepsilon_\lambda(p_3),\\ \mathcal{M}_2 &= \frac{g\,Q_f\,e^2}{2\,q^2\,p_2\cdot p_3}\overline{v}^{s'}(p')\gamma^\mu u^s(p)\overline{u}^{r_1}(p_1)\gamma_\mu(\not p_2+\not p_3)\gamma^\lambda t^a v^{r_2}(p_2)\varepsilon_\lambda(p_3),\end{aligned} \tag{2.25}$$

où s, s', r_1 et r_2 désignent respectivement les spins de l'électron, du positron, du quark et de l'antiquark, ε_λ représentant quant à lui le quadrivecteur de polarisation du gluon. Le carré de l'amplitude invariante totale, moyenné sur les spins de l'état initial et sommé sur les spins, les couleurs et les polarisations de l'état final, s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{1}{4}\sum_{s,s'}\sum_{r,r'}\sum_{\text{pol.}}\sum_{\text{couleur}}\left(|\mathcal{M}_1|^2+|\mathcal{M}_2|^2+\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^*+\mathcal{M}_2\mathcal{M}_1^*\right)\\ &= \overline{|\mathcal{M}_1|^2}+\overline{|\mathcal{M}_2|^2}+\overline{\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^*}+\overline{\mathcal{M}_2\mathcal{M}_1^*}.\end{aligned} \tag{2.26}$$

Le premier terme de l'expresssion (2.26) est donné par :

$$\overline{|\mathcal{M}_1|^2} = \frac{-g^2\,Q_f^2\,e^4}{16\,(p_1\cdot p_3)^2\,(p\cdot p')^2}\underbrace{tr(\not p'\,\gamma^\mu\,\not p\,\gamma^\nu)}_{I}\,\underbrace{tr(\not p_1\,\gamma_\rho\,(\not p_1+\not p_3)\,\gamma_\mu\,\not p_2\,\gamma_\nu\,(\not p_1+\not p_3)\,\gamma^\rho)}_{II}. \tag{2.27}$$

La trace I a déja été rencontrée dans les relations (2.4) et (2.7). La trace II se décompose en une somme de quatre termes dont trois sont proportionnels à p_1^2 et donc nuls, le quatrième s'écrivant :

$$tr(\gamma^\rho\not p_1\,\gamma_\rho\,\not p_3\,\gamma_\mu\,\not p_2\,\gamma_\nu\,\not p_3) = -16\,p_1\cdot p_3\,(p_{2\mu}p_{3\nu}-p_2\cdot p_3 g_{\mu\nu}+p_{3\mu}p_{2\nu}). \tag{2.28}$$

Le terme $\overline{|\mathcal{M}_1|^2}$ vaut dès lors :

$$\overline{|\mathcal{M}_1|^2} = \frac{4\,g^2\,Q_f^2\,e^4}{p_1\cdot p_3\;\;p_2\cdot p_3\;\;(p\cdot p')^2}\,L^{\mu\nu}H^{(1)}_{\mu\nu}, \tag{2.29}$$

où les traces $L^{\mu\nu}$ et $H^{(1)}_{\mu\nu}$ ont pour valeur :

$$\begin{aligned}L^{\mu\nu} &= p^\mu p'^\nu - p\cdot p' g^{\mu\nu} + p'^\mu p^\nu,\\ H^{(1)}_{\mu\nu} &= p_2\cdot p_3(p_{2\mu}p_{3\nu}-p_2\cdot p_3 g_{\mu\nu}+p_{3\mu}p_{2\nu}).\end{aligned} \tag{2.30}$$

La composante $\overline{|\mathcal{M}_2|^2}$ du carré de l'amplitude invariante totale s'obtient aisément à partir de la précédente en effectuant la substitution $2\to 1$ dans l'expression de la trace $H^{(1)}_{\mu\nu}$, et l'on a donc :

$$\overline{|\mathcal{M}_2|^2} = \frac{4\,g^2\,Q_f^2\,e^4}{p_1\cdot p_3\;\;p_2\cdot p_3\;\;(p\cdot p')^2}\,L^{\mu\nu}H^{(2)}_{\mu\nu}, \tag{2.31}$$

la trace $H^{(2)}_{\mu\nu}$ étant donnée par :

$$H^{(2)}_{\mu\nu} = p_1\cdot p_3(p_{1\mu}p_{3\nu}-p_1\cdot p_3 g_{\mu\nu}+p_{3\mu}p_{1\nu}). \tag{2.32}$$

Le terme d'interférence $\overline{\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^*}$ revêt pour sa part une forme un peu plus complexe, à savoir :

$$\overline{\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^*} = \frac{g^2\, Q_f^2\, e^4}{16\, p_1\cdot p_3\, p_2\cdot p_3\, (p\cdot p')^2}\, \underbrace{tr(\not p'\,\gamma^\mu\,\not p\,\gamma^\nu)}_{I}\, \underbrace{tr(\not p_1\,\gamma_\rho\,(\not p_1+\not p_3)\,\gamma_\mu\,\not p_2\,\gamma^\rho\,(\not p_2+\not p_3)\,\gamma_\nu)}_{II}. \quad (2.33)$$

La trace I est connue, la trace II est composée de quatre termes valant individuellement :

$$\begin{aligned}
tr(\not p_1\,\gamma_\rho\,\not p_1\,\gamma_\mu\,\not p_2\,\gamma^\rho\,\not p_2\,\gamma_\nu) &= 16p_1\cdot p_2\,(p_{1\mu}p_{2\nu} - p_1\cdot p_2\, g_{\mu\nu} + p_{2\mu}p_{1\nu}), && (2.34)\\
tr(\not p_1\,\gamma_\rho\,\not p_1\,\gamma_\mu\,\not p_2\,\gamma^\rho\,\not p_3\,\gamma_\nu) &= 16p_1\cdot p_2\,(p_{1\mu}p_{3\nu} - p_1\cdot p_3\, g_{\mu\nu} + p_{3\mu}p_{1\nu})\\
&- 16p_{1\mu}\,(p_1\cdot p_2\, p_{3\nu} - p_1\cdot p_3\, p_{2\nu} + p_2\cdot p_3\, p_{1\nu}), && (2.35)\\
tr(\not p_1\,\gamma_\rho\,\not p_3\,\gamma_\mu\,\not p_2\,\gamma^\rho\,\not p_2\,\gamma_\nu) &= 16p_2\cdot p_3\,(p_{1\mu}p_{2\nu} - p_1\cdot p_2\, g_{\mu\nu} + p_{2\mu}p_{1\nu})\\
&- 16p_{2\mu}\,(p_1\cdot p_3\, p_{2\nu} - p_1\cdot p_2\, p_{3\nu} + p_2\cdot p_3\, p_{1\nu}), && (2.36)\\
tr(\not p_1\,\gamma_\rho\,\not p_3\,\gamma_\mu\,\not p_2\,\gamma^\rho\,\not p_3\,\gamma_\nu) &= 0. && (2.37)
\end{aligned}$$

Nous trouvons donc pour $\overline{\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^*}$:

$$\overline{\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^*} = \frac{4\, g^2\, Q_f^2\, e^4}{p_1\cdot p_3\;\, p_2\cdot p_3\;\, (p\cdot p')^2}\, L^{\mu\nu} H^{(3)}_{\mu\nu}, \quad (2.38)$$

avec pour $H^{(3)}_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
H^{(3)}_{\mu\nu} = p_1\cdot p_2\, \Big[&p_{1\mu}p_{2\nu} + p_{2\mu}p_{1\nu} + p_{3\mu}p_{1\nu} + p_{2\mu}p_{3\nu} - (p_1\cdot p_2 + p_1\cdot p_3 + p_2\cdot p_3)\, g_{\mu\nu}\Big]\\
&+p_2\cdot p_3\,(p_{1\mu}p_{2\nu} - p_{1\mu}p_{1\nu}) + p_1\cdot p_3\,(p_{1\mu}p_{2\nu} - p_{2\mu}p_{2\nu}).
\end{aligned} \quad (2.39)$$

Le terme d'interférence $\overline{\mathcal{M}_2\mathcal{M}_1^*}$ s'obtient à partir du précédent en effectuant la substitution $\mu \leftrightarrow \nu$ dans l'expression de la trace $H^{(3)}_{\mu\nu}$. Nous obtenons dès lors pour cette dernière composante :

$$\overline{\mathcal{M}_2\mathcal{M}_1^*} = \frac{4\, g^2\, Q_f^2\, e^4}{p_1\cdot p_3\;\, p_2\cdot p_3\;\, (p\cdot p')^2}\, L^{\mu\nu} H^{(4)}_{\mu\nu}, \quad (2.40)$$

où $H^{(4)}_{\mu\nu}$ est donné par :

$$\begin{aligned}
H^{(4)}_{\mu\nu} = p_1\cdot p_2\, \Big[&p_{1\mu}p_{2\nu} + p_{2\mu}p_{1\nu} + p_{1\mu}p_{3\nu} + p_{3\mu}p_{2\nu} - (p_1\cdot p_2 + p_1\cdot p_3 + p_2\cdot p_3)\, g_{\mu\nu}\Big]\\
&+p_2\cdot p_3\,(p_{2\mu}p_{1\nu} - p_{1\mu}p_{1\nu}) + p_1\cdot p_3\,(p_{2\mu}p_{1\nu} - p_{2\mu}p_{2\nu}).
\end{aligned} \quad (2.41)$$

Le carré de l'amplitude invariante totale s'écrit finalement :

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{4\, g^2\, Q_f^2\, e^4}{(p\cdot p')^2}\, L^{\mu\nu}\, H_{\mu\nu}, \quad (2.42)$$

la trace $H_{\mu\nu}$ étant définie par :

$$H_{\mu\nu} = \frac{H^{(1)}_{\mu\nu} + H^{(2)}_{\mu\nu} + H^{(3)}_{\mu\nu} + H^{(4)}_{\mu\nu}}{p_1\cdot p_3\;\, p_2\cdot p_3}. \quad (2.43)$$

Nous aimerions simplifier le calcul du produit tensoriel apparaissant dans la relation (2.42). A cette fin, remarquons que la conservation du courant électromagnétique aux vertex des diagrammes de Feynman de la figure 2.4 permet d'établir les égalités :

$$\begin{aligned}
q_\mu\, H^{\mu\nu} &= q_\nu\, H^{\mu\nu} = 0,\\
q_\mu\, L^{\mu\nu} &= q_\nu\, L^{\mu\nu} = 0. \quad (2.44)
\end{aligned}$$

La première de ces relations nous indique que le tenseur $H^{\mu\nu}$ est de la forme :

$$H^{\mu\nu} = (g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}) H(q^2), \tag{2.45}$$

où $H(q^2)$ est un scalaire. Grâce à la seconde, le produit tensoriel envisagé peut dès lors s'écrire :

$$L^{\mu\nu} H_{\mu\nu} = \frac{1}{3} (L^{\mu\nu} g_{\mu\nu}) (H^{\rho\sigma} g_{\rho\sigma}). \tag{2.46}$$

Cet outil en main, nous pouvons aborder le calcul de la section efficace différentielle, laquelle s'écrit dans le référentiel du centre de masse :

$$d\sigma = \frac{1}{F} d\Pi_3 \overline{|\mathcal{M}|^2}, \tag{2.47}$$

où le facteur de flux est donné par la relation (2.15) et où l'élément de l'espace de phase à trois corps, exprimé en terme des fractions d'énergie x_1 et x_2, a pour valeur [2] :

$$d\Pi_3 = \frac{s}{128\pi^3} dx_1 \, dx_2. \tag{2.48}$$

La section efficace différentielle devient à présent :

$$\frac{d^2\sigma}{dx_1 dx_2} = \frac{1}{48\pi^3} \frac{g^2 \, Q_f^2 \, e^4}{s^2} (L^{\mu\nu} g_{\mu\nu}) (H^{\rho\sigma} g_{\rho\sigma}). \tag{2.49}$$

En notant les relations suivantes entre produits scalaires et fractions d'énergie :

$$\begin{aligned} p_1 \cdot p_2 &= s/2 \;\; (1 - x_3), \\ p_1 \cdot p_3 &= s/2 \;\; (1 - x_2), \\ p_2 \cdot p_3 &= s/2 \;\; (1 - x_1), \end{aligned} \tag{2.50}$$

et en recourant à l'expression (2.20), nous obtenons pour les deux produits tensoriels :

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu} g_{\mu\nu} &= -s, \\ H^{\rho\sigma} g_{\rho\sigma} &= -2 \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_1)(1 - x_2)}. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Finalement, la section efficace différentielle souhaitée s'écrit :

$$\frac{d^2\sigma}{dx_1 dx_2} = \frac{2\,\alpha_s}{3\pi} \sigma_0 \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_1)(1 - x_2)}. \tag{2.52}$$

Dans ce résultat, $\alpha_s = g^2/4\pi$ désigne la constante de couplage de l'interaction forte et σ_0 la section efficace totale du processus $e^+e^- \to q\bar{q}$ énoncée en (2.18). La section efficace (2.52) possède deux types de singularité. Elle présente des singularités colinéaires (divergences colinéaires) lorsque :

$$\begin{cases} x_1 \to 1 : g \text{ et } \bar{q} \text{ colinéaires }, \\ x_2 \to 1 : g \text{ et } q \text{ colinéaires }, \end{cases} \tag{2.53}$$

et une singularité dite soft ou infrarouge (divergence infrarouge) lorsque :

$$x_3 \to 0 \; : \text{ gluon faiblement énergétique, dit mou.} \tag{2.54}$$

Les configurations à l'origine de ces singularités sont représentées par les schémas de la figure 2.6. Ces derniers nous permettent de supposer que les états hadroniques finals, générés par le processus de fragmentation, constituent un événement à deux jets lorque l'on se situe aux frontières de l'espace physique de la figure 2.5. En effet, lorsque le gluon émis est colinéaire avec le quark ou l'antiquark, les jets auxquels ils donnent naissance ne peuvent être distingués. Quant au gluon mou, sa faible énergie ne lui permet qu'une faible hadronisation.

FIG. 2.6 – Configurations du gluon menant à la divergence de la section efficace : (a) le gluon est émis colinéairement avec le quark ou l'antiquark, (b) émission d'un gluon mou.

Si, au contraire, la configuration des partons correspond à un point de l'espace physique éloigné des côtés du triangle, on observe dans ce cas un événement à trois jets, ainsi qu'illustré sur la figure 2.7 [5].

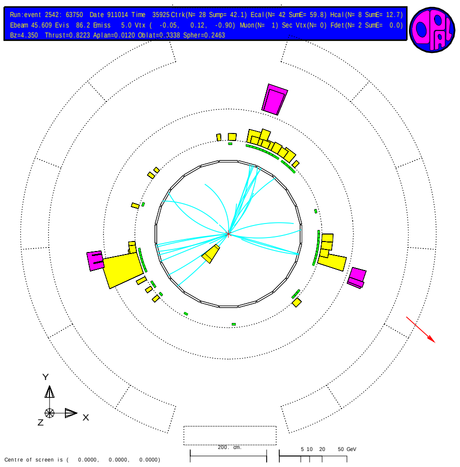


FIG. 2.7 – Evénement à trois jets correspondant au processus $e^+ e^- \to q\,\bar{q}\,g$, observé au CERN dans le cadre du programme OPAL.

L'affectation d'une masse μ au gluon nous permet de régulariser l'intégration de l'expression (2.52), et la section efficace totale du processus $e^+ e^- \to q\,\bar{q}\,g$ s'écrit alors :

$$\sigma_{tot}(e^+ e^- \to q\,\bar{q}\,g) = \frac{2\,\alpha_s}{3\pi}\,\sigma_0 \int_0^1 dx_1 \int_{1-x_1}^1 dx_2 \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_1 + \frac{\mu^2}{s})(1 - x_2 + \frac{\mu^2}{s})}. \tag{2.55}$$

Dans la limite où la masse du gluon tend vers zéro, nous obtenons ainsi[6], l'indice r se rapportant au caractère réel du gluon émis :

$$\sigma_r(e^+ e^- \to q\,\bar{q}\,g) = \frac{2\,\alpha_s}{3\pi}\,\sigma_0 \left[\frac{5}{2} - \frac{\pi^2}{3} + 3\ln\left(\frac{\mu^2}{s}\right) + 2\ln^2\left(\frac{\mu^2}{s}\right)\right]. \tag{2.56}$$

Les divergences logarithmiques apparaissant dans la section efficace totale (2.56) signifient-elles l'échec de la théorie perturbative ? Un élément de réponse pertinent consiste à déterminer l'échelle de temps caractéristique des phénomènes donnant naissance aux divergences. Les coordonnées du cône de lumière étant appropriées à cette démarche, la section suivante leur est consacrée.

[6]Intégrale réalisée à l'aide du programme REDUCE.

2.4 Interlude : Les coordonnées du cône de lumière

Afin de révéler davantage l'origine des singularités rencontrées, nous allons à présent introduire un concept très utile en physique des hautes énergies : les coordonnées du cône de lumière [1]. L'idée nouvelle est de décrire la quadri-impulsion d'une particule à l'aide du quadri-vecteur :

$$p = (p^+, p^-, \vec{p}_T), \tag{2.57}$$

où les composantes $p^{\pm}$ et l'impulsion transversale $\vec{p}_T$ sont définies par :

$$\begin{aligned} p^{\pm} &= \frac{p^0 \pm p^3}{\sqrt{2}}, && (2.58)\\ \vec{p}_T &= (p_1, p_2). && (2.59) \end{aligned}$$

Pour une particule possédant une composante élevée de l'impulsion dans la direction z et une faible composante transversale, p^+ est important et p^- faible. Dans ces conditions, l'on a en effet pour une particule sur couche :

$$p^0 \simeq p^3 \left(1 + \frac{|\vec{p}_T|^2}{2\,(p^3)^2}\right), \tag{2.60}$$

et les composantes p^+ et p^- satisfont dès lors les relations :

$$\begin{aligned} p^+ &\simeq p^3 \gg, \\ p^- &\simeq \frac{|\vec{p}_T|^2}{p^3} \ll . && (2.61) \end{aligned}$$

L'emploi des coordonnées du cône de lumière permet d'écrire le carré de la quadri-impulsion d'une particule sous la forme :

$$p^2 = 2\,p^+\,p^- - |\vec{p}_T|^2 . \tag{2.62}$$

Pour une particule de masse m située sur sa couche de masse, les composantes p^+ et p^- vérifient donc :

$$\begin{aligned} p^- &= \frac{|\vec{p}_T|^2 + m^2}{2\,p^+}, && (2.63)\\ p^{\pm} &> 0. && (2.64) \end{aligned}$$

La relation (2.63) nous indique que la trajectoire d'une telle particule se réduit à une hyperbole équilatère dans les axes (p^+, p^-), ainsi que représenté sur la figure 2.8.

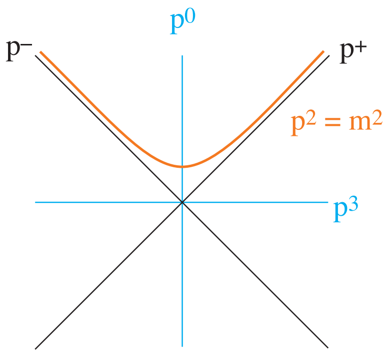


FIG. 2.8 – Trajectoire d'une particule sur couche dans les axes (p^+, p^-).

De manière similaire, on peut également redéfinir le quadrivecteur position d'une particule par :

$$x = (x^+, x^-, \vec{x}_T), \tag{2.65}$$

où les composantes $x^\pm$ et la position transversale $\vec{x}_T$ sont définies par :

$$\begin{aligned} x^\pm &= \frac{x^0 \pm x^3}{\sqrt{2}}, \\ \vec{x}_T &= (x_1, x_2). \end{aligned} \tag{2.66}$$

La description d'un système de particules se déplaçant dans la direction z à une vitesse proche de celle de la lumière nous permet d'assimiler la composante x^+ à un paramètre d'évolution temporelle, car nous pouvons écrire dans ce cas :

$$x^+ \simeq x^0, \tag{2.67}$$

$$x^- \simeq 0. \tag{2.68}$$

Classiquement, les trajectoires des particules se réduisent alors quasiment à des parallèles à l'axe x^+. Nous terminons cet interlude par la relation qui existe entre les variables $x^\pm$ et $p^\pm$. Les descriptions d'un système quantique dans l'espace des coordonnées et dans l'espace des impulsions sont reliées par transformée de Fourier. Le facteur $e^{i\,p\cdot x}$ qui apparaît dans cette dernière peut s'écrire sous la forme :

$$e^{i\,p\cdot x} = e^{i\,(p^+\,x^- + p^-\,x^+ - \vec{p}_T\cdot\vec{x}_T)}. \tag{2.69}$$

On conclut de l'expression (2.69) que x^- est conjugué à p^+ et x^+ à p^-, relation dont nous tirerons profit.

2.5 Analyse spatio-temporelle des singularités

Retournons à présent aux singularités observées dans l'annihilation $e^+e^- \to q\,\bar{q}\,g$, auxquelles nous allons appliquer l'outil développé dans la section précédente [1]. En orientant l'axe z selon la direction de propagation du quark virtuel et en désignant la quadri-impulsion de ce dernier par $k = p_1 + p_3$, les coordonnées du cône de lumière satisfont à :

$$\begin{aligned} &k^+ \gg, \\ &\vec{k}_T = \vec{0}. \end{aligned} \tag{2.70}$$

L'utilisation de la relation (2.62) nous permet d'obtenir la valeur de la composante k^- :

$$k^- = \frac{|\vec{p}_{1,T}|^2}{2p_1^+} + \frac{|\vec{p}_{3,T}|^2}{2p_3^+}. \tag{2.71}$$

Les différentes configurations cinématiques pour lesquelles cette variable adopte une faible valeur sont résumées dans le tableau ci-dessous :

$\lvert\vec{p}_{3,T}\rvert \ll$ p_1^+, p_3^+ fixés	quark et gluon colinéaires singularité colinéaire
$\lvert\vec{p}_{3,T}\rvert \ll$ $p_3^+ \propto \lvert\vec{p}_{3,T}\rvert \ll$	gluon soft singularité infrarouge
$\lvert\vec{p}_{1,T}\rvert \ll$ $p_1^+ \propto \lvert\vec{p}_{1,T}\rvert \ll$	quark soft absence de singularité

Son examen nous permet de constater que les singularités colinéaire et infrarouge sont associées à de faibles valeurs de k^-. Considérons alors la transformée de Fourier qui relie le propagateur du quark dans l'espace des coordonnées, $S_F(x)$, à son propagateur dans l'espace des impulsions, $S_F(k)$:

$$S_F(k) = \int dx^+ \, dx^- \, d\vec{x}_T \, e^{i(k^+ x^- + k^- x^+ - \vec{k}_T \cdot \vec{x}_T)} \, S_F(x). \tag{2.72}$$

Lorsque k^+ est important et k^- faible, les valeurs de x contribuant à l'intégrale (2.72) possèdent de faibles composantes x^- et de larges composantes x^+, et ce en vertu de la relation de conjugaison existant entre ces variables. Le quark se propage dès lors sur une longue distance dans la direction x^+ avant de se désintégrer en la paire quark-gluon, ce qui est représenté sur la figure 2.9 (b). Ainsi, l'émission du gluon réel, dont découlent les singularités colinéaire et infrarouge, correspond à des interactions dont l'échelle de temps est élevée par rapport à celle du processus qui a donné naissance à la paire quark-antiquark initiale. Ce dernier, le processus dur, s'effectue à une échelle de temps $\Delta t \sim 1/\sqrt{s}$, correspondant à la virtualité du photon. L'émission du gluon réel a dès lors lieu après un intervalle $\Delta t \gg 1/\sqrt{s}$.

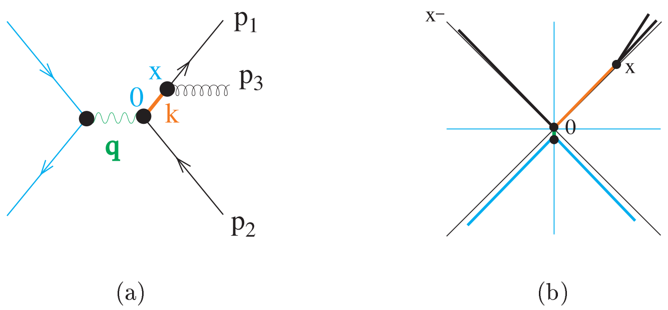


FIG. 2.9 – Développement du système q, $\bar{q}$, g dans l'espace des impulsions (a) et dans l'espace-temps (b).

2.6 Contributions à courte portée

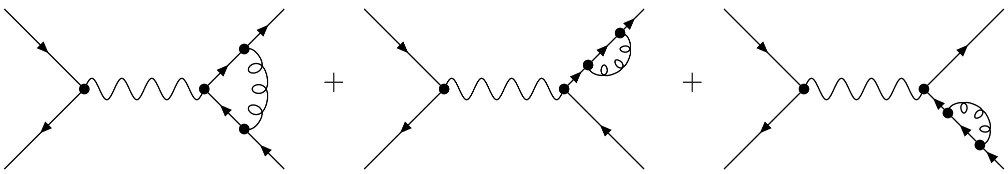


FIG. 2.10 – Corrections virtuelles à l'ordre α_s pour le processus $e^+e^- \to q\bar{q}$.

Résumons nos acquis et divisons les apports à la section efficace différentielle en contributions à longue portée et en processus dur. Pour ce dernier, la théorie perturbative est d'application et permet une compréhension de l'annihilation $e^+e^- \to q\bar{q}$ à l'ordre α_s^0. Les contributions à longue portée, dont découlent les singularités colinéaire et infrarouge que fait apparaître le gluon, semblent au contraire faire échouer le développement perturbatif. Nous avons également montré que la théorie perturbative suggère une certaine structure de l'état final produit lors des annihilations $e^+e^- \to q\,\bar{q}$ et $e^+e^- \to q\,\bar{q}\,g$. Cette prédiction qualitative, confortée par l'expérience, consiste en jets de particules à peu près colinéaires, auxquels viennent s'ajouter des particules de plus faible énergie se déplaçant dans des directions aléatoires. Ces considérations étant faites, nous aimerions voir disparaître les divergences logarithmiques rencontrées dans la section efficace totale (2.56). Cet objectif est réalisé par la prise en considération des contributions à courte portée, caractérisées par une échelle de temps $\Delta t \ll 1/\sqrt{s}$. Dans le cas de l'annihilation $e^+e^- \to q\,\bar{q}$, ces corrections virtuelles, à l'ordre α_s du développement perturbatif, sont illustrées par les diagrammes de Feynman de la figure 2.10. Le premier de ces diagrammes représente la correction au vertex électromagnétique par échange d'un gluon entre le quark et l'antiquark, les deux autres, les corrections au propagateur du quark et de l'antiquark respectivement. Nous verrons ainsi que la section efficace totale du processus $e^+e^- \to q\,\bar{q}$ ou $q\,\bar{q}\,g$ est bel et bien finie lorsque ces émissions virtuelles sont prises en compte. Mais auparavant, nous allons décrire plus en détail chacune de ces contributions à courte portée [2].

2.6.1 Correction au vertex

La correction au vertex modifie la manière avec laquelle champ et particule se couplent l'un à l'autre. Le vertex $-ie\gamma^\mu$ se voit ainsi modifié en un nouveau vertex $-ie\Gamma^\mu$ dont nous pouvons établir la forme en recourant aux symétries de la théorie. Pour cela, considérons le diagramme de la figure 2.11 correspondant à la diffusion d'un quark par un électron.

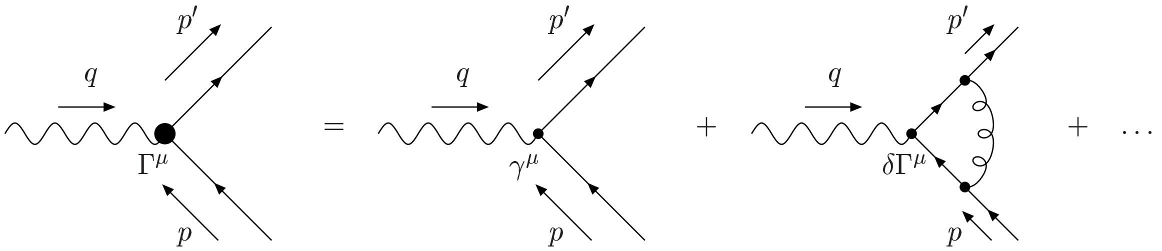


FIG. 2.11 – Diffusion d'une particule avec correction au vertex.

Désignons respectivement par p et p' les quadri-impulsions initial et final du quark diffusé et par $q = p' - p$ la quadri-impulsion du photon. Etant donné que Γ^μ, tout comme γ^μ, se comporte comme un vecteur sous le groupe de Lorentz, le vertex modifié doit pouvoir s'exprimer sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs γ^μ, p^μ et p'^μ. En choisissant pour la commodité les combinaisons $p' + p$ et $p' - p$, nous obtenons donc pour Γ^μ :

$$\Gamma^\mu = A\gamma^\mu + B(p'^\mu + p^\mu) + C(p'^\mu - p^\mu), \tag{2.73}$$

les coefficients A, B et C désignant des scalaires fonction uniquement de l'invariant q^2. L'ensemble des vecteurs Γ^μ satisfaisant à la relation (2.73) peut être réduit par application de l'identité de Ward à l'amplitude invariante de la figure 2.11 :

$$\overline{u}(p')q_\mu\Gamma^\mu u(p) = 0. \tag{2.74}$$

En substituant à Γ^μ l'expression (2.73), on obtient alors :

$$\overline{u}(p')\big(A\not{q} + Bq\cdot(p' + p) + Cq^2\big)u(p) = 0. \tag{2.75}$$

A l'aide des égalités $\not{p}u(p) = mu(p)$ et $\overline{u}(p')\not{p}' = m\overline{u}(p')$, on remarque que le premier terme de la relation (2.75) s'annule. Il en est de même pour le deuxième. Le troisième terme, par contre, n'est pas identiquement nul, et l'on déduit donc que le coefficient $C = 0$. Le vertex Γ^μ vaut dès lors :

$$\Gamma^\mu = A\gamma^\mu + B(p'^\mu + p^\mu). \tag{2.76}$$

Par convention, on réécrit l'expression (2.76) en recourant à l'identité de Gordon :

$$\overline{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \overline{u}(p')\Big[\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\Big]u(p), \tag{2.77}$$

où $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. En désignant le coefficient $A + 2mB$ par F_1 et $-2mB$ par F_2, Γ^μ se met finalement sous la forme :

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}F_2(q^2). \tag{2.78}$$

Les fonctions inconnues F_1 et F_2 portent le nom de facteurs de forme. A l'ordre le plus bas de la théorie perturbative, $F_1 = 1$ et $F_2 = 0$.

2.6.2 Correction au propagateur du quark

A nouveau, des considérations théoriques peuvent nous permettre d'établir la forme générale de cette correction. Pour la simplicité du raisonnement, nous envisageons le cas d'un champ scalaire Φ, le résultat final étant analogue pour un champ fermionique. Pour un champ scalaire Φ libre, le propagateur d'une particule entre les points y et x de l'espace-temps est donné par :

$$\begin{aligned}\langle\, 0 \,|\, T\,\Phi(x)\,\Phi(y) \,|\, 0 \,\rangle &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}e^{-ip\cdot(x-y)} \\ &= D_F(x-y, m_0^2),\end{aligned} \tag{2.79}$$

où le vecteur d'état $|\, 0 \,\rangle$ désigne le vide de la théorie libre, m_0 la masse de la particule [7] et T le produit ordonné dans le temps. Son expression dans l'espace des impulsions vaut quant à elle :

$$\int d^4x\, e^{ip\cdot x}\, \langle\, 0 \,|\, T\,\Phi(x)\,\Phi(0) \,|\, 0 \,\rangle = \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}. \tag{2.80}$$

Dans une telle théorie, seuls existent des états à une particule et la relation de complétude s'écrit dès lors :

$$\mathbb{1} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\vec{p}}}|\, \vec{p}\,\rangle\langle\, \vec{p}\,|, \tag{2.81}$$

le vecteur$|\,\vec{p}\rangle$ représentant un état à une particule, de masse m_0, d'impulsion $\vec{p}$ et d'énergie :

$$E_{\vec{p}} = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_0^2}. \tag{2.82}$$

Pour ce même champ scalaire, mais cette fois en interaction, le propagateur entre les points y et x de l'espace-temps s'écrit :

$$\langle\, \Omega \,|\, T\,\Phi(x)\,\Phi(y) \,|\, \Omega \,\rangle\,, \tag{2.83}$$

où le vecteur d'état $|\, \Omega \,\rangle$ désigne le vide de la théorie en interaction. A présent, des états à plusieurs particules sont possibles et la relation de complétude (2.81) doit être étendue à la globalité de l'espace de Hilbert. Soit donc $\big|\, \lambda_{\vec{p}} \,\big\rangle$ l'état propre à λ particules du hamiltonien d'interaction H, d'impulsion $\vec{p}$, d'énergie $E_{\vec{p}}(\lambda)$ et de masse m_λ définie par :

$$m_\lambda \equiv \sqrt{E_{\vec{p}}^2(\lambda) - |\vec{p}|^2}. \tag{2.84}$$

L'opérateur d'impulsion $\vec{P}$ commutant avec le hamiltonien H, cet état est également état propre de $\vec{P}$, et l'on a :

$$P\,\big|\, \lambda_{\vec{p}} \,\big\rangle = p\,\big|\, \lambda_{\vec{p}} \,\big\rangle\,, \tag{2.85}$$

[7] Qui coïncide ici avec le paramètre du lagrangien.

où les quadrivecteurs P et p sont donnés par :

$$\begin{aligned} P &= (\,H,\,\vec{P}\,), \\ p &= (\,E_{\vec{p}}(\lambda),\,\vec{p}\,). \end{aligned} \tag{2.86}$$

Avec ces notations, la relation de complétude de la théorie en interaction a pour expression :

$$\mathbb{1} = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}(\lambda)} |\,\lambda_{\vec{p}}\,\rangle\langle\,\lambda_{\vec{p}}\,|. \tag{2.87}$$

L'introduction de cette dernière entre les champs $\Phi(x)$ et $\Phi(y)$ du propagateur (2.83) permet d'écrire, en supposant $x^0 > y^0$:

$$\langle\,\Omega\,|\,\Phi(x)\,\Phi(y)\,|\,\Omega\,\rangle = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}(\lambda)} \left\langle\,\Omega\,|\,\Phi(x)\,|\,\lambda_{\vec{p}}\,\right\rangle\langle\,\lambda_{\vec{p}}\,|\,\Phi(y)\,|\,\Omega\,\rangle\,. \tag{2.88}$$

Le calcul des éléments de matrice apparaissant dans la relation (2.88) s'effectue en recourant notamment aux propriétés des transformations de Lorentz. Désignons par $\left|\,\lambda_{\vec{0}}\,\right\rangle$ l'état propre à λ particules du hamiltonien d'interaction H, d'impulsion nulle et de masse $m_\lambda = E_{\vec{0}}(\lambda)$, et par U l'opérateur unitaire correspondant à une transformation de Lorentz entre $\vec{0}$ et $\vec{p}$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \vec{P}\,\left|\,\lambda_{\vec{0}}\,\right\rangle &= \vec{0}, \\ U\,\left|\,\lambda_{\vec{0}}\,\right\rangle &= \left|\,\lambda_{\vec{p}}\,\right\rangle. \end{aligned} \tag{2.89}$$

En utilisant premièrement l'invariance du vide par translation :

$$e^{-iP\cdot x}\,|\,\Omega\,\rangle = |\,\Omega\,\rangle\,, \tag{2.90}$$

l'élément de matrice $\left\langle\,\Omega\,|\,\Phi(x)\,|\,\lambda_{\vec{p}}\,\right\rangle$ peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \left\langle\,\Omega\,|\,\Phi(x)\,|\,\lambda_{\vec{p}}\,\right\rangle &= \left\langle\,\Omega\,|\,e^{iP\cdot x}\,\Phi(0)\,e^{-iP\cdot x}\,|\,\lambda_{\vec{p}}\,\right\rangle \\ &= \left\langle\,\Omega\,|\,\Phi(0)\,|\,\lambda_{\vec{p}}\,\right\rangle e^{-ip\cdot x}\Big|_{p^0=E_{\vec{p}}(\lambda)}. \end{aligned} \tag{2.91}$$

En recourant ensuite à l'invariance du vide et du champ scalaire sous une transformation de Lorentz :

$$\begin{aligned} U\,|\,\Omega\,\rangle &= |\,\Omega\,\rangle\,, \\ U\Phi(0)U^{-1} &= \Phi(0), \end{aligned} \tag{2.92}$$

l'élément de matrice considéré devient :

$$\begin{aligned} \left\langle\,\Omega\,|\,\Phi(x)\,|\,\lambda_{\vec{p}}\,\right\rangle &= \left\langle\,\Omega\,|\,U\Phi(0)U^{-1}\,|\,\lambda_{\vec{p}}\,\right\rangle e^{-ip\cdot x}\Big|_{p^0=E_{\vec{p}}(\lambda)} \\ &= \left\langle\,\Omega\,|\,\Phi(0)\,|\,\lambda_{\vec{0}}\,\right\rangle e^{-ip\cdot x}\Big|_{p^0=E_{\vec{p}}(\lambda)}. \end{aligned} \tag{2.93}$$

On obtient ainsi pour le propagateur (2.83), avec $x^0 > y^0$:

$$\langle\,\Omega\,|\,\Phi(x)\,\Phi(y)\,|\,\Omega\,\rangle = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}(\lambda)} e^{-ip\cdot(x-y)}\Big|_{p^0=E_{\vec{p}}(\lambda)} \left|\,\left\langle\,\Omega\,|\,\Phi(0)\,|\,\lambda_{\vec{0}}\,\right\rangle\,\right|^2. \tag{2.94}$$

En introduisant à présent une intégration sur p^0 :

$$\int \frac{dp^0}{2\pi} \frac{i}{p^2 - m_\lambda^2 + i\epsilon} e^{-ip\cdot(x-y)} = \frac{1}{2E_{\vec{p}}(\lambda)} e^{-ip\cdot(x-y)}\Big|_{p^0=E_{\vec{p}}(\lambda)}, \tag{2.95}$$

le propagateur (2.83) s'écrit finalement, avec $x^0 > y^0$:

$$\langle\, \Omega \,|\, \Phi(x)\, \Phi(y) \,|\, \Omega \,\rangle = \sum_\lambda D_F(x-y, m_\lambda^2) \big|\, \langle\, \Omega \,|\, \Phi(0) \,|\, \lambda_{\vec{0}} \,\rangle \,\big|^2, \tag{2.96}$$

où $D_F(x-y, m_\lambda^2)$ désigne le propagateur de la théorie libre avec m_0 remplacé par m_λ :

$$D_F(x-y, m_\lambda^2) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m_\lambda^2 + i\epsilon} e^{-ip\cdot(x-y)}. \tag{2.97}$$

En remarquant que l'élément de matrice $\big|\, \langle\, \Omega \,|\, \Phi(0) \,|\, \lambda_{\vec{0}} \,\rangle \,\big|^2$ représente la probabilité de création de l'état $\big|\, \lambda_{\vec{0}} \,\rangle$ par application du champ $\Phi(0)$ au vide, la signification physique de l'expression (2.96) apparaît clairement : le propagateur exact de la théorie en interaction peut s'écrire comme une combinaison linéaire de propagateurs d'états à λ particules, les coefficients du développement correspondant aux probabilités de création de chacun de ces états. Le cas $x_0 < y_0$ conduit à une expression semblable, et les deux situations peuvent être résumées en une seule au moyen de la représentation spectrale de Källén-Lehmann :

$$\langle\, \Omega \,|\, T\, \Phi(x)\, \Phi(y) \,|\, \Omega \,\rangle = \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) D_F(x-y, M^2), \tag{2.98}$$

où la densité spectrale $\rho(M^2)$ est définie par :

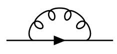
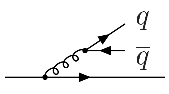
$$\rho(M^2) = 2\pi \sum_\lambda \delta(M^2 - m_\lambda^2) \big|\, \langle\, \Omega \,|\, \Phi(0) \,|\, \lambda_{\vec{0}} \,\rangle \,\big|^2. \tag{2.99}$$

La densité spectrale (2.99) peut s'écrire comme la somme d'une contribution isolée correspondant à l'état à une particule et d'une contribution continue correspondant au continuum des états à deux particules ou plus :

$$\rho(M^2) = 2\pi\delta(M^2 - m^2) Z + \rho(M^2 \geqslant 4m^2). \tag{2.100}$$

Dans l'expression (2.100), Z désigne l'élément de matrice $\big|\, \langle\, \Omega \,|\, \Phi(0) \,|\, 1_{\vec{0}} \,\rangle \,\big|^2$, correspondant à la probabilité de création d'un état à une particule par application du champ en interaction au vide $|\,\Omega\rangle$. La masse m représente quant à elle la masse physique de la particule, qui ne s'identifie au paramètre m_0 du lagrangien que dans le cas de la théorie libre. Dans l'espace des impulsions, le propagateur de Källén-Lehmann s'écrit :

$$\begin{aligned} \int d^4x\, e^{ip\cdot x} \langle\, \Omega \,|\, T\, \Phi(x)\, \Phi(0) \,|\, \Omega \,\rangle &= \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon} \\ &= \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \int_{4m^2}^\infty \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon} \qquad (2.101) \end{aligned}$$

$= \Big[$ $+$  $+ \cdots \Big] + i \Big|$ 

$+ \cdots \Big|^2$

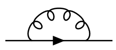
$p^2 > 4m_q^2$

On comparera cette dernière expression au propagateur (2.80) de la théorie libre, duquel elle diffère par la présence du facteur Z et par la contribution des états à plusieurs particules. De tels états sont en effet absents de la théorie libre, pour laquelle le facteur Z vaut d'autre part :

$$Z = \big|\, \langle\, \Omega \,|\, \Phi(0) \,|\, 1_{\vec{0}} \,\rangle \,\big|^2 = 1. \tag{2.102}$$

On écrit dès lors :

$$\int d^4x\, e^{ip\cdot x} \langle\, \Omega \,|\, T\, \Phi(x)\, \Phi(0) \,|\, \Omega\, \rangle \;=\; \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$=$ $+$  $+ \cdots$ (2.103)

Si l'on considère à présent le champ fermionique d'un quark en interaction, son propagateur s'écrira, par analogie avec la relation (2.103) :

$$\begin{aligned} \int d^4x\, e^{ip\cdot x} \left\langle\, \Omega \,|\, T\, \psi(x)\, \overline{\psi}(0) \,|\, \Omega\, \right\rangle &= \frac{iZ_2 \sum_s u^s(p)\overline{u}^s(p)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \ldots \\ &= \frac{iZ_2(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \ldots, \end{aligned} \tag{2.104}$$

où les états du continuum ont été négligés. Le facteur Z_2 représente la probabilité de création ou d'annihilation d'un état propre à une particule du hamiltonien d'interaction, par application du champ fermionique au vide :

$$\langle\, \Omega \,|\, \psi(0) \,|\, p, s\, \rangle = \sqrt{Z_2}\, u^{(s)}(p). \tag{2.105}$$

Ce terme porte le nom de facteur de renormalisation des champs. En effet, en redéfinissant le champ de Dirac par la relation :

$$\psi = \sqrt{Z_2}\psi_r, \tag{2.106}$$

où ψ_r désigne le champ renormalisé, on peut faire disparaître Z_2 du propagateur en le réabsorbant dans le lagrangien. Cette vision du problème sera abordée par la suite.

2.7 Section efficace totale du processus $e^+e^- \to q\,\bar{q}$ ou $q\,\bar{q}\,g$

Nous connaissons à présent la forme générale que revêtent les corrections au vertex et au propagateur. Malheureusement, l'obtention de ces dernières à l'ordre α_s du développement perturbatif, représenté par les diagrammes de Feynman de la figure 2.10, pose de sérieuses difficultés. Ainsi, la correction au vertex électromagnétique par échange d'un gluon entre le quark et l'antiquark a pour expression :

$$\delta\Gamma^\mu = ig^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\rho(\not{k} + m)\gamma^\mu(\not{q} - \not{k} - m)\gamma_\rho}{(k^2 - m^2)[(q-k)^2 - m^2](k-p)^2} t^a t^a, \tag{2.107}$$

où p, q et $k - p$ représentent respectivement les quadri-impulsions du quark, du photon et du gluon. La correction au propagateur du quark s'écrit quant à elle :

$$\delta Z_2 = -g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\mu(\not{k} + m)\gamma^\mu}{(k^2 - m^2)(k-p)^2} t^a t^a. \tag{2.108}$$

La correction au propagateur de l'antiquark revêt une forme similaire à l'expression (2.108). Ces intégrales présentent deux types de divergence : des divergences ultraviolettes dans la région où $k \to \infty$ et des divergences infrarouges dans la limite où $k \to 0$. Elles nécessitent dès lors une double régularisation afin d'en extraire la partie finie. Si l'on choisit par exemple le schéma de régularisation de Pauli-Villars, les divergences ultraviolettes sont régularisées en affectant une masse $\Lambda \to \infty$ au gluon. Plus exactement, le propagateur du gluon est remplacé par :

$$\frac{1}{(k-p)^2} \to \frac{1}{(k-p)^2} - \frac{1}{(k-p)^2 - \Lambda^2}. \tag{2.109}$$

Les divergences infrarouges sont traîtées comme précédemment en attribuant cette fois une masse $\mu \to 0$ au gluon. Son propagateur devient alors :

$$\frac{1}{(k-p)^2} \to \frac{1}{(k-p)^2 - \mu^2}. \tag{2.110}$$

Outre ces procédures, le calcul des intrégrales (2.107) et (2.108) nécessite le passage de l'espace de Minkowski à l'espace euclidien, la métrique de ce dernier rendant les développements plus aisés. Cette transition est réalisée en recourant à la rotation de Wick. Nous n'effectuons pas ces calculs explicitement et nous concentrons immédiatement sur le résultat final. Ce dernier montre que les divergences ultraviolettes présentes dans $\delta F_1(0)$ et δZ_2 se compensent mutuellement, la correction $\delta F_2(q^2)$ étant quant à elle finie. La section efficace totale de l'annihilation $e^+e^- \to q\,\bar{q}$, corrigée par l'émission d'un gluon virtuel, ne fait dès lors plus apparaître que les divergences infrarouges que génère le terme $\delta F_1(q^2) - \delta F_1(0)$, et l'on obtient [3] :

$$\begin{aligned} \sigma_{tot}(e^+\,e^- \to q\,\bar{q}\,) &= \sigma_0 + \sigma_v \\ &= \sigma_0 + \frac{2\,\alpha_s}{3\pi}\,\sigma_0\left[\frac{\pi^2}{3} - 1 - 3\ln\big(\frac{\mu^2}{s}\big) - 2\ln^2\big(\frac{\mu^2}{s}\big)\right] \\ &\propto |\mathcal{M}_\gamma + \mathcal{M}_{gv}|^2\,, \end{aligned} \tag{2.111}$$

où $\mathcal{M}_\gamma$ et $\mathcal{M}_{gv}$ désignent respectivement les amplitudes invariantes correspondant aux diagrammes de Feynman des figures 2.1 et 2.10, l'indice v se rapportant quant à lui au caractère virtuel du gluon émis. Nous remarquons que les divergences présentes dans la relation (2.111) se compensent exactement avec celles que possède l'expression (2.56), et la section efficace totale du processus $e^+e^- \to q\,\bar{q}$ ou $q\,\bar{q}\,g$ s'écrit finalement :

$$\begin{aligned} \sigma_{tot}(e^+e^- \to q\,\bar{q}\text{ ou }q\,\bar{q}\,g) &= \sigma_r(e^+\,e^- \to q\,\bar{q}\,g) + \sigma_0(e^+\,e^- \to q\,\bar{q}\,) + \sigma_v(e^+\,e^- \to q\,\bar{q}\,) \\ &= \sigma_0\,(1 + \frac{\alpha_s}{\pi}). \end{aligned} \tag{2.112}$$

La disparition des divergences colinéaires trouve son origine physique dans le fait qu'il est impossible, expérimentalement, de distinguer un quark d'un quark accompagné d'un gluon colinéaire. On peut en outre démontrer que l'annulation des singularités infrarouges entre émission réelle et virtuelle constitue en réalité une propriété générale de la QCD, valable à tout ordre du développement perturbatif. Elle assure la stabilité infrarouge de la section efficace totale, son indépendance vis-à-vis des contributions à longue portée. Le processus d'hadronisation faisant partie de ces dernières, il ne modifie en rien la section efficace totale lorsque l'on passe du niveau partonique au niveau hadronique, et nous pouvons dès lors immédiatemment écrire[8] :

$$\sigma_{tot}(e^+e^- \to hadrons) = \sigma_0\,\left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi}\right). \tag{2.113}$$

Evidemment, si cette quantité était la seule à jouir de cette propriété, la physique des hautes énergies deviendrait assez rapidement pour le moins ennuyeuse. Il existe heureusement d'autres observables qui possèdent cette caractéristique et que l'on nomme, pour cette raison, observables stables dans l'infrarouge. Ce sont elles que nous allons à présent aborder.

[8]Ce raisonnement cesse d'être valable si nous considérons la création d'un type particulier de hadron.

2.8 Recherche d'observables insensibles aux contributions à longue portée

Lors de la réalisation d'expériences de diffusion, la distance séparant les détecteurs de la région de l'espace où se produit l'interaction initiale est telle que les contributions physiques à longue portée devraient se faire ressentir au niveau de la mesure, les données résultantes ne pouvant dès lors s'interpréter dans le cadre de la théorie perturbative. Heureusement, il existe un certain nombre d'observables insensibles à ces contributions divergentes, telle la section efficace totale (2.112) que nous venons de rencontrer. Afin de formuler de manière générale le concept de stabilité infrarouge [1], nous allons à présent considérer une observable $\mathcal{I}$ construite à partir des sections efficaces de production de n hadrons lors du processus d'annihilation e^+e^- :

$$\frac{d\sigma_{[n]}}{d\Omega_2\, dE_3\, d\Omega_3 \ldots dE_n\, d\Omega_n}, \tag{2.114}$$

où E_i désigne l'énergie du hadron i et $\Omega_i = (\theta_i\, ,\, \phi_i)$ sa direction. L'observable $\mathcal{I}$ s'écrira dès lors :

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2!} \int d\Omega_2\, \frac{d\sigma_{[2]}}{d\Omega_2}\, S_2(p_1, p_2) \;+\; \frac{1}{3!} \int d\Omega_2\, dE_3\, d\Omega_3\, \frac{d\sigma_{[3]}}{d\Omega_2\, dE_3\, d\Omega_3}\, S_3(p_1, p_2, p_3) \;+\ldots, \tag{2.115}$$

la suite de fonctions S_n, symétriques en leurs arguments, ayant été définie de manière à décrire la mesure désirée. La stabilité de l'observable $\mathcal{I}$ dans l'infrarouge se traduit alors par une condition sur cette suite de fonctions, donnée par :

$$S_{n+1}(p_1, \ldots, (1-\lambda)\, p_n, \lambda\, p_n) = S_n(p_1, \ldots, p_n),\ \forall\, 0 \leq \lambda \leq 1. \tag{2.116}$$

La signification physique de cette condition apparaît clairement. Les fonctions S_n et S_{n+1} sont reliées entre elles de manière telle que l'observable $\mathcal{I}$ demeure inchangée lorsqu'une particule mère se divise en deux particules colinéaires qui se partagent son énergie-impulsion, inchangée également lorqu'une particule mère se désintègre en deux particules, l'une soft et l'autre transportant la totalité de son énergie-impulsion ou encore lorsque deux particules colinéaires se combinent ou qu'une particule soft est absorbée par une particule plus énergétique. Ces processus de désintégration et de recombinaison, qui font partie des contributions à longue portée, n'affectent donc en rien l'observable $\mathcal{I}$ ainsi définie. Dès lors, pour une quantité stable dans l'infrarouge, un événement constitué de jets fournit sensiblement les mêmes résultats expérimentaux que l'événement partonique correspondant, où chaque jet est remplacé par le parton qui lui a donné naissance, comme illustré sur la figure 2.12.

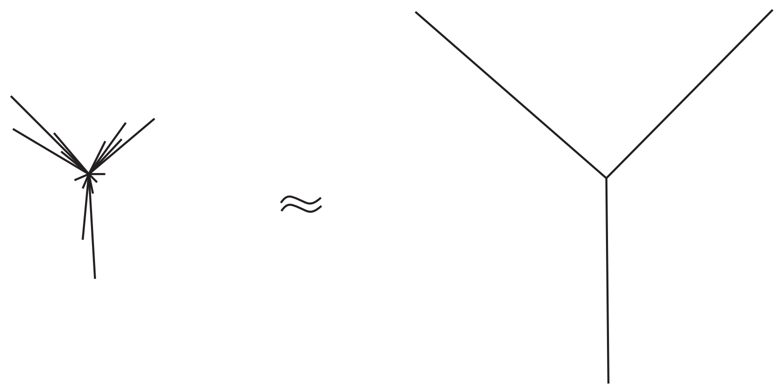


FIG. 2.12 – Pour une quantité stable dans l'infrarouge, un événement à trois jets est approximativement équivalent à un événement idéal où les trois jets sont réduits aux partons parents.

Pour ce faire, il suffit simplement de supprimer les particules faiblement énergétiques et de combiner les particules colinéaires jusqu'au moment où chacun des jets se réduit à son parton parent. Le calcul de l'observable $\mathcal{I}$ s'en trouve par là fortement simplifié, le processus d'hadronisation pouvant être ignoré totalement. Ayant introduit une formulation abstraite de la notion d'observable stable dans l'infrarouge, il est à présent intéressant d'en fournir quelques exemples, en se basant sur l'utilisation de la condition (2.116). Le plus simple est la section efficace totale de production de hadrons, déjà rencontrée, et pour laquelle on a simplement :

$$S_n(p_1, \ldots, p_n) = 1. \tag{2.117}$$

Un deuxième exemple est fourni par la distribution *thrust* qui spécifie le degré d'anisotropie d'un événement constitué de jets. On définit le *thrust* d'un événement à n particules par la relation :

$$\mathcal{T}_n(p_1, \ldots, p_n) = \max_{\vec{n}} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |\vec{p}_i \cdot \vec{n}|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |\vec{p}_i|}, \tag{2.118}$$

où $\vec{p}_i$ est l'impulsion du hadron i et $\vec{n}$ un vecteur unitaire que l'on fait varier de manière à rendre maximum la somme des valeurs absolues des projections des $\vec{p}_i$ sur $\vec{n}$. On constate immédiatement que le *thrust* d'un événement n'est pas affecté par la désintégration d'une particule mère en particules colinéaires ou faiblement énergétiques. La distribution *thrust* :

$$\frac{1}{\sigma_{tot}} \frac{d\sigma}{dT}, \tag{2.119}$$

est alors définie en prenant pour la suite de fonctions S_n :

$$S_n(p_1, \ldots, p_n) = \frac{1}{\sigma_{tot}} \delta\big(T - \mathcal{T}_n\,(p_1, \ldots, p_n)\,\big). \tag{2.120}$$

Cette distribution sert à caractériser les jets et sa stabilité infrarouge constitue donc un atout important. Un troisième exemple est donné par la fonction de corrélation en énergie :

$$\frac{d\Sigma}{d\cos\theta}, \tag{2.121}$$

pour laquelle la suite S_n est définie par :

$$S_n(p_1, \ldots, p_n) = \sum_{i,j} \frac{E_i\, E_j}{s} \delta(\cos\theta_{ij} - \cos\theta), \tag{2.122}$$

où E_i désigne l'énergie enregistrée par le détecteur i et θ_{ij} l'angle polaire entre les détecteurs i et j. Cette observable permet de déterminer la corrélation entre les énergies mesurées par des détecteurs séparés d'un angle θ. Afin de montrer qu'elle est stable dans l'infrarouge, remarquons tout d'abord que les contributions des particules faiblement énergétiques disparaissent spontanément. De plus, le remplacement d'une particule par deux particules colinéaires n'affecte pas la fonction de corrélation :

$$(1 - \lambda)\, E_i\, E_j \,+\, \lambda\, E_i\, E_j = E_i\, E_j. \tag{2.123}$$

La fonction d'autocorrélation ne s'en trouve pas non plus modifiée :

$$(1 - \lambda)^2\, E_n^2 \,+\, 2\,\lambda\,(1 - \lambda)\, E_n^2 \,+\, \lambda^2\, E_n^2 = E_n^2. \tag{2.124}$$

Citons enfin un quatrième et dernier exemple de grandeur stable dans l'infrarouge, la section efficace de production de n jets, σ_n.

Le peintre assis devant sa toile
A-t-il jamais peint ce qu'il voit ?
Ce qu'il voit, son histoire le voile,
Et ses ténèbres sont étoiles,
Comme chanter change la voix.
Aragon

Chapitre 3

La renormalisation

L'étude de l'annihilation e^+e^- nous a permis de découvrir que l'émission d'un gluon réel constitue une contribution à longue portée dont la présence engendre des divergences colinéaire et infrarouge. Elle nous a également permis d'aborder les contributions à courte portée, au travers des corrections virtuelles au vertex et au propagateur. Nous avons observé que les divergences ultraviolettes auxquelles ces dernières donnent naissance s'annulent mutuellement, les divergences infrarouges se compensant pour leur part avec celles générées par l'émission du gluon réel. A ce stade, cependant, un certain type de contribution à courte portée n'a pas encore été envisagé. Il s'agit de la correction virtuelle au propagateur du gluon, encore appelée self-énergie du gluon, illustrée à l'ordre α_s par les diagrammes de Feynman de la figure 3.1 et désignée à cet ordre par $i\Pi_2^{\mu\nu}(q)\,\delta^{ab}$ [1, 2, 6, 7].

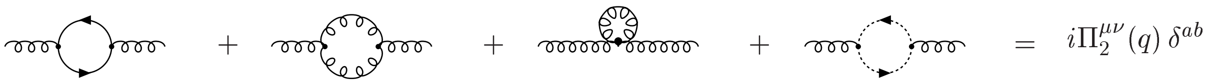
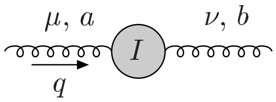


Fig. 3.1 – Corrections au propagateur du gluon à l'ordre α_s.

Le premier de ces diagrammes correspond à la polarisation du vide en une paire quark-antiquark. Les deuxième et troisième représentent la correction au propagateur par fluctuation en une paire de gluons, l'interaction s'effectuant respectivement au niveau d'un vertex à trois et quatre corps. Le dernier se rapporte à la création d'une paire ghost-antighost. Ces particules, introduites par Faddeev et Popov, résultent des excitations d'un champ anticommutatif, mais qui se comporte comme un scalaire vis-à-vis des transformations de Lorentz. Il s'agit dès lors de particules non-physiques, violant la relation entre spin et statistique. Leur rôle est d'assurer la validité de l'identité de Ward en QCD, en contrebalançant les effets des états de polarisation scalaire et longitudinal des gluons. Dans un premier temps, nous allons établir la forme générale de ces corrections, en recourant comme précédemment aux symétries de la théorie. Nous ferons ainsi apparaître la notion de constante de couplage renormalisée. Nous reviendrons alors un instant sur les corrections au propagateur du quark. Ensuite, nous aborderons la procédure de renormalisation, qui permet de faire disparaître simultanément l'ensemble des divergences ultraviolettes auxquelles donnent naissance les contributions à courte portée. Nous verrons que cette procédure aboutit à la définition d'une constante de couplage effective et implique que les quantités renormalisées, calculées perturbativement, dépendent à présent d'une échelle de renormalisation. Nous examinerons cette dépendence, ainsi que la manière la plus judicieuse de choisir notre échelle. [1,3,6,7]

3.1 Correction au propagateur du gluon

Désignons par $i\Pi^{\mu\nu}(q)\,\delta^{ab}$ la somme de toutes les corrections au propagateur du gluon, irréductibles à des diagrammes à une seule particule[1] [2] :



$$= i\Pi^{\mu\nu}(q)\,\delta^{ab}$$
$$= i\Pi_2^{\mu\nu}(q)\,\delta^{ab} + \mathcal{O}(\alpha_s^2). \tag{3.1}$$

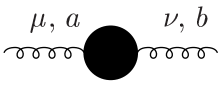
Les tenseurs $g^{\mu\nu}$ et $q^\mu q^\nu$ sont les seuls dont nous disposons pour construire $\Pi^{\mu\nu}(q)$, qui doit donc pouvoir s'écrire comme une combinaison linéaire de ces derniers :

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = A g^{\mu\nu} + B q^\mu q^\nu, \tag{3.2}$$

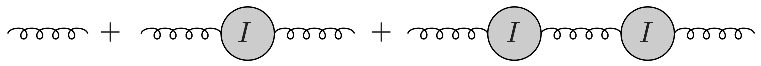
les scalaires A et B étant fonction du seul invariant q^2. L'identité de Ward, $q_\mu\,\Pi^{\mu\nu}(q) = 0$, établit une relation entre ces deux coefficients et permet de réécrire l'expression (3.2) sous la forme [2] :

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = \left(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu\right)\Pi(q^2). \tag{3.3}$$

En utilisant la notation (3.1), le propagateur exact du gluon est donné par :

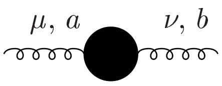


$=$



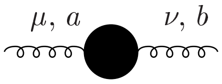
$$= \frac{-ig^{\mu\nu}\delta^{ab}}{q^2} + \frac{-ig^{\mu\rho}\delta^{ac}}{q^2}\, i\left(q^2 g_{\rho\sigma} - q_\rho q_\sigma\right)\Pi(q^2)\,\delta_{cd}\,\frac{-ig^{\sigma\nu}\delta^{db}}{q^2} + \ldots \tag{3.4}$$

En regroupant les puissances successives de Π apparaissant dans l'expression (3.4), nous obtenons finalement :



$$= -\frac{i}{q^2}\left(1 + \Pi(q^2) + \Pi^2(q^2) + \ldots\right)\left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right)\delta^{ab} - i\frac{q^\mu q^\nu}{q^4}\delta^{ab}$$
$$= \frac{-i}{q^2\left(1 - \Pi(q^2)\right)}\left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right)\delta^{ab} - i\frac{q^\mu q^\nu}{q^4}\delta^{ab}. \tag{3.5}$$

Lors du calcul d'une amplitude invariante, les termes proportionnels à q^μ ou q^ν disparaissent, et ce en vertu de l'identité de Ward. Nous pouvons donc en faire abstraction dans l'expression exacte du propagateur, qui devient :



$$= -i\frac{Z_3\, g^{\mu\nu}\,\delta^{ab}}{q^2}, \tag{3.6}$$

où le facteur Z_3 est défini par :

$$Z_3 = \frac{1}{1 - \Pi(q^2)}. \tag{3.7}$$

Nous pouvons à présent faire apparaître la notion de constante de couplage renormalisée. La différence entre le propagateur exact du gluon et celui duquel est négligée sa self-énergie réside dans la présence du coefficient Z_3 :

$$-i\frac{g^{\mu\nu}\,\delta^{ab}}{q^2} \to -i\frac{Z_3\, g^{\mu\nu}\,\delta^{ab}}{q^2}. \tag{3.8}$$

[1] La notation I signifie diagramme irréductible à des diagrammes à une seule particule.

[2] $\Pi(q^2) = -B(q^2)$

L'amplitude invariante associée à un processus de diffusion dominé par l'interaction forte se voit ainsi modifiée de la manière suivante :

$$\mathcal{M} \propto \frac{g_0^2\, g^{\mu\nu}}{q^2} \to \mathcal{M} \propto \frac{Z_3\, g_0^2\, g^{\mu\nu}}{q^2}, \tag{3.9}$$

g_0 désignant la constante de couplage apparaissant dans le lagrangien de la QCD. L'expression (3.9) nous permet d'appréhender la self-énergie du gluon sous un angle nouveau, qui consiste à conserver pour le propagateur exact l'expression $-ig^{\mu\nu}\delta^{ab}/q^2$ et à redéfinir la constante de couplage au travers de la relation :

$$g(q^2) = \sqrt{Z_3(q^2)}\, g_0, \tag{3.10}$$

où $g(q^2)$ porte le nom de constante de couplage renormalisée ou physique. C'est en effet à cette dernière, et non à g_0, que l'expérience donne accès. En remplaçant le coefficient Z_3 par sa valeur, la relation (3.10) peut encore s'écrire :

$$\alpha_s(q^2) = \frac{\alpha_s}{1 - \Pi(q^2)}, \tag{3.11}$$

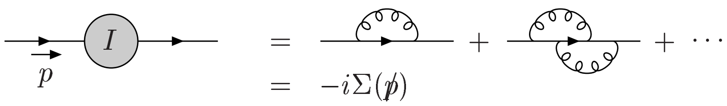
où $\alpha_s = g_0^2/4\pi$. Les expressions (3.10) et (3.11) impliquent que l'énergie à laquelle une expérience est réalisée influence à présent l'intensité du couplage. A l'ordre α_s du développement perturbatif, nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} \alpha_s(q^2) &= \frac{\alpha_s}{1 - \Pi_2(q^2)} \\ &= \frac{\left[1 - \Pi_2(0)\right] \alpha_s(0)}{1 - \Pi_2(q^2)} \\ &\simeq \frac{\alpha_s(0)}{1 - \left[\Pi_2(q^2) - \Pi_2(0)\right]}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Sans effectuer le calcul explicite du terme $\Pi_2(q^2)$, nous ne serons pas surpris d'apprendre que la self-énergie du gluon, à l'ordre α_s, fait apparaître des divergences ultraviolettes, régularisées à la Pauli-Villars par l'affectation au gluon d'une masse $\Lambda \to \infty$. La procédure de renormalisation des champs nous permettra de faire disparaître cet infini, et de manière plus générale, l'ensemble de ceux qu'engendrent les contributions à courte portée. Mais avant de l'aborder, effectuons un petit détour par le propagateur du quark.

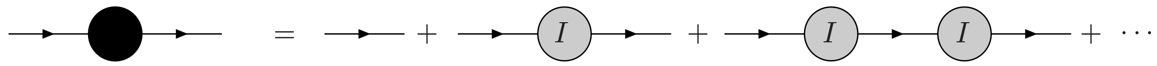
3.2 Correction au propagateur du quark, suite et fin

Nous allons reformuler le propagateur exact du quark à l'aide d'un formalisme identique à celui utilisé pour le propagateur du gluon. Désignons ainsi par $-i\Sigma(\not p)$ la somme de toutes les corrections au propagateur du quark, irréductibles à des diagrammes à une seule particule [2] :



$$\begin{aligned} &= -i\Sigma(\not p) \\ &= -i\Sigma_2(\not p) + \mathcal{O}(\alpha_s^2). \end{aligned} \tag{3.13}$$

En désignant par m_0 le paramètre du lagrangien, le propagateur exact du quark s'écrit alors :



$$
\begin{aligned}
&= \frac{i}{\not p - m_0} + \frac{i}{\not p - m_0} \; - i\Sigma(\not p) \; \frac{i}{\not p - m_0} + \ldots \\
&= \frac{i}{\not p - m_0}\left(1 + \frac{\Sigma(\not p)}{\not p - m_0} + \left(\frac{\Sigma(\not p)}{\not p - m_0}\right)^2 + \ldots\right) \qquad (3.14) \\
&= \frac{i}{\not p - m_0}\frac{1}{1 - \frac{\Sigma(\not p)}{\not p - m_0}} \\
&= \frac{i}{\not p - m_0 - \Sigma(\not p)}. \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

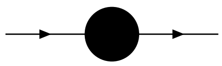
Ce dernier possède un pôle simple en la masse physique m, définie par :

$$m = m_0 + \Sigma(\not p = m). \tag{3.16}$$

A proximité du pôle, le dénominateur de l'expression (3.15) peut se mettre sous la forme :

$$
\begin{aligned}
\not p - m_0 - \Sigma(\not p) &= \not p - m + \Sigma(\not p = m) - \Sigma(\not p = m) - (\not p - m)\,\frac{d\Sigma}{d\not p}\Big|_{\not p = m} + \ldots \\
&= (\not p - m)\left(1 - \frac{d\Sigma}{d\not p}\Big|_{\not p = m} + \ldots\right). \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

En se limitant à l'ordre α_s, on obtient ainsi pour le propagateur exact, à proximité du pôle :



$$= \frac{i}{(\not p - m)\left(1 - \frac{d\Sigma_2}{d\not p}\big|_{\not p = m}\right)}. \tag{3.18}$$

La comparaison des expressions (2.104) et (3.18) établit la relation suivante entre les coefficients Z_2 et Σ_2 :

$$\frac{1}{Z_2} = 1 - \frac{d\Sigma_2}{d\not p}\Big|_{\not p = m}. \tag{3.19}$$

Cette dernière égalité nous servira lorsque nous aborderons les conditions de renormalisation.

3.3 La renormalisation : idées et principes

Nous savons que les contributions à courte portée, regroupant les corrections au vertex et au propagateur du quark ou du gluon, engendrent des divergences ultraviolettes dans la région où la quadri-impulsion indéterminée de la boucle tend vers l'infini. La procédure de régularisation permet, dans un premier temps, de donner un sens à ces quantités, via l'introduction d'un paramètre additionnel, telle une masse ultraviolette Λ dans le schéma de Pauli-Villars. Les fluctuations pour lesquelles l'échelle de temps $\Delta t > 1/\Lambda$ peuvent ainsi être calculées à un ordre donné du développement perturbatif. Par contre, les singularités des contributions qui se situent aux échelles de temps inférieures ne peuvent être éliminées à ce stade. Il est néanmoins possible de les réexprimer d'une manière claire et bien définie. La procédure de renormalisation des champs permet alors de supprimer ces divergences régularisées en les réabsorbant dans les contre-termes, et par suite dans la définition des quantités physiques. Il existe différents schémas de renormalisation, chacun d'eux nécessitant l'introduction d'un nouveau paramètre d'échelle. Ce dernier ne constitue pas une grandeur intrinsèque à la théorie, il nous indique simplement de quelle façon la renormalisation est effectuée. Nous adoptons ici le schéma de renormalisation $\overline{MS}$[3], dont les contre-termes compensent les singularités ultraviolettes et les termes constants des diagrammes divergents[4], et redéfinissons la théorie à une échelle μ possédant les dimensions d'une énergie. A présent, les quantités renormalisées, telle la constante de couplage α_s, dépendront explicitement de μ. Une manière intéressante, bien qu'approximative, de percevoir l'échelle de renormalisation, est de dire que les contributions physiques qui apparaissent à une échelle de temps $\Delta t < 1/\mu$ sont supprimées du calcul perturbatif, la prise en considération de ces interactions s'effectuant alors au travers de l'ajustement de la constante de couplage effective $\alpha_s(\mu)$. Cette vision est illustrée par la figure 3.2.

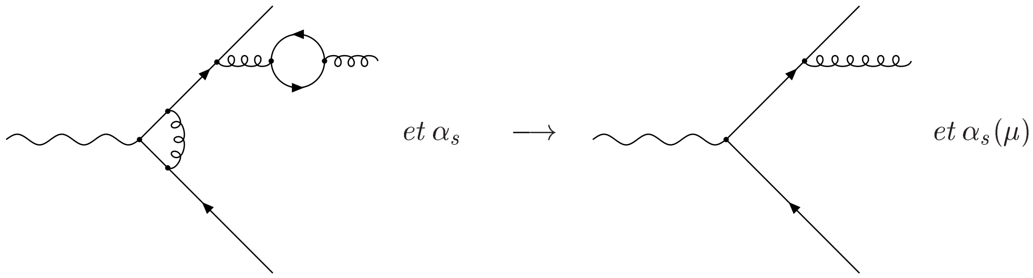


FIG. 3.2 – Les interactions dont l'échelle de temps caractéristique est inférieure à $1/\mu$ sont prises en compte au travers de l'ajustement de $\alpha_s(\mu)$.

Différentes renormalisations, basées sur différents choix pour la valeur de μ, doivent évidemment mener à une même estimation des observables. Il doit dès lors exister une équation qui exprime l'invariance de la physique sous une modification du paramètre μ. Cette dernière est connue sous le nom d'équation de Callan-Symanzik.

3.4 Renormalisation des champs

En désignant respectivement par ψ, A^a_μ et c^a les champs associés aux quarks, aux gluons et aux ghosts, le lagrangien de la chromodynamique s'écrit [2] :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_{ghost}, \tag{3.20}$$

où les termes $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_{int}$ et $\mathcal{L}_{ghost}$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu\right)^2 + \overline{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - m_0\right)\psi, \\ \mathcal{L}_{int} &= g_0\overline{\psi}\gamma^\mu A^a_\mu t^a\psi - g_0 f^{abc}\partial_\mu A^a_\nu A^{\mu b}A^{\nu c} - g_0^2 f^{eab}A^a_\mu A^b_\nu f^{ecd}A^{\mu c}A^{\nu d}, \\ \mathcal{L}_{ghost} &= -\overline{c}^a\partial^2 c^a - g_0 f^{abc}\,\overline{c}^a\partial^\mu A^b_\mu c^c. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Le lagrangien $\mathcal{L}_0$ décrit la dynamique des champs de gluons et de quarks libres. Le terme $\mathcal{L}_{int}$ rend compte des interactions entre ces champs, les trois contributions qui le composent correspondant respectivement à l'interaction quark-gluon, gluon-gluon à trois corps et gluon-gluon à quatre corps. La procédure de renormalisation consiste alors à redéfinir des champs renormalisés ψ_r,

[3] Minimal Substraction.

[4] Par opposition au schéma MS, dont les contre-termes réabsorbent uniquement la partie divergente des diagrammes.

$A^a_{\mu r}$ et c^a_r au travers des relations :

$$\begin{aligned} A^a_\mu &= \sqrt{Z_3} A^a_{\mu r}, \\ \psi &= \sqrt{Z_2} \psi_r, \\ c^a &= \sqrt{Z_2^c} c^a_r. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Les facteurs de renormalisation Z_2 et Z_3 sont ceux introduits précédemment dans les expressions (2.106) et (3.7). Le facteur Z_2^c est l'analogue de Z_2 pour le champ de ghosts. En substituant les champs renormalisés à ceux du lagrangien (3.20), il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = &- \frac{1}{4} Z_3 \left(\partial_\mu A^a_{\nu r} - \partial_\nu A^a_{\mu r}\right)^2 + Z_2 \overline{\psi}_r \left(i\partial\!\!\!/ - m_0\right) \psi_r + g Z_1 \overline{\psi}_r \gamma^\mu A^a_{\mu r} t^a \psi_r - g Z_1^{3g} f^{abc} \partial_\mu A^a_{\nu r} A^{\mu b}_r A^{\nu c}_r \\ &- g^2 Z_1^{4g} f^{eab} A^a_{\mu r} A^b_{\nu r} f^{ecd} A^{\mu c}_r A^{\nu d}_r - Z_2^c \overline{c}^a_r \partial^2 c^a_r - g Z_1^c f^{abc} \overline{c}^a_r \partial^\mu A^b_{\mu r} c^c_r, \end{aligned} \tag{3.23}$$

où la constante de couplage renormalisée g et les facteurs Z_1, Z_1^{3g}, Z_1^{4g} et Z_1^c sont définis par :

$$Z_1 = \frac{g_0}{g} Z_2 \sqrt{Z_3}, \tag{3.24}$$

$$Z_1^{3g} = \frac{g_0}{g} Z_3^{3/2}, \tag{3.25}$$

$$Z_1^{4g} = \frac{g_0^2}{g^2} Z_3^2, \tag{3.26}$$

$$Z_1^c = \frac{g_0}{g} Z_2^c \sqrt{Z_3}. \tag{3.27}$$

L'introduction des contre-termes $\delta_i = Z_i - 1$ et $\delta_m = Z_2 m_0 - m$, où m désigne la masse physique du quark considéré, permet finalement d'écrire le lagrangien (3.20) comme une somme de deux contributions :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_r + \mathcal{L}_{c-t}. \tag{3.28}$$

Le lagrangien renormalisé $\mathcal{L}_r$ est identique au lagrangien (3.20), dans lequel on aurait substitué aux champs les champs renormalisés et aux paramètres g_0 et m_0 la constante de couplage renormalisée g et la masse physique m. Les règles de Feynman qui en découlent sont donc semblables à celles que génère le lagrangien (3.20), à la substitution $(g_0, m_0) \to (g, m)$ près. Le lagrangien $\mathcal{L}_{c-t}$, qui regroupe l'ensemble des contre-termes, s'écrit quant à lui :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{c-t} = &- \frac{1}{4} \delta_3 \left(\partial_\mu A^a_{\nu r} - \partial_\nu A^a_{\mu r}\right)^2 + \overline{\psi}_r \left(i\delta_2 \partial\!\!\!/ - \delta_m\right) \psi_r + g \delta_1 \overline{\psi}_r \gamma^\mu A^a_{\mu r} t^a \psi_r - g \delta_1^{3g} f^{abc} \partial_\mu A^a_{\nu r} A^{\mu b}_r A^{\nu c}_r \\ &- g^2 \delta_1^{4g} f^{eab} A^a_{\mu r} A^b_{\nu r} f^{ecd} A^{\mu c}_r A^{\nu d}_r - \delta_2^c \overline{c}^a_r \partial^2 c^a_r - g \delta_1^c f^{abc} \overline{c}^a_r \partial^\mu A^b_{\mu r} c^c_r. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Remarquons que la théorie ne contient que cinq paramètres fondamentaux[5] en terme desquels doivent pouvoir s'exprimer les facteurs de renormalisation. Ces derniers, au nombre de huit, sont dès lors contraints par trois relations :

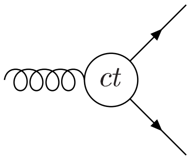
$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_1^c}{Z_2^c} = \sqrt{\frac{Z_1^{4g}}{Z_3}} = \frac{Z_1^{3g}}{Z_3}, \tag{3.30}$$

qui peuvent encore s'écrire, en négligeant les termes d'ordre δ_i^2 :

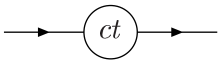
$$\delta_1 - \delta_2 = \delta_1^c - \delta_2^c = \frac{1}{2}\left(\delta_1^{4g} - \delta_3\right) = \delta_1^{3g} - \delta_3. \tag{3.31}$$

[5]Les facteurs de renormalisation des champs de fermions, de gluons et de ghosts, la masse physique m et la constante de couplage renormalisée.

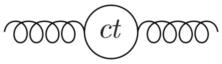
Le lagrangien (3.29) engendre de nouvelles règles de Feynman, dont trois présentent un intérêt pour la suite du développement. Il s'agit des contre-termes associés respectivement au vertex quark-gluon, au propagateur du quark et à celui du gluon, dont les expressions sont données par :



$$= igt^a\gamma^\mu\delta_1, \tag{3.32}$$

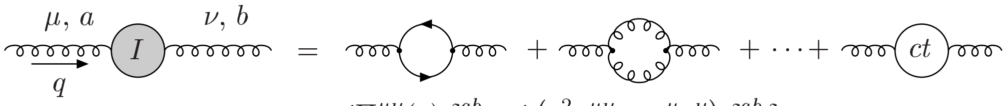


$$= i(\not{p}\delta_2 - \delta_m), \tag{3.33}$$



$$= -i\left(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu\right)\delta^{ab}\delta_3. \tag{3.34}$$

La somme de toutes les corrections au propagateur du gluon, irréductibles à des diagrammes à une seule particule, prend à présent en considération le contre-terme (3.34), et s'écrit :

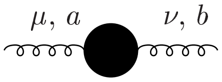


$$\begin{aligned} &= i\Pi^{\mu\nu}(q)\,\delta^{ab} - i\left(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu\right)\delta^{ab}\delta_3 \\ &= i\left(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu\right)\delta^{ab}\left[\Pi(q^2) - \delta_3\right] \\ &= i\left(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu\right)\delta^{ab}\Pi'(q^2), \end{aligned} \tag{3.35}$$

où l'on a posé :

$$\Pi'(q^2) = \Pi(q^2) - \delta_3. \tag{3.36}$$

Le propagateur exact du gluon vaut dès lors :

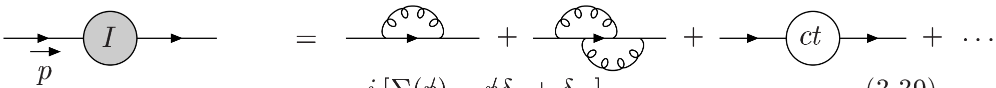


$$= -i\frac{Z_3(q^2)\,g^{\mu\nu}\,\delta^{ab}}{q^2}, \tag{3.37}$$

le facteur $Z_3(q^2)$ étant défini par :

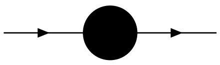
$$Z_3(q^2) = \frac{1}{1 - \Pi'(q^2)}. \tag{3.38}$$

La somme de toutes les corrections au propagateur du quark, irréductibles à des diagrammes à une seule particule, est quant à elle modifiée par le contre-terme (3.33), et l'on a :



$$\begin{aligned} &= -i\left[\Sigma(\not{p}) - \not{p}\delta_2 + \delta_m\right] \\ &= -i\Sigma'(\not{p}), \end{aligned} \tag{3.39}$$

le terme $\Sigma'(\not{p})$ désignant la somme $\Sigma(\not{p}) - \not{p}\delta_2 + \delta_m$. On obtient ainsi pour le propagateur exact du quark :



$$= \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma'(\not{p})}. \tag{3.40}$$

Le vertex exact quark-gluon prend en compte le contre-terme (3.32) et revêt par conséquent la forme :

$$igt^a\Gamma^\mu = igt^a\left[\gamma^\mu\left(F_1(q^2)+\delta_1\right)+i\frac{\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}F_2(q^2)\right]. \tag{3.41}$$

Afin de déterminer les valeurs de δ_1, δ_2, δ_3 et δ_m, il est à présent nécessaire d'imposer un ensemble de quatre conditions, dites de renormalisation. Pour établir la première, l'on s'intéresse au propagateur (3.40) dont le pôle définit une masse perturbative pour le quark considéré, ce qui nous permet d'écrire :

$$\Sigma'(\not p = m) = 0. \tag{3.42}$$

La deuxième condition consiste à fixer à l'unité le résidu du propagateur du quark en son pôle $\not p = m$. Ce dernier ayant pour valeur :

$$\left(1-\frac{d\Sigma'}{\not p}\Big|_{\not p=m}\right)^{-1}, \tag{3.43}$$

nous sommes ainsi conduits à imposer :

$$\frac{d\Sigma'}{\not p}\Big|_{\not p=m} = 0. \tag{3.44}$$

On procède de même pour le propagateur du gluon, dont le résidu en son pôle $q^2 = 0$, donné par $Z_3(q^2 = 0)$, est fixé à l'unité par la condition :

$$\Pi'(q^2 = 0) = 0. \tag{3.45}$$

La dernière contrainte impose que le couplage quark-gluon, à transfert nul, se réduise à l'expression :

$$igt^a\Gamma^\mu(q^2 = 0) = igt^a\gamma^\mu. \tag{3.46}$$

Les conditions (3.42), (3.44), (3.45) et (3.46) peuvent être qualifiées de physiques, dans la mesure où elles sont définies lorsque la particule concernée se trouve sur sa couche de masse. Il apparaît cependant utile de les imposer à une échelle d'énergie arbitraire commune μ^2, et l'on écrira dès lors[6] :

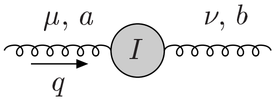
$$\begin{aligned}
\Sigma'(p^2 = -\mu^2) &= 0, && (3.47)\\
\frac{d\Sigma'}{\not p}\Big|_{p^2=-\mu^2} &= 0, && (3.48)\\
\Pi'(q^2 = -\mu^2) &= 0, && (3.49)\\
igt^a\Gamma^\mu(q^2 = -\mu^2) &= igt^a\gamma^\mu. && (3.50)
\end{aligned}$$

Nous allons à présent envisager les propagateurs renormalisés (3.37) et (3.40), ainsi que le vertex (3.41), à l'ordre α_s du développement perturbatif.

[6]Les quadri-impulsions p et q sont définies du genre espace.

3.5 Renormalisation à l'ordre α_s

Les corrections au propagateur du gluon, à l'ordre α_s du développement perturbatif, sont représentées par la figure 3.1. On peut montrer qu'à cet ordre, la somme des insertions irréductibles à des diagrammes à une seule particule, dans le schéma de régularisation de Pauli-Villars, a pour valeur[7] [6] :

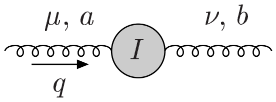


$$\begin{aligned} &= i\left(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu\right)\delta^{ab}\left[\left(\frac{13}{6}C_{gg} - \frac{4}{3}C_f\right)\frac{g^2}{16\pi^2}\ln\left(\frac{\Lambda^2}{-q^2}\right) - \delta_3\right] \\ &= i\left(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu\right)\delta^{ab}\Pi'(q^2). \end{aligned} \tag{3.51}$$

Les coefficients C_{gg} et C_f, qui représentent respectivement la contribution des boucles de gluons et de ghosts et celle des boucles de fermions, sont donnés par :

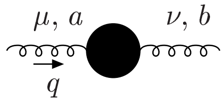
$$\begin{aligned} C_{gg} &= 3, \\ C_f &= \frac{1}{2}n_f, \end{aligned} \tag{3.52}$$

n_f désignant le nombre de saveurs des quarks contribuant aux boucles. La condition (3.49) permet de déterminer le contre-terme δ_3, et l'on obtient alors :



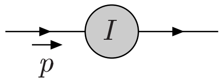
$$= i\left(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu\right)\delta^{ab}\left(\frac{13}{6}C_{gg} - \frac{4}{3}C_f\right)\frac{g^2}{16\pi^2}\ln\left(\frac{\mu^2}{-q^2}\right). \tag{3.53}$$

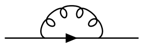
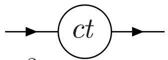
Le propagateur renormalisé du gluon, à l'ordre α_s, s'écrit finalement :



$$\begin{aligned} &= -i\frac{g^{\mu\nu}\,\delta^{ab}}{q^2}\left[1 + \Pi'(q^2)\right] \\ &= -i\frac{g^{\mu\nu}\,\delta^{ab}}{q^2}\left[1 + \left(\frac{13}{2} - \frac{2n_f}{3}\right)\frac{g^2}{16\pi^2}\ln\left(\frac{\mu^2}{-q^2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.54}$$

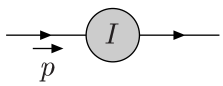
Dans le cas du quark, la somme des insertions irréductibles à des diagrammes à une seule particule, à l'ordre α_S et dans le schéma de Pauli-Villars, a pour expression [2] :



=  + 

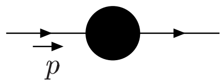
$$\begin{aligned} &= \frac{ig^2}{(4\pi)^2}\frac{4}{3}\not{p}\ln\left(\frac{\Lambda^2}{-p^2}\right) + i\left(\not{p}\delta_2 - \delta_m\right) \\ &= -i\Sigma'(\not{p}). \end{aligned} \tag{3.55}$$

Le recours aux conditions (3.47) et (3.48) fixe les contre-termes δ_2 et δ_m, ce qui fournit :



$$= \frac{ig^2}{(4\pi)^2}\frac{4}{3}\not{p}\ln\left(\frac{\mu^2}{-p^2}\right) \tag{3.56}$$

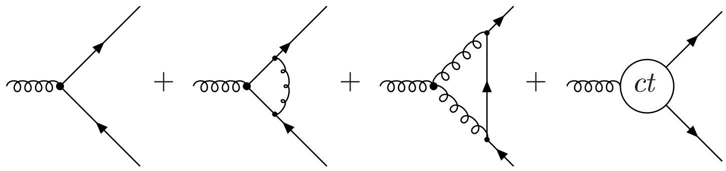
Nous obtenons ainsi pour le propagateur renormalisé du quark, à l'ordre α_s :



$$= \frac{i}{\not{p}\left[1 + \frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{4}{3}\ln\left(\frac{\mu^2}{-p^2}\right)\right] - m}. \tag{3.57}$$

[7] La jauge choisie est celle de Landau.

Le vertex quark-gluon corrigé à l'ordre α_s s'écrit quant à lui :



$$= ig\Gamma^\mu t^a, \tag{3.58}$$

avec pour le vecteur Γ^μ [2] :

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \left[1 - \frac{9}{4}\frac{g^2}{16\pi^2}\ln\left(\frac{\Lambda^2}{-q^2}\right) + \delta_1\right]. \tag{3.59}$$

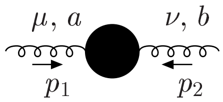
La condition (3.50) détermine le contre-terme δ_1, et le résultat (3.58) devient :

$$ig\gamma^\mu t^a \left[1 - \frac{9}{4}\frac{g^2}{16\pi^2}\ln\left(\frac{\mu^2}{-q^2}\right)\right]. \tag{3.60}$$

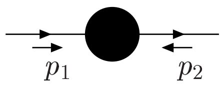
Ces résultats en main, nous allons à présent établir l'équation de Callan-Symanzik, qui exprime l'invariance de la physique sous une modification de l'échelle de renormalisation μ.

3.6 L'équation de Callan-Symanzik

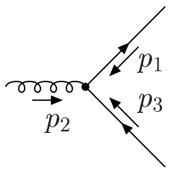
Nommons $\Gamma^{(n,m)}(p_i, g_0, \Lambda)$ les fonctions de Green à $n+m$ points régularisées, n et m désignant respectivement le nombre de gluons et de quarks externes, p_i leurs quadri-impulsions, g_0 la constante de couplage apparaissant dans le lagrangien de la QCD et Λ le cut-off ultraviolet de Pauli-Villars. Avec cette notation, les propagateurs du gluon et du quark et le vertex quark-gluon, régularisés, s'écrivent respectivement :



$$\begin{aligned} &= \Gamma^{(2,0)}(p_1, p_2, g_0, \Lambda) \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2) \int e^{i\, p_1 \cdot x} \langle \Omega \,|\, T A_a^\mu(x)\, A_b^\nu(0) \,|\, \Omega\rangle \, d^4x, \end{aligned} \tag{3.61}$$



$$\begin{aligned} &= \Gamma^{(0,2)}(p_1, p_2, g_0, \Lambda) \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2) \int e^{i\, p_1 \cdot x} \left\langle \Omega \,|\, T \psi(x)\, \overline{\psi}(0) \,|\, \Omega\right\rangle d^4x, \end{aligned} \tag{3.62}$$



$$\begin{aligned} &= \Gamma^{(1,2)}(p_1, p_2, p_3, g_0, \Lambda) \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3) \int\int e^{i\, p_1 \cdot x} e^{i\, p_3 \cdot z} \left\langle \Omega \,|\, T \psi(x)\, A_a^\mu(0)\, \overline{\psi}(z) \,|\, \Omega\right\rangle d^4x d^4z. \end{aligned} \tag{3.63}$$

Pour une théorie renormalisable telle que la QCD, nous savons à présent qu'il est possible de définir des fonctions de Green renormalisées $\Gamma_R^{[n,m]}$ au travers des relations :

$$\begin{aligned} \Gamma_R^{(2,0)}(p_1, p_2, g, \mu) &= Z_3\,(g_0, \Lambda/\mu)\Gamma^{(2,0)}(p_1, p_2, g_0, \Lambda), \\ \Gamma_R^{(0,2)}(p_1, p_2, g, \mu) &= Z_2\,(g_0, \Lambda/\mu)\Gamma^{(0,2)}(p_1, p_2, g_0, \Lambda), \\ \Gamma_R^{(1,2)}(p_1, p_2, p_3, g, \mu) &= \sqrt{Z_3} Z_2\,(g_0, \Lambda/\mu)\Gamma^{(1,2)}(p_1, p_2, p_3, g_0, \Lambda), \end{aligned} \tag{3.64}$$

que nous résumons de manière générale par l'écriture :

$$\Gamma_R(p_i, g, \mu) = Z_\Gamma(g_0, \Lambda/\mu)\, \Gamma(p_i, g_0, \Lambda). \tag{3.65}$$

Ces dernières sont désormais finies dans la limite $\Lambda \to \infty$, mais dépendent d'une échelle de renormalisation μ et d'une constante de couplage renormalisée $g = g(\mu)$. Le propagateur régularisé $\Gamma(p_i, g_0, \Lambda)$ étant indépendant du paramètre μ, nous obtenons, par différenciation de l'expression (3.65) :

$$\frac{d\Gamma}{d\mu} = \frac{d}{d\mu}\left(Z_\Gamma^{-1}\,\Gamma_R\right) = \left(\partial_\mu Z_\Gamma^{-1}\right)\Gamma_R + Z_\Gamma^{-1}\,\left(\partial_\mu + \partial_\mu g\,\partial_g\right)\Gamma_R = 0. \tag{3.66}$$

Cette équation, qui exprime l'indépendance de la grandeur $\Gamma(p_i, g_0, \Lambda)$ vis-à-vis de l'échelle de renormalisation, n'est autre que l'équation de Callan-Symanzik [7]. Habituellement, on définit alors deux fonctions $\beta(g)$ et $\gamma_\Gamma(g)$:

$$\beta(g) = \mu\partial_\mu g, \tag{3.67}$$

$$\gamma_\Gamma(g) = -\frac{\mu}{Z_\Gamma}\partial_\mu Z_\Gamma, \tag{3.68}$$

$$\tag{3.69}$$

qui permettent de réécrire l'équation (3.66) sous une forme plus élégante :

$$\left(\mu\partial_\mu + \beta\partial_g + \gamma_\Gamma\right)\Gamma_R(p_i, g, \mu) = 0. \tag{3.70}$$

La fonction β possède un caractère universel, l'anomalie dimensionnelle γ_Γ dépend quant à elle de la fonction de Green que l'on renormalise. Dans l'opération de différenciation de Z_Γ, le cut-off ultraviolet Λ est maitenu constant, la limite $\Lambda \to \infty$ étant prise par la suite. En remarquant que Z_Γ désigne un produit de facteurs Z_i, la fonction γ_Γ apparaît comme la somme des contributions correspondantes. En d'autres termes, l'équation de Callan-Symanzik resomme les effets des fluctuations se situant à une échelle de temps $\Delta t < 1/\mu$. Considérons à présent la situation où une seule quadri-impulsion Q fixe l'échelle d'énergie[8]du processus étudié, toutes les quadri-impulsions p_i pouvant dès lors s'exprimer en terme de fractions x_i de Q. L'introduction de la variable :

$$t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) \tag{3.71}$$

permet alors de reformuler l'équation (3.66), qui s'écrit finalement :

$$\left[-\partial_t + \beta(g)\partial_g + \gamma_\Gamma(g)\right]\Gamma_R(t, g, x_i) = 0. \tag{3.72}$$

Sa résolution repose sur l'introduction d'une constante de couplage effective $g(t)$, définie par l'équation :

$$\frac{dg(t)}{dt} = \beta(g(t)), \tag{3.73}$$

dite du groupe de renormalisation, et par la condition :

$$g(t=0) = g. \tag{3.74}$$

Les relations (3.73) et (3.74) fournissent immédiatement :

$$t = \int_{g(0)}^{g(t)} \frac{dg'}{\beta(g')}, \tag{3.75}$$

$$\frac{dg(t)}{dg(0)} = \frac{\beta\left(g(t)\right)}{\beta\left(g(0)\right)}. \tag{3.76}$$

L'égalité (3.76) rend l'équation (3.72) valable pour tout t, et l'on obtient ainsi :

$$\left[-\partial_t + \beta\left(g(t)\right)\partial_g + \gamma_\Gamma\left(\,g(t)\,\right)\right]\Gamma_R\left(t, g(t), x_i\right) = 0, \tag{3.77}$$

[8]Ce sera notamment le cas de la diffusion profondément inélastique.

dont la solution s'obtient par séparation des variables. En posant $\Gamma_R\left(t, g(t), x_i\right) = f(t)h(g)$, il vient :

$$
\begin{aligned}
f(t) &= f(0)\, e^{c_1 t}, \\
h(g(t)) &= h(g(0))\, e^{c_1 t}\, e^{-\int_{g(0)}^{g(t)} \frac{\gamma_\Gamma(g')}{\beta(g')} dg'},
\end{aligned}
\tag{3.78}
$$

où c_1 désigne une constante d'intégration. La solution générale de l'équation de Callan-Symanzik s'écrit donc finalement :

$$
\Gamma_R\left(t, g(0), x_i\right) = \Gamma_R\left(0, g(t), x_i\right) e^{\int_{g(0)}^{g(t)} \frac{\gamma_\Gamma(g')}{\beta(g')} dg'}. \tag{3.79}
$$

Elle nous indique que toute la dépendence en Q^2 de la fonction de Green renormalisée apparaît bien uniquement au travers de la constante de couplage effective $g(t)$. Les divergences ultraviolettes sont ainsi réabsorbées dans la définition de la constante de couplage, que nous allons à présent évaluer à l'ordre α_s du développement perturbatif.

3.7 La constante de couplage effective

Les développements perturbatifs à l'ordre α_s des fonctions de Green renormalisées correspondant respectivement au propagateur du gluon, au propagateur du quark et au vertex quark-gluon, sont donnés par les relations (3.54), (3.57) et (3.60) :

$$
\begin{aligned}
\Gamma_R^{(2,0)} &= -i\frac{g^{\mu\nu}\,\delta^{ab}}{q^2}\left[1 + \left(\frac{13}{2} - \frac{2n_f}{3}\right)\frac{g^2}{16\pi^2}\ln\left(\frac{\mu^2}{-q^2}\right)\right], \\
\Gamma_R^{(0,2)} &= \frac{i}{\not{p}\left[1 + \frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{4}{3}\ln\left(\frac{\mu^2}{-p^2}\right)\right] - m}, \\
\Gamma_R^{(1,2)} &= ig\gamma^\mu t^a\left[1 - \frac{9}{4}\frac{g^2}{16\pi^2}\ln\left(\frac{\mu^2}{-q^2}\right)\right].
\end{aligned}
\tag{3.80}
$$

Ces fonctions satisfont à l'équation de Callan-Symanzik, et nous obtenons ainsi un système de trois équations à trois inconnues β, γ_g et γ_q :

$$
\begin{aligned}
\left(\mu\partial_\mu + \beta\partial_g + 2\gamma_g\right)\Gamma_R^{(2,0)} &= 0, \\
\left(\mu\partial_\mu + \beta\partial_g + 2\gamma_q\right)\Gamma_R^{(0,2)} &= 0, \\
\left(\mu\partial_\mu + \beta\partial_g + \gamma_g + 2\gamma_q\right)\Gamma_R^{(1,2)} &= 0,
\end{aligned}
\tag{3.81}
$$

γ_g et γ_q désignant respectivement les dimensions anomales associées au gluon et au quark. En substituant les expressions perturbatives (3.80) aux fonctions de Green renormalisées solutions de ce système, on obtient [6] :

$$
\begin{aligned}
\gamma_g &= \left(\frac{13}{6}C_{gg} - \frac{4}{3}C_f\right)\frac{g^2}{16\pi^2} + \mathcal{O}(g^4), \\
\gamma_q &= 0 + \mathcal{O}(g^4), \\
\beta &= -\left(\frac{11}{3}C_{gg} - \frac{4}{3}C_f\right)\frac{g^3}{16\pi^2} + \mathcal{O}(g^5).
\end{aligned}
\tag{3.82}
$$

Ces résultats nous indiquent que les contributions à la fonction $\beta(g)$ proviennent essentiellement des boucles de gluons et de quarks. On remarque également que le développement de $\beta(g)$ en puissances de g peut s'écrire sous la forme :

$$
\beta(g) = -bg^3\left(1 + b'g^2 + \ldots\right), \tag{3.83}
$$

le coefficient b ayant pour valeur :

$$b = \frac{11C_{gg} - 4C_f}{48\pi^2} = \frac{33 - 2n_f}{48\pi^2}. \tag{3.84}$$

Bien que β et γ_Γ dépendent généralement du schéma de renormalisation et de la jauge choisis, on peut montrer que les deux premiers coefficients b et b' sont toujours les mêmes. L'approximation à l'ordre le plus bas, $\beta(g) = -bg^3$, porte le nom d'approximation à une boucle, et l'intégration de l'équation (3.73) fournit dans ce cas :

$$g^2(t) = \frac{g^2(0)}{1 + 2\,b\,g^2(0)\,t}. \tag{3.85}$$

On définit alors la constante de couplage effective $\alpha_s(Q^2)$ par la relation :

$$\begin{aligned} \alpha_s(Q^2) \equiv \frac{g^2(Q^2)}{4\pi} &= \frac{g^2(0)}{4\pi\left[1 + \,b\,g^2(0)\,\ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right)\right]} \\ &= \frac{12\pi\alpha_s(\mu^2)}{12\pi + (33 - 2n_f)\,\alpha_s(\mu^2)\ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right)}. \end{aligned} \tag{3.86}$$

L'introduction du paramètre Λ :

$$\Lambda = \mu e^{-\frac{1}{2\,b\,g^2(0)}}, \tag{3.87}$$

permet encore d'écrire la constante de couplage effective sous la forme :

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f)\ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)}. \tag{3.88}$$

Le paramètre Λ doit être déterminé expérimentalement, et l'on trouve pour une quadri-impulsion de transfert[9] de l'ordre de la masse du Z^0 :

$$\Lambda \sim 200\,MeV. \tag{3.89}$$

Pour un nombre de saveurs $n_f \leqslant 16$[10], la relation (3.84) nous montre que le coefficient b est positif. La constante de couplage effective $\alpha_s(Q^2)$ diminue donc lorsque Q^2 augmente :

$$\lim_{Q^2\to\infty} \alpha_s(Q^2) = 0. \tag{3.90}$$

Cette propriété, connue sous le nom de liberté asymptotique, permet l'utilisation de la théorie perturbative aux valeurs élevées de Q^2. Elle implique que la chromodynamique quantique, contrairement à toute attente, se comporte comme une interaction faible lorsque l'échelle de temps caractéristique de la contribution physique diminue. Cette constatation ne s'oppose cependant pas à ce que quarks et gluons soient fortement liés au sein des nucléons. Simplement, cette liaison forte doit être perçue comme le résultat d'interactions plus faibles agissant conjointement pendant un intervalle de temps élevé. Cette propriété de liberté asymptotique est absente de l'électrodynamique quantique. En effet, dans ce cas, la constante de couplage effective, dans l'approximation à une boucle et en choisissant la masse de l'électron comme échelle de renormalisation, s'écrit [2] :

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(m_e^2)}{1 + 4\pi\,b\,\alpha(m_e^2)\,\ln\left(\frac{Q^2}{4m_e^2}\right)}, \tag{3.91}$$

[9] $Q^2 \sim 8300\,\mathrm{GeV}^2, n_f = 5$.

[10] Un quark i de masse m_i contribue à l'expression (3.88) lorsque son seuil de production est atteint, c'est-à-dire lorsque $Q^2 \geqslant 4m_i^2$.

la valeur du paramètre b étant donnée par :

$$b = -\frac{1}{12\pi^2}. \tag{3.92}$$

Ces relations nous indiquent que $\alpha(Q^2) \to \infty$ lorsque $Q^2 \to \infty$, et l'électrodynamique quantique n'est donc pas asymptotiquement libre. La faible valeur de $\alpha(m_e^2) \sim 1/137$ permet cependant l'utilisation de la théorie perturbative même aux valeurs élevées de Q^2. En chromo comme en électrodynamique, les contributions apportées au coefficient b par les boucles de fermions sont négatives. En QCD, la contribution de la boucle de gluons assure alors la positivité de b pour $n_f \leqslant 16$. Le processus analogue pour l'électrodynamique, à savoir la création par un photon d'une paire de photons, n'existe pas.

3.8 Le choix de l'échelle

Nous allons à présent examiner le problème du choix de l'échelle de renormalisation μ que l'on rencontre lors de la réalisation d'expériences de collision [1]. Pour ce faire, souvenons-nous de la section efficace totale de l'annihilation $e^+e^- \to$ hadrons, dont l'expression est donnée à l'ordre α_s par la relation (2.113). Celle-ci ignore une partie des processus à courte portée, à savoir la self-énergie du gluon. La prise en considération de cette dernière s'effectue au travers de la constante de couplage renormalisée $\alpha_s(Q^2)$ et la section efficace envisagée s'écrira désormais :

$$\sigma_{tot}(e^+e^- \to hadrons) = \sigma_0 \left(1 + \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi}\right). \tag{3.93}$$

En pousuivant le développement perturbatif aux ordres supérieurs, on peut montrer que l'expression (3.93) s'écrit alors sous la forme :

$$\sigma_{tot}(e^+e^- \to hadrons) = \sigma_0 \left(1 + \frac{\Delta(\mu^2)}{\pi}\right), \tag{3.94}$$

où la quantité $\Delta(\mu^2)$ a pour valeur :

$$\begin{aligned} \Delta(\mu^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{\pi} &+ \left[1.4092 + 1.9167 \ln\left(\frac{\mu^2}{s}\right)\right]\left(\frac{\alpha_s(\mu^2)}{\pi}\right)^2 \\ &+ \left[-12.805 + 7.8186 \ln\left(\frac{\mu^2}{s}\right) + 3.674 \ln^2\left(\frac{\mu^2}{s}\right)\right]\left(\frac{\alpha_s(\mu^2)}{\pi}\right)^3 + \ldots. \end{aligned} \tag{3.95}$$

Dans la relation (3.95), s désigne le carré de l'énergie totale dans le référentiel du centre de masse et $\alpha_s(\mu^2)$ est donné par[11] :

$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{12\pi\alpha_s(M_Z^2)}{12\pi + (33 - 2n_f)\,\alpha_s(M_Z^2) \ln\left(\frac{\mu^2}{M_Z^2}\right)}. \tag{3.96}$$

Comme nous l'avons souligné auparavant, l'échelle de renormalisation μ ne constitue pas un paramètre intrinsèque à la théorie, mais plutôt un artifice qui découle de notre inaptitude à comprendre la physique au-delà d'une certaine échelle et nous permet d'organiser la théorie perturbative. Dès lors, toute observable, telle la section efficace totale (3.94), est indépendante de μ, ce qui se traduit par la condition :

$$\frac{d\Delta}{d \ln \mu^2} = 0. \tag{3.97}$$

[11] Il s'agit de la relation (3.86) dans laquelle on a effectué les substitutions $Q^2 \to \mu^2$ et $\mu \to M_Z$. La théorie est ici redéfinie à la masse du boson $Z^0 \sim 91.18$ GeV.

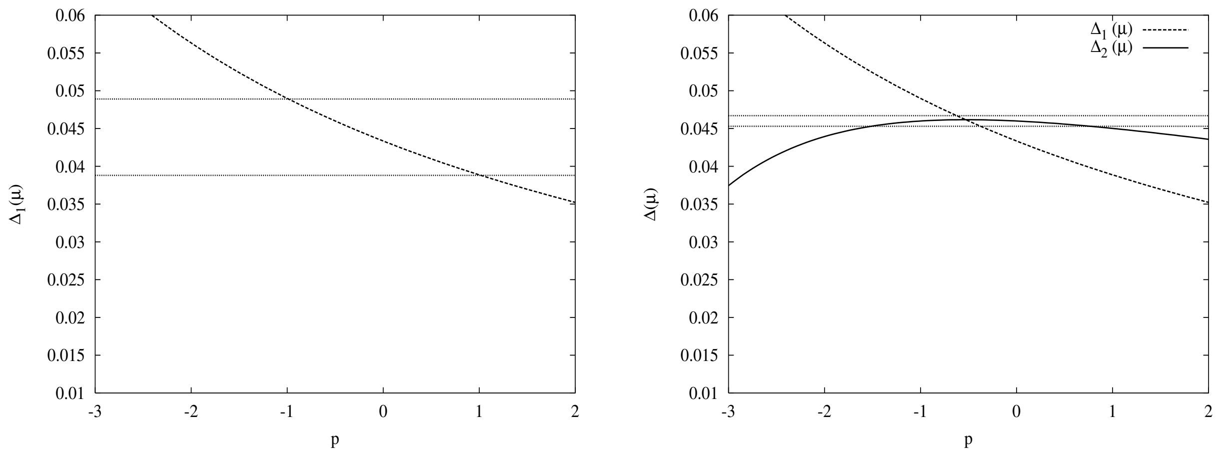
Réécrivons la quantité Δ sous la forme d'un développement en série de puissances de $\alpha_s(\mu)$, comme le suggère l'expression (3.95) :

$$\Delta \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\mu)\alpha_s^n(\mu). \tag{3.98}$$

En pratique, cette somme infinie est évidemment tronquée. En notant Δ_N la somme limitée à ses N premiers termes, nous obtenons :

$$\frac{d\Delta_N}{d\ln\mu^2} \sim -\frac{d}{d\ln\mu^2}\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n(\mu)\alpha_s^n(\mu) \sim \mathcal{O}\left(\alpha_s^{N+1}(\mu)\right), \tag{3.99}$$

où l'on suppose que l'énergie totale dans le référentiel du centre de masse est telle que $\alpha_s(\mu) \ll 1$. Nous voyons qu'au plus nous insérons de termes dans le développement limité Δ_N, moins la section efficace σ_{tot} dépendra de μ, l'indépendance ultime demeurant cependant inaccessible. Un choix judicieux de l'échelle de renormalisation s'avère dès lors nécessaire. Le sens commun nous suggère que le rapport μ^2/s ne doit pas être trop important, de manière à assurer la convergence de l'expression (3.98). La considération d'un exemple quantitatif va nous permettre de constater la dépendence de Δ_N vis-à-vis de μ, et également d'estimer l'erreur théorique qu'occassionne la finitude du développement perturbatif, à savoir la quantité $|\Delta - \Delta_N|$. Choisissons pour $\alpha_s(M_Z^2)$, $\sqrt{s}$ et n_f les valeurs $\alpha_s(M_Z^2) = 0.117$, $\sqrt{s} = 34$ GeV et $n_f = 5$. La figure 3.3(a) représente alors l'approximation de $\Delta(\mu)$ à l'ordre α_s, $\Delta_1(\mu) = \alpha_s(\mu)/\pi$, en fonction de p, défini par $\mu = 2^p\sqrt{s}$.



(a) (b)

FIG. 3.3 – (a) Dépendence de $\Delta_1(\mu)$ vis-à-vis de l'échelle de renormalisation μ. Les deux droites horizontales délimitent le domaine de variation de $\Delta_1(\mu)$ autour de la valeur moyenne $\Delta_1(\sqrt{s})$ lorsque l'échelle μ est modifiée d'un facteur 2. (b) Dépendence de $\Delta_1(\mu)$ et $\Delta_2(\mu)$ vis-à-vis de l'échelle de renormalisation μ. Les deux droites horizontales délimitent le domaine de variation de $\Delta_2(\mu)$ autour de la valeur moyenne $\Delta_2(\mu_{PMS})$ lorsque l'échelle μ est modifiée d'un facteur 2.

Cette courbe ne présente pas de domaine de stabilité et en l'absence d'informations supplémentaires, nous sommes alors amenés à choisir pour meilleure valeur de $\Delta_1(\mu)$ celle en $\mu = \sqrt{s}$, $\Delta_1(\sqrt{s}) \simeq 0.044$. On remarque que si l'on modifie μ d'un facteur 2, $\Delta_1(\mu)$ varie de plus ou moins 0.006, ce qui est représenté par les deux droites horizontales sur la figure 3.3(a).

$$\Delta_1(\sqrt{s}) \simeq 0.044 \pm 0.006. \tag{3.100}$$

L'estimation de l'erreur peut encore être réalisée de la manière suivante. On s'attend à ce que les coefficients c_n du développement (3.98) soient de l'ordre de 1 pour les quelques premiers termes. Dès lors, le premier terme omis devrait être de l'ordre de $\alpha_s^2 \simeq 0.020$[12], ce qui nous fournit une seconde estimation de l'erreur. Cette dernière étant supérieure à la précédente, c'est elle que nous conservons :

$$\Delta_1(\sqrt{s}) \simeq 0.044 \pm 0.020. \tag{3.101}$$

La figure 3.3(b) illustre les approximations de $\Delta(\mu)$ à l'ordre α_s^2, $\Delta_2(\mu)$ et à l'ordre α_s, $\Delta_1(\mu)$. On remarque immédiatement que la dépendence de $\Delta_2(\mu)$ vis-à-vis de l'échelle μ est moindre que celle de $\Delta_1(\mu)$, en accord avec nos attentes. Pour obtenir la meilleure valeur de Δ, on se place à l'échelle μ à laquelle $\Delta_2(\mu)$ est le moins sensible à une variation infinitésimale $\delta\mu$. Cette méthode porte le nom de principe de moindre sensibilité[13]et se traduit par la condition :

$$\left(\frac{d\Delta_2(\mu)}{d\ln\mu^2}\right)_{\mu=\mu_{PMS}} = 0. \tag{3.102}$$

Cette dernière fournit la valeur $\Delta_2(\mu_{PMS}) \simeq 0.0460$, qui ne diffère que de 0.002 de notre première estimation et correspond à une échelle $\mu_{PMS} \sim 24GeV$. L'erreur précédente, de l'ordre de 0.020, était donc surestimée. Nous pouvons en réaliser une nouvelle évaluation en remarquant que $\Delta_2(\mu_{PMS})$ varie de plus ou moins 0.0007 lorsque μ_{PMS} est modifié d'un facteur 2, ce qui est représenté par les deux droites horizontales sur la figure 3.3(b). Nous obtenons ainsi :

$$\Delta_2(\mu_{PMS}) \simeq 0.0460 \pm 0.0007, \tag{3.103}$$

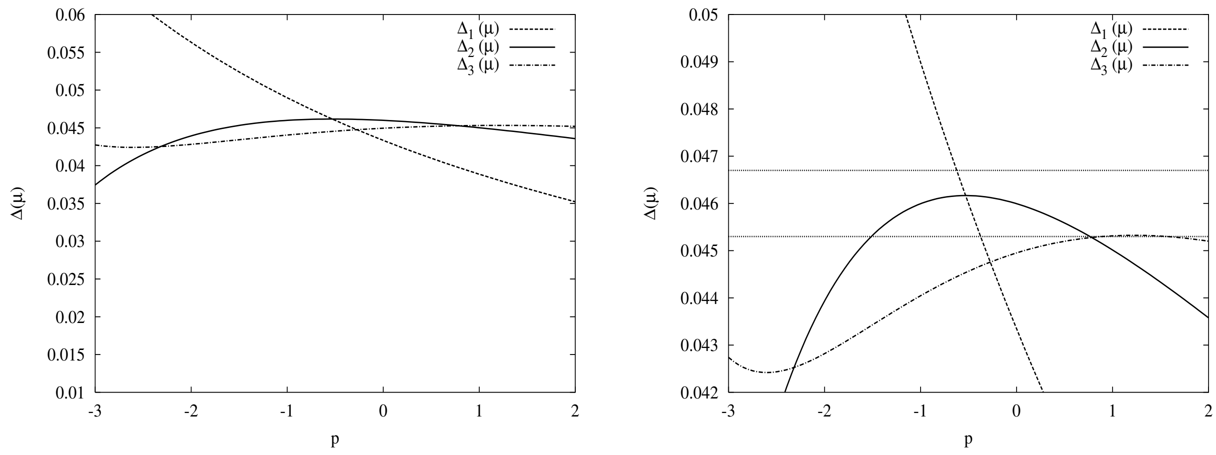
ce qui est représenté par les deux droites horizontales de la figure 3.3. Une deuxième appréciation de l'incertitude peut se baser, comme précédemment, sur l'ordre de grandeur du premier terme omis dans le développement de Δ, valant cette fois $\alpha_s^3(34\text{ GeV})\simeq 0.003$. A nouveau, cette estimation est supérieure à la précédente et c'est donc elle que nous choisissons :

$$\Delta_2 \simeq 0.0460 \pm 0.003. \tag{3.104}$$

Examinons pour terminer l'approximation de $\Delta(\mu)$ à l'ordre α_s^3, $\Delta_3(\mu)$, représentée par les figures 3.4 (a) et (b) aux côtés des deux courbes précédentes. Comme il se doit, la variation de Δ_3 avec μ est moindre que celle de Δ_2, particulièrement aux faibles valeurs de l'échelle. Les droites horizontales représentées sur le second graphique représentent toujours la variation de Δ_2 lorsque μ est modifié d'un facteur 2. Rappelons-nous que cette erreur, de l'ordre de ± 0.0012, était sous-estimée. La courbe de $\Delta_3(\mu)$ possédant deux extrema, l'application du principe de moindre sensibilité fournit deux valeurs pour Δ, $\Delta \simeq 0.0424$ et $\Delta \simeq 0.0453$. En prenant pour meilleur estimation de Δ la moyenne de ces deux nombres et pour évaluation de l'erreur leur demi-différence, nous obtenons :

$$\Delta_3 \simeq 0.0438 \pm 0.0014. \tag{3.105}$$

[12] On utilise la valeur $\alpha_s(\sqrt{s}) = \alpha_s(34\text{ GeV})\simeq 0.14$.
[13] Désigné par l'abréviation PMS.



(a) (b)

FIG. 3.4 – (a) Dépendence de $\Delta_1(\mu)$, $\Delta_2(\mu)$ et $\Delta_3(\mu)$ vis-à-vis de l'échelle de renormalisation μ. (b) Les deux droites horizontales délimitent le domaine de variation de $\Delta_2(\mu)$ autour de la valeur moyenne $\Delta_2(\mu_{PMS})$ lorsque l'échelle μ est modifiée d'un facteur 2.

L'autre appréciation de l'incertitude, $\alpha_s^4(34\,GeV) \simeq 0.0004$, étant cette fois inférieure, nous conservons le premier résultat. Les meilleures estimations à l'ordre α_s^2 et α_s^3 diffèrent de 0.0022. Cette valeur est en accord avec un intervalle d'erreur de ± 0.003 pour Δ_2 et montre bien que l'incertitude de ± 0.0007 était sous-estimée.

L'Homme, en déconfinant la matière,
ne se limitera pas éternellement
à jouer avec des couleurs.

Chapitre 4

Confinement, liberté asymptotique et déconfinement

Dans ce chapitre, nous aborderons premièrement le principe de confinement, au travers d'un rappel des principales observations qui nous conduisent à le postuler. Nous présenterons ensuite une interprétation phénoménologique de la constante de couplage effective et mettrons en évidence sa relation avec le confinement. Nous envisagerons finalement l'existence possible d'une transition de déconfinement à haute énergie [8 – 18].

4.1 Saveur, couleur et confinement

Historiquement, les similitudes existant entre les masses et les spins de certaines particules hadroniques ont conduit les physiciens à classer ces dernières en multiplet de SU(3) : les mésons en octet et singulet, les baryons en octet, singulet et décuplet. Les triplets fondamental et adjoint demeurant inexorablement vides, Zweig y plaça des particules censées pouvoir former à elles seules l'ensemble des hadrons connus : les quarks. Il logea ainsi dans la représentation fondamentale les trois quarks de saveur u, d et s, attribuant à leurs antiparticules la représentation adjointe. Afin de reproduire les multiplets observés, les mésons apparaissaient maintenant comme une paire quark-antiquark, les baryons comme constitués de trois quarks. Il est intéressant de remarquer que l'observation interdit l'existence de toute autre combinaison, ce qui suggère que l'interaction forte, en contraste avec son intensité élevée, possède une étrange propriété de saturation. D'autre part, aucune expérience n'a permis de détecter, jusqu'à ce jour, l'existence de quarks libres. A l'échelle atomique, l'analogie limiterait le tableau périodique à l'hélium et au lithium et interdirait l'existence de l'hydrogène... Cette classification des hadrons selon SU(3) saveur, bien que représentant un réel succès, ne répondait cependant pas à quelques questions d'importance. Un des problèmes rencontrés, le plus fondamental peut-être, concernait le respect du principe d'exclusion de Pauli. Considérons un baryon et supposons que ses quarks constituants forment un état lié dans un puits de potentiel. La configuration énergétique la plus basse correspond dans ce cas à celle où les trois quarks se trouvent dans un état spatialement symétrique. Un baryon de spin 3/2 pose alors difficulté. Les parties spatiale, spinorielle et de saveur de sa fonction d'onde à trois quarks sont toutes symétriques, violant ainsi le principe de Pauli. Comment trouver réponse à ce conflit ? A l'époque, notre désormais familière annihilation $e^+e^- \rightarrow$ hadrons, qui contient comme sous-processus la formation d'une paire $q\overline{q}$, avait mis en évidence l'existence d'un degré de liberté supplémentaire pour les quarks, ce dernier pouvant prendre trois valeurs différentes. Il semblait alors assez naturel d'associer à ce nouveau degré de liberté, bâptisé du nom de couleur, une nouvelle symétrie des interactions fortes. On suppose ainsi que les trois couleurs R, G, B occupent le triplet fondamental de SU(3), les anticouleurs $\overline{R}$, $\overline{G}$, $\overline{B}$ se transformant quant à elle comme la représentation adjointe. Il est alors possible de classer les hadrons en multiplets de SU(3) couleur, comme précédemment pour SU(3) saveur. Cependant, la non observation de quarks libres et plus généralement, l'inexistence dans la nature d'états hadroniques colorés, conduisent à postuler que les hadrons apparaissent uniquement sous la forme de singulet de couleur. La fonction d'onde de couleur d'un baryon s'écrira donc de manière générale sous la forme :

$$\psi_{baryon,couleur} = \varepsilon_{cde} q^c q^d q^e, \tag{4.1}$$

où c, d et e représentent les indices de couleur des fonctions d'onde q et ε_{cde} le tenseur de Levi-Civita. Cette fonction d'onde est, comme il se doit, antisymétrique et l'on peut montrer qu'elle correspond bien à un singulet. La fonction d'onde de couleur d'un méson s'écrira quant à elle :

$$\psi_{méson,couleur} = q^c \overline{q}_c, \tag{4.2}$$

expression qui constitue bien un singulet de couleur. En résumé, la structure des hadrons peut être comprise à l'aide des degrés de liberté de saveur et de couleur. On est cependant amené à postuler l'inexistence d'états colorés, et par là, de quarks libres. C'est le postulat de confinement. Ce dernier doit certainement trouver son origine dynamique dans l'interaction de couleur entre gluons, auquel cas il ne constituerait plus une hypothèse contrainte. L'électrodynamique tend à former des atomes neutres à partir de protons et d'électrons chargés. De même, la chromodynamique s'attache à créer des hadrons non colorés à partir de quarks et d'antiquarks qui eux le sont, et ce en favorisant énergétiquement les singulets de couleur.

4.2 Confinement et liberté asymptotique

Nous avons découvert dans le chapitre II que la chromodynamique possède la propriété de liberté asymptotique. A présent, nous allons envisager cette caractéristique essentielle d'un point du vue phénoménologique et aborder sa relation possible avec le postulat de confinement. L'interprétation de la constante de couplage effective $\alpha_s(Q^2)$ fait appel au champ de couleur pour lequel nous ne possédons aucun bagage intuitif. En électrodynamique, par contre, l'analogie classique est plus simple à effectuer. Le comportement de la constante de couplage renormalisée, $\alpha(Q^2)$, dont la valeur augmente lorsque l'échelle de distance entre les particules qui interagissent diminue, peut en effet être comparé au phénomène macroscopique de polarisation. Nous débutons dès lors par l'analyse de $\alpha(Q^2)$ et transposons ensuite l'interprétation obtenue au cas de la chromodynamique.

4.2.1 De l'électrodynamique ...

Considérons une charge électrique q placée dans un milieu diélectrique polarisable, tel de l'eau [8]. Si nous introduisons une autre charge $-q$ dans le milieu, le champ électrique qui les relie va aligner les molécules d'eau, celles-ci possédant un moment dipolaire électrique permanent, ainsi que représenté sur la figure 4.1. Les effets du moment dipolaire induit par unité de volume, $\vec{P}$, sur le champ libre, sont similaires à ceux produits par une densité de charges induites :

$$\rho_{ind} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}. \tag{4.3}$$

Pour un matériau simple, la polarisation est proportionnelle au champ parent et l'on peut écrire, en désignant par ε_0 la constante diélectrique du vide et par χ_e la susceptibilité électrique du matériau :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}. \tag{4.4}$$

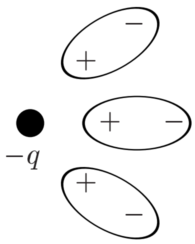


FIG. 4.1 – Dipôles entourant une charge placée dans un milieu diélectrique.

La loi de Gauss dans le vide est modifiée en conséquence et le champ résultant satisfait à présent à l'équation :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_0 + \rho_{ind}}{\varepsilon_0}, \tag{4.5}$$

ρ_0 désignant la densité de charges réellement introduites dans le matériau. En supposant χ_e constant, cette dernière expression peut encore s'écrire :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_0}{\varepsilon}, \tag{4.6}$$

où $\varepsilon = (1 + \chi_e)\varepsilon_0$ est la constante diélectrique du milieu. La valeur du champ dans le matériau est donc réduite d'un facteur $\varepsilon_0/\varepsilon < 1$ par rapport à sa valeur dans le vide. Evidemment, cette approche du phénomène de polarisation est essentiellement macroscopique, les molécules d'eau étant remplacées par une distribution continue ρ_{ind}. Lorsque la distance entre les deux charges introduites dans le milieu atteint l'échelle du diamètre moléculaire, l'effet d'écrantage précédemment observé s'estompe, le champ retrouvant alors la valeur qu'il possédait dans le vide. Ce comportement peut être représenté phénoménologiquement par le potentiel :

$$V(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon(r) r}, \tag{4.7}$$

q_1 et q_2 désignant les charges introduites dans le diélectrique. Le paramètre $\varepsilon(r)$ varie de manière douce et continue depuis l'unité pour $r \ll d$ jusqu'à la valeur $\varepsilon/\varepsilon_0$ pour $r \gg d$, d désignant le diamètre des molécules polarisées. Le phénomène d'écrantage peut dès lors être décrit en terme d'une charge effective $q(r)$ définie par :

$$q(r) = \frac{q}{\sqrt{\varepsilon(r)}}. \tag{4.8}$$

La valeur de cette dernière, représentée par la figure 4.2, dépend à présent de la séparation entre les particules.

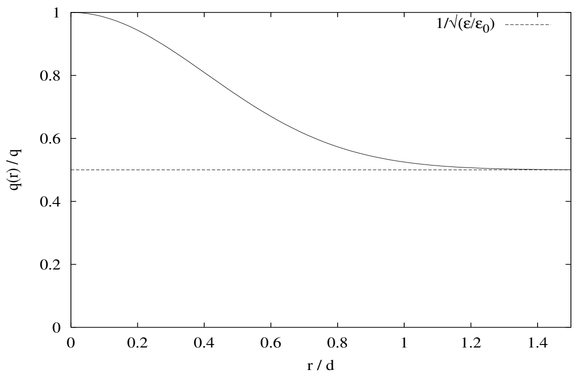


FIG. 4.2 – Comportement de la charge effective en fonction de la séparation entre les particules.

Le même raisonnement peut s'appliquer à l'électrodynamique quantique, en remplaçant le milieu polarisable par le vide de la théorie en interaction. L'argumentation repose alors sur le concept de polarisation du vide, c'est-à-dire la création de paires par matérialisation du champ intense régnant au voisinage d'une charge placée dans le vide. Les particules virtuelles de masse m constituant ces paires peuvent exister pendant un intervalle de temps $\Delta t \sim \hbar/mc^2$ au cours duquel elles s'étendent autour de la charge initiale sur une distance $\Delta x \sim \hbar/mc$. Cette dernière, qui n'est autre que la longueur d'onde de Compton de la fluctuation, donne une mesure du diamètre moléculaire introduit auparavant, les particules virtuelles à l'origine de l'écrantage remplaçant à présent les molécules polarisables. Le vide nu, sans paires virtuelles, correspond donc au vide de l'analyse macroscopique et le vide physique, avec paires, au milieu diélectrique polarisable. Evidemment, il est impossible de s'extraire de ce vide physique, et nous sommes ainsi condamnés à n'observer que des charges effectives. Dès lors, ce que nous appelons la charge de l'électron, e, constitue en réalité la valeur asymptotique d'une charge effective $e(r)$ pour $r \to \infty$, c'est-à-dire pour r nettement supérieur à la longueur d'onde de Compton de l'électron. Dans le contexte covariant de la théorie des champs, on exprimera la dépendance de la charge effective par rapport au carré de la quadri-impulsion de transfert q^2 plûtot qu'en terme d'une échelle de longueur. On est ainsi amené à définir, par analogie avec l'expression (4.8), la quantité[1] :

$$e(q^2) = \sqrt{\varepsilon(q^2)}e, \tag{4.9}$$

où e désigne la valeur écrantée de la charge électronique :

$$e = \lim_{q^2 \to 4m_e^2} e(q^2). \tag{4.10}$$

La constante de couplage effective $\alpha(q^2)$ est par conséquent donnée par :

$$\alpha(q^2) \equiv \frac{e^2(q^2)}{4\pi} = \frac{\varepsilon(q^2)\, e^2}{4\pi} = \varepsilon(q^2)\, \alpha(m_e^2). \tag{4.11}$$

La comparaison de cette dernière relation avec l'expression(3.91) fournit :

$$\varepsilon(q^2) = \frac{3\pi}{3\pi - \alpha(m_e^2)\, \ln\left(\frac{q^2}{4m_e^2}\right)} \geqslant 1. \tag{4.12}$$

L'électrodynamique, suite à la polarisation du vide, est donc caractérisée par un écrantage de la charge électrique, propriété que traduit la constante de couplage effective $\alpha(q^2)$:

$$r \nearrow \Longrightarrow \alpha(q^2) \searrow \alpha(m_e^2). \tag{4.13}$$

Ce comportement est illustré par la figure 4.3.

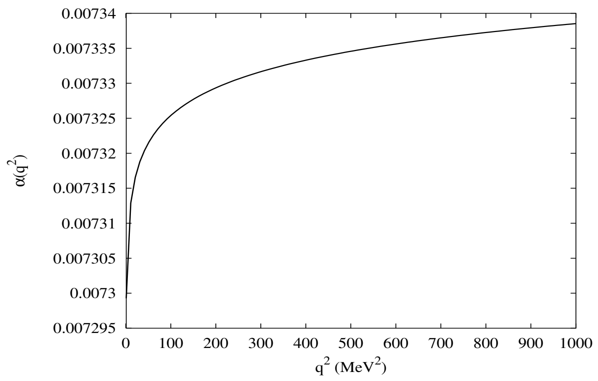


FIG. 4.3 – Comportement de la constante de couplage effective $\alpha(q^2)$.

[1]Dans l'expression (4.8), la charge effective $q(r)$ est définie en terme de la charge nue q. La définition (4.9) de la charge effective $e(q^2)$ fait par contre référence à la valeur écrantée e, la charge nue étant infinie.

4.2.2 ... à la chromodynamique

La chromodynamique étant, au même titre que l'électrodynamique, une théorie de jauge, il est possible de définir des champs chromoélectrique $\vec{E}^a$ et chromomagnétique $\vec{B}^a$, correspondant colorés des champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$, et dès lors d'étendre le raisonnement précédent au domaine de la QCD. En électrodynamique, ces champs peuvent se définir en terme du tenseur électromagnétique $F_{\mu\nu}$, et l'on a :

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \\ E_i &= F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0, \\ \varepsilon_{ijk} B_k &= F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Les champs de couleur sont alors définis de manière analogue en terme du tenseur chromoélectromagnétique $F^a_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} F^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu, \\ E^a_i &= F^a_{0i} = \partial_0 A^a_i - \partial_i A^a_0 + g f^{abc} A^b_0 A^c_i, \\ \varepsilon_{ijk} B^a_k &= F^a_{ij} = \partial_i A^a_j - \partial_j A^a_i + g f^{abc} A^b_i A^c_j. \end{aligned} \tag{4.15}$$

On remarque à nouveau que la différence essentielle entre les expressions (4.14) et (4.15) réside dans la propriété que possède le champ de couleur d'interagir avec lui-même. Cela étant, nous pouvons définir une charge effective $g(Q^2)$, en transposant la relation (4.9) au cas de la chromodynamique :

$$g(Q^2) = \sqrt{\varepsilon(Q^2)}\, g(\mu^2). \tag{4.16}$$

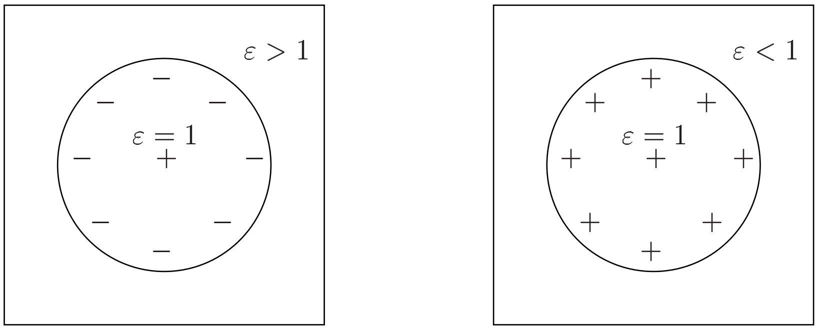
Dans cette définition, $g(\mu^2)$ désigne la valeur de la charge effective en $Q^2 = \mu^2$ et constitue l'équivalent coloré de la charge écrantée $e = e(Q^2 \to 4m_e^2)$. La constante de couplage effective $\alpha_s(Q^2)$ s'écrira dès lors :

$$\alpha_s(Q^2) \equiv \frac{g^2(Q^2)}{4\pi} = \frac{\varepsilon(Q^2)\, g^2(\mu^2)}{4\pi} = \varepsilon(Q^2)\, \alpha_s(\mu^2). \tag{4.17}$$

La comparaison des expressions (3.86) et (4.17) fournit l'égalité :

$$\varepsilon(Q^2) = \frac{12\pi}{12\pi + (33 - 2n_f)\, \alpha_s(\mu^2) \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right)}. \tag{4.18}$$

Nous constatons que pour le champ de couleur, $\varepsilon(Q^2) \leqslant 1$ pour un nombre de saveurs $n_f \leqslant 16$. Les fluctuations du vide, qui aboutissaient en électrodynamique à un écrantage de la charge électrique aux grandes échelles de distance, semblable à celui que l'on observe pour une charge placée dans un milieu diélectrique (constante diélectrique $\varepsilon \geqslant 1$), mènent à présent à un antiécrantage de la charge de couleur aux échelles de distance élevées, de manière analogue à ce qui se passerait si l'on plaçait une charge électrique dans un hypothétique milieu diaélectrique (constante diaélectrique $\varepsilon \leqslant 1$). Ces deux comportements opposés sont représentés sur les figures 4.4(a) et 4.4(b), qui illustrent respectivement l'écrantage –milieu diélectrique– et l'antiécrantage –milieu diaélectrique– d'une charge aux grandes échelles de distance [9].



(a) (b)

Fig. 4.4 – Représentation de l'écrantage en QED (a) et de l'antiécrantage en QCD (b).

Dans un milieu diaélectrique, les charges induites seraient de même signe que la charge introduite et seraient donc repoussées par cette dernière. On assisterait par conséquent à la formation d'un trou autour de la charge initiale. Le système tendrait alors à minimiser l'énergie de son champ électrique extérieur[2] en rendant son volume aussi grand que possible. Cet élargissement du trou au sein du milieu engendrerait évidemment un certain apport d'énergie, proportionnel au volume formé, et l'équilibre serait dès lors atteint par un compromis entre réduction de l'énergie du champ externe et augmentation de l'énergie engendrée par l'expansion de la bulle. Si nous notons B la densité d'énergie associée à la création de cette dernière et R le rayon de la sphère formée, l'énergie acquise par le système par accroissement de son volume s'écrit [9] :

$$E_{bulle} = \frac{4}{3}\pi R^3 B. \tag{4.19}$$

A l'intérieur de l'enceinte, la constante ε vaut 1 et à l'extérieur, au sein du vide diaélectrique, $\varepsilon \ll 1$. L'énergie du champ à l'intérieur du trou peut donc être négligée devant celle du champ extérieur[3]. En désignant par Q la charge placée dans le milieu, les champ et déplacement électriques externes s'écrivent :

$$\begin{aligned} D_{ext} &= \frac{Q}{4\pi r^2}, \\ E_{ext} &= \frac{1}{\varepsilon} D_{ext}, \end{aligned} \tag{4.20}$$

ce qui fournit pour l'énergie du champ à l'extérieur de la sphère :

$$E_{champ} = \frac{1}{2}\int_{r \geqslant R} \vec{E}\cdot\vec{D}\, d^3r = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon R}. \tag{4.21}$$

L'énergie totale du système correspond à la somme des contributions (4.19) et (4.21), et l'on a :

$$E_{tot} = E_{bulle} + E_{champ} = \frac{4}{3}\pi R^3 B + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon R}. \tag{4.22}$$

L'enceinte formée par la charge étant stable au minimum de son énergie, le rayon R du système à l'équilibre a pour valeur :

$$R = \left(\frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon B}\right)^{1/4}. \tag{4.23}$$

[2] A l'extérieur du volume, $\varepsilon \ll 1$ et l'énergie du champ interne peut donc être négligée.
[3] On peut déjà percevoir à ce stade que les vides intérieur et extérieur à la sphère sont de nature très différente.

Dans la limite où la constante diaélectrique ε tend vers zéro, le rayon de la bulle ainsi que son énergie totale divergent. Une charge isolée placée dans un tel milieu diaélectrique correspondrait donc à un état d'énergie infinie. Sur base de cette analogie classique, nous sommes amenés à supposer que le vide de la chromodynamique quantique constitue un diaélectrique de couleur presque parfait, dans lequel le comportement d'un objet coloré est essentiellement similaire à ce qui a été décrit précédemment. Une charge de couleur placée dans le vide y forme une enceinte, résultat de la propriété d'antiécrantage de la QCD. Un état coloré possède dès lors une énergie infinie et est par conséquent inobservable. Etant formé d'un nombre infini de particules virtuelles interagissant fortement entre elles, le vide de la chromodynamique est hautement non perturbatif. Lorsqu'un objet coloré y est introduit, il repousse les charges de couleur présentes dans son voisinage, formant ainsi une bulle dans le vide qui l'entoure. La théorie perturbative peut alors s'appliquer au vide contenu dans le volume formé, le champ de couleur qui y demeure étant fiable. On distingue dès lors le vrai vide chromodynamique, non-perturbatif, de ce vide perturbatif présent à l'intérieur de l'enceinte qui entoure la charge de couleur et qui possède une densité d'énergie supérieure à celle du précédent, la différence résidant dans la densité d'énergie B associée à la création du volume. Cependant, la création d'une telle bulle par un objet coloré nécessitant une quantité d'énergie infinie, seuls des quarks se trouvant dans un état singulet de couleur peuvent y parvenir. Pour la même raison, il semble impossible de pouvoir extraire un quark de son enceinte perturbative. Cette argumentation conforte le postulat de confinement selon lequel les hadrons apparaissent uniquement sous la forme de singulets de couleur, interdisant ainsi l'observation de quarks libres. Les considérations qualitatives développées ci-dessus servent de base à l'établissement de modèles de confinement, dans lesquels les quarks se déplacent dans un puits de potentiel phénoménologique. L'étude des états quantiques des quarks confinés dans ce potentiel permet alors de déterminer les propriétés du hadron correspondant.

4.3 La transition de déconfinement

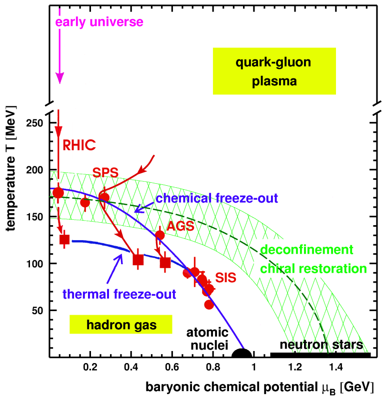


FIG. 4.5 – Diagramme de phase (μ_B, T) associé au déconfinement d'un gaz hadronique en un plasma quark-gluon. La région hachurée indique l'incertitude théorique relative à la transition de phase, la courbe en pointillé représentant quant à elle sa localisation la plus probable.

La propriété de liberté asymptotique offre la possibilité, à température ou densité élevée, d'un déconfinement de la matière hadronique en un plasma quark-gluon[4]. La théorie affirme que cet état a dû exister pendant les dix premières microsecondes qui ont suivi le Big-Bang, lorsque la température de l'univers était de l'ordre de 10^5 MeV. La transition hadron-QGP est analogue à l'évolution d'un gaz atomique neutre en un plasma ionisé, dans la mesure où les degrés de liberté

[4]Désigné par l'abréviation QGP, de l'anglais quark-gluon plasma.

finals du système, dans un cas comme dans l'autre, correspondent aux constituants élémentaires. Cependant, en dépit du fait qu'ils possèdent des propriétés physiques distinctes, aucune transition de phase ne sépare le gaz atomique neutre du plasma ionisé, et le processus d'ionisation s'effectue de manière graduelle. La QCD prédit par contre une transition marquée entre le gaz hadronique et le plasma quark-gluon. Le changement de phase est en effet censé s'accompagner d'un accroissement rapide de la densité d'entropie et d'un écart important par rapport à la loi de Stefan-Boltzmann. A l'heure actuelle, la transition de déconfinement n'a toujours pas été observée. Son ordre varie selon le modèle utilisé pour la décrire et demeure dès lors une inconnue. La QCD sur réseau -version discrétisée de la QCD- permet cependant d'effectuer quelques prédictions en fournissant le diagramme de phase (μ_B, T) associé à la transition, μ_B et T désignant respectivement le potentiel chimique baryonique et la température du système. Ce diagramme est représenté sur la figure 4.5 [11]. Nous constatons qu'à potentiel chimique baryonique nul[5], la transition de déconfinement est atteinte en élevant la température de la matière hadronique à la valeur critique $T_c \simeq 150 - 200\,\mathrm{MeV}$. La densité d'énergie critique ϵ_c correspondante est alors de l'ordre[6] de 1 $\mathrm{GeV/fm^3}$. Nous observons qu'à température nulle, cette densité d'énergie est obtenue en comprimant la matière nucléaire froide jusqu'à la valeur critique du potentiel chimique baryonique, $\mu_c \simeq 1.2 - 1.6$ GeV. La densité baryonique critique vaut alors $\rho_c \simeq 3 - 10\,\rho_0$, $\rho_0 = 0.17\,\mathrm{fm^{-3}}$ désignant la densité nucléaire à l'équilibre. Les scientifiques espèrent pouvoir atteindre la densité d'énergie critique ϵ_c au travers de la réalisation de collisions relativistes d'ions lourds. Les points représentés sur la figure 4.5 correspondent aux régions de l'espace (μ_B, T) accessibles aux accélérateurs actuels. Ces derniers sont classés dans le tableau ci-dessous par ordre croissant de l'énergie par nucléon qu'ils permettent d'atteindre.

accélérateur	énergie par nucléon
SIS	1 GeV/nucléon
AGS : Alternating Gradient Synchrotron (BNL)	10 GeV/nucléon
SPS : Super Proton Synchrotron (CERN)	160 GeV/nucléon
RHIC : Relativistic Heavy Ions Collider (BNL)	200 GeV/nucléon
LHC : Large Hadron Collider (CERN, 2007)	5500 GeV/nucléon

A faible énergie (SIS), les nucléons sont stoppés lors de la collision et comprimés au centre de la zone réactionnelle. La densité baryonique y demeure dès lors élevée, ce que nous pouvons constater sur la figure 4.5. La température reste quant à elle inférieure à 100 MeV. Au fur et à mesure que l'énergie par nucléon augmente, les baryons sont de moins en moins freinés par les chocs qu'ils subissent. Ils quittent dès lors le centre de la zone réactionnelle dont la densité baryonique décroît en conséquence. On peut ainsi espérer former un plasma quark-gluon pur, libre de toutes charges baryoniques et similaire à celui qui a dû exister dans l'univers naissant [10]. Bien que l'énergie du RHIC lui permette d'atteindre la région de déconfinement, celui-ci n'a pas encore été détecté. En l'absence d'un paramètre d'ordre caractéristique de la transition, le signal le plus pertinent de la formation possible d'un plasma quark-gluon est la suppression anomale que l'on observe dans la production du méson J/ψ -état lié $c\bar{c}$- dans les collisions d'ions lourds A-B [11–14]. Le temps de vie élevé de cette particule lui permet de s'échapper de la zone réactionnelle avant de se désintégrer notamment en une paire $\mu^+\mu^-$[7] dont la détection permet de sonder les instants primordiaux du processus de collision. Désignons par σ_{p-p} la section efficace de production du J/ψ dans une collision proton-proton et par σ_{p-A} sa section efficace de production

[5]Cette situation correspond à une densité baryonique ρ_B négligeable, ce qui est le cas lorsque la phase hadronique est essentiellement constituée de pions.

[6]Pour comparaison, la densité d'énergie de la matière nucléaire à l'équilibre est de 450 $\mathrm{MeV/fm^3}$.

[7]Il ne s'agit pas du mode de désintégration dominant ($\Gamma_{\mu^+\mu^-}/\Gamma_{tot} \simeq 6\%$), mais de celui le plus aisé à détecter expérimentalement [15].

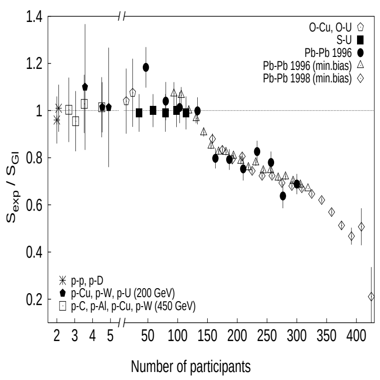
dans une collision proton-ion[8]. Expérimentalement, on observe alors que la présence d'un milieu nucléaire confiné dans les collisions p-A entraîne [16] :

$$\begin{aligned} \sigma_{p-A} &< A\,\sigma_{p-p} \\ &= A^{\alpha}\,\sigma_{p-p}, \end{aligned} \tag{4.24}$$

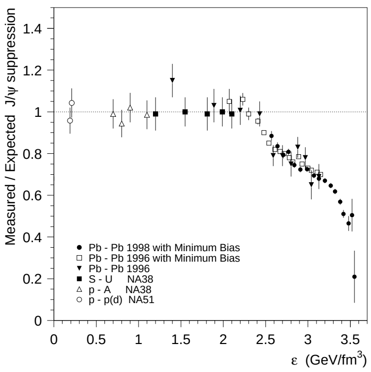
où l'exposant α est de l'ordre de 0.92. Ce résultat s'explique simplement si l'on considère qu'au cours de son trajet dans la matière nucléaire, le J/ψ interagit avec les nucléons qu'il rencontre sous forme de chocs inélastiques qui peuvent finalement aboutir à la dissociation de l'état lié. On peut ainsi définir un libre parcours moyen du J/ψ dans la matière [14] :

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma_{diss}}, \tag{4.25}$$

n désignant la densité nucléaire et σ_{diss} la section efficace de dissociation du J/ψ dans le milieu nucléaire confiné. L'expérience indique que σ_{diss} est de l'ordre de 6 à 7 mb. Ce processus porte le nom d'absorption nucléaire et constitue ce que l'on pourrait appeler la suppression normale du J/ψ. Les collisions d'ions lourds A-B ont alors mis en évidence une suppression accrue de la production du J/ψ, incompatible avec le phénomène précédent, et qui a dès lors reçu le nom de suppression anomale. Les figures 4.6(a) et 4.6(b) illustrent cette dernière en fonction du nombre de nucléons participants[9] et de la densité d'énergie initiale respectivement [13].



(a)



(b)

FIG. 4.6 – Suppression anomale du J/ψ dans les collisions relativistes d'ions lourds A-B. Rapport entre le taux de production du J/ψ observé et son taux de production en présence de matière nucléaire confinée (absorption nucléaire, suppression normale), en fonction du nombre de nucléons participants (a) et de la densité d'énergie initiale (b).

La figure 4.6(a) nous indique que pour un nombre de nucléons participants $n \simeq 100$, une suppression anomale de la production du J/ψ fait brusquement son apparition. Lorsque le nombre de participants $n \simeq 300$, une seconde suppression, de pente supérieure à la précédente, est également observée. Ces deux valeurs correspondent respectivement à une densité d'énergie initiale ϵ de l'ordre de 2 et 3 GeV/fm^3, ainsi qu'illustré sur la figure 4.6(b). Une explication de cette diminution du taux de production du J/ψ repose sur la formation possible d'un plasma quark-gluon, dont la présence écrante l'interaction de couleur entre la paire $c\bar{c}$ produite lors de l'impact

[8]A désigne le numéro atomique de l'ion considéré.

[9]Le nombre de nucléons participants est fonction du paramètre d'impact $\vec{b}$, c'est-à-dire de la centralité de la collision.

nucléaire initial, empêchant ainsi la formation de l'état lié. Le potentiel écranté de la paire $c\bar{c}$ en présence d'un plasma quark-gluon est donné par l'expression [10] :

$$V(r,T) = \frac{A}{r^2} e^{-\frac{2r}{r_D(T)}}, \tag{4.26}$$

dans laquelle A, r et T désignent respectivement une constante, la distance séparant le quark de l'antiquark et la température, la distance d'écrantage de Debye $r_D(T)$ étant quant à elle donnée par :

$$r_D(T) = \frac{1}{gT\sqrt{1+n_f/6}}, \tag{4.27}$$

où g est la constante de l'interaction forte et n_f le nombre de saveurs des quarks présents dans le plasma. Une distance d'écrantage de Debye inférieure au rayon moyen du J/ψ, dont la valeur est de l'ordre de 0.4 fm, aboutit à une dissociation de l'état lié. Pour un nombre de saveurs $n_f = 6$, la relation (4.27) nous indique que cette dissociation a lieu à une température de l'ordre de 170 MeV, compatible avec la présence d'un plasma quark-gluon jusqu'à ce jour inobservé.

4.4 Une approche simple du déconfinement

Nous allons à présent estimer la température critique T_c nécessaire au déconfinement à potentiel chimique baryonique nul, au travers d'un modèle très simple qui tente d'incorporer d'un point de vue phénoménologique deux des propriétés principales de la chromodynamique : la liberté asymptotique et le confinement [9, 17, 18]. Les hadrons y sont représentés par des sacs de vide perturbatif baignant au sein d'un milieu confinant. A l'intérieur de ces enceintes, les quarks sont très proches les uns des autres et peuvent dès lors être considérés, en première approximation, comme se déplaçant librement. Par contre, à l'extérieur du volume perturbatif, quarks et gluons ne peuvent apparaître sous la forme de particules libres. Pour rendre compte de ces deux propriétés, on suppose comme précédemment que le vide perturbatif possède une densité d'énergie B constante[10] qui confine les quarks et les gluons. L'énergie du hadron sera donc composée de deux termes : l'énergie associée à son volume, due à la densité d'énergie du vide perturbatif et l'énergie cinétique des quarks qui le constituent. En appelant R le rayon de la sphère hadronique, le principe d'incertitude nous indique que l'énergie cinétique se comporte en C/R, où C est une constante. L'énergie du hadron sera donc donnée par :

$$E_H = \frac{4}{3}\pi R^3 B + \frac{C}{R}. \tag{4.28}$$

La configuration d'équilibre correspondant à l'état d'énergie minimum, nous obtenons pour le rayon hadronique :

$$R = (\frac{C}{4\pi B})^{1/4}, \tag{4.29}$$

et la masse du hadron vaut dès lors :

$$M = \frac{16}{3}\pi R^3 B. \tag{4.30}$$

Cette dernière relation nous permet d'estimer la densité d'énergie de confinement B. Le proton, dont la masse est de 938 MeV et le rayon classique de l'ordre de 0.8 fm, nous fournit ainsi une valeur de $B \simeq 110\,\mathrm{MeV/fm^3}$. Ce résultat, obtenu de manière grossière, est à comparer à celui qu'établissent des modèles de confinement plus élaborés, pour lesquels B est de l'ordre de $200\,\mathrm{MeV/fm^3}$. La pression qu'exerce la bulle sur le vide confinant qui l'entoure est donnée par :

$$P = -\partial_V E_H = -B + \frac{C}{4\pi R^4}. \tag{4.31}$$

[10]Cette densité d'énergie porte le nom de constante de sac.

A l'équilibre, la pression totale s'annule, la contribution constante du vide étant exactement compensée par celle provenant de l'énergie cinétique des quarks[11]. Cette dernière pourrait cependant être accrue en élevant la température du hadron, la pression totale pouvant dès lors devenir positive. Cela entraînerait une expansion de la bulle hadronique, qui pourrait ainsi fusionner avec ses voisines présentes dans le même noyau. Les quarks et les gluons, précédemment confinés à l'intérieur des hadrons, se déplaceraient alors librement sous la forme d'un plasma au sein d'un volume beaucoup plus important. Afin d'estimer la température nécessaire à ce déconfinement, nous allons aborder la transition entre la phase hadronique et le plasma quark-gluon d'un point de vue purement thermodynamique. Le nombre de particules n'étant pas constant, nous nous plaçons dans le cadre de l'ensemble grand-canonique. Le grand potentiel Ω pour un gaz parfait de bosons à ν_b degrés de liberté s'écrit[12] :

$$\Omega = \nu_b V T \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln\left(1 - e^{-\frac{\omega_k - \mu}{T}}\right), \tag{4.32}$$

où μ est le potentiel chimique associé à une particule, V le volume du système, T sa température et $\omega_k = \left(k^2 + m^2\right)^{1/2}$ l'énergie d'un boson. Pour des bosons de masse et de potentiel chimique nuls, la relation (4.32) devient, après intégration par partie et en posant $x = k/T$:

$$\Omega = -\frac{\nu_b V}{6\pi^2} T^4 \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}}_{6\pi^4/90} = -\frac{\nu_b \pi^2 V T^4}{90}. \tag{4.33}$$

La pression d'un gaz parfait de bosons ($m = \mu = 0$) est alors donnée par :

$$P = -\partial_V \Omega = \frac{\nu_b \pi^2}{90} T^4. \tag{4.34}$$

La relation $E = 3PV$ entre l'énergie et la pression d'un gaz parfait ultrarelativiste nous donne pour la densité d'énergie ϵ :

$$\epsilon = \frac{\nu_b \pi^2}{30} T^4. \tag{4.35}$$

La densité d'entropie s s'obtient quant à elle à partir de la définition du grand potentiel à potentiel chimique nul, $\Omega = E - TS$, et l'on trouve :

$$s = \frac{4\epsilon}{3T} = \frac{2\nu_b \pi^2}{45} T^3. \tag{4.36}$$

La densité de particules n se déduit du nombre moyen de particules $\overline{N}$:

$$\overline{N} = -\partial_\mu \Omega = \nu_b V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\frac{\omega_k - \mu}{T}} - 1}. \tag{4.37}$$

Pour un gaz parfait de bosons non massifs et de potentiel chimique nul, cette expression devient :

$$n = \frac{\nu_b}{2\pi^2} T^3 \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1}}_{2\zeta(3)} = \frac{\nu_b \zeta(3)}{\pi^2} T^3, \tag{4.38}$$

où $\zeta(n)$ est la fonction zêta de Riemann. En remarquant que $\zeta(3) \simeq 1.202$, nous obtenons ainsi :

$$n \simeq 1.202 \frac{\nu_b}{\pi^2} T^3. \tag{4.39}$$

[11] Il suffit pour s'en convaincre d'insérer l'expression (4.29) du rayon à l'équilibre dans la relation (4.31).

[12] La constante de Boltzman $k = 1$.

Les égalités (4.36) et (4.39) permettent de relier la densité de bosons à celle d'entropie :

$$s = \frac{2\pi^4}{45\zeta(3)} n \simeq 3.6n. \tag{4.40}$$

Abordons maintenant le cas des fermions. Le grand potentiel d'un gaz parfait de fermions à ν_f degrés de liberté s'écrit :

$$\Omega = -\nu_f \, V \, T \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln\left(1 + e^{-\frac{\epsilon_p - \mu}{T}}\right), \tag{4.41}$$

où μ est le potentiel chimique associé à un fermion et $\epsilon_p = \left(p^2 + m^2\right)^{1/2}$ l'énergie d'une particule. Pour des fermions de masse nulle, la prise en considération des particules et des antiparticules aboutit à l'expression suivante pour le grand potentiel [17] :

$$\Omega = -\frac{\nu_f \, V}{6\pi^2} \left(\frac{7\pi^4}{60} T^4 + \frac{\mu^2 \, \pi^2}{2} T^2 + \frac{\mu^4}{4}\right). \tag{4.42}$$

La pression du gaz de fermions s'écrit dès lors :

$$P = -\partial_V \Omega = \frac{\nu_f}{6\pi^2} \left(\frac{7\pi^4}{60} T^4 + \frac{\mu^2 \, \pi^2}{2} T^2 + \frac{\mu^4}{4}\right). \tag{4.43}$$

Le nombre moyen de particules vaut quant à lui :

$$\overline{N} = -\partial_\mu \Omega = \frac{\nu_f \, V}{6\pi^2} \left(\mu \, \pi^2 \, T^2 + \mu^3\right), \tag{4.44}$$

ce qui fournit pour la densité de fermions :

$$n = \frac{\nu_f}{6\pi^2} \left(\mu \, \pi^2 \, T^2 + \mu^3\right). \tag{4.45}$$

La densité d'énergie ϵ s'obtient alors au moyen de la relation $\epsilon = \mu n - \frac{T^2}{V} \partial_T \left(\frac{\Omega}{T}\right)$, et l'on trouve :

$$\epsilon = \frac{\nu_f}{6\pi^2} \left(\frac{7}{20} \pi^4 \, T^4 + \frac{3}{2} \pi^2 \, \mu^2 \, T^2 + \frac{3}{4} \, \mu^4\right). \tag{4.46}$$

A potentiel chimique nul, les expressions (4.42), (4.43) et (4.46) s'écrivent sous la forme :

$$\Omega = -\frac{7\nu_f \, \pi^2 \, V}{360} T^4 = E - T \, S, \tag{4.47}$$

$$P = \frac{7\nu_f \, \pi^2}{360} T^4, \tag{4.48}$$

$$\epsilon = \frac{7\nu_f \, \pi^2}{120} T^4, \tag{4.49}$$

et la densité d'entropie s'obtient à partir des égalités (4.47) et (4.49) :

$$s = \frac{7\nu_f \pi^2}{90} T^3. \tag{4.50}$$

Examinons à présent la possibilité d'une transition de phase à potentiel chimique nul. Dans ce cas, le système hadronique est essentiellement constitué de pions -mésons de spin nul- dont nous négligeons la masse pour la simplicité du raisonnement. La pression du gaz de hadrons est par conséquent donnée par l'expression (4.34) dans laquelle le nombre de degrés de liberté $\nu_b = 3$, le pion pouvant se trouver dans l'un des trois états de charge π^0, π^+ ou π^- :

$$P_{hadron} = \frac{\pi^2}{30} T^4. \tag{4.51}$$

La pression du plasma quark-gluon est constituée pour sa part de trois contributions, celles des quarks P_Q, des gluons P_G et la pression $-B$ exercée par le vide perturbatif au sein du milieu confinant. Elle s'écrit dès lors :

$$\begin{aligned} P_{QGP} &= P_Q + P_G - B \\ &= \frac{7\nu_f\,\pi^2}{360} T^4 + \frac{\nu_b\,\pi^2}{90} T^4 - B \\ &= \left(\frac{7}{4}\nu_f + \nu_b\right)\frac{\pi^2}{90} T^4 - B. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Le nombre de degrés de liberté ν_b des gluons est égal à 16, ceux-ci pouvant se trouver dans deux états de polarisation physiques et dans huit états colorés possibles. Le nombre de degrés de liberté des quarks vaut quant à lui $\nu_f = N_s\, N_c\, N_f$, ces trois facteurs désignant respectivement les degrés de liberté de spin, de couleur et de saveur[13]. Si nous nous limitons aux deux quarks u et d de plus faibles masses, $\nu_f = 12$ et la pression du plasma quark-gluon s'écrit dans ce cas :

$$P_{QGP} = \frac{37\pi^2}{90} T^4 - B. \tag{4.53}$$

L'égalité des pressions de la phase hadronique et du plasma fournit la température critique T_c à laquelle la transition de déconfinement a lieu à potentiel chimique nul :

$$T_c = \left(\frac{45B}{17\pi^2}\right)^{1/4}. \tag{4.54}$$

En prenant pour B la valeur de $200\,\mathrm{MeV/fm^3}$, nous obtenons finalement :

$$T_c \simeq 143\,\mathrm{MeV}, \tag{4.55}$$

résultat qui, vu la simplicité du modèle utilisé, reproduit de manière satisfaisante la valeur de T_c obtenue par les calculs sur réseau[14]. L'hypothèse selon laquelle le système se comporte comme un gaz parfait lors de la transition de phase n'est évidemment que partiellement vérifiée. On peut en effet montrer qu'à une température $T \simeq 1.2\,T_c$, le comportement du rapport ϵ/T^4 caractérisant la phase QGP ne satisfait qu'à 80% à la loi idéale de Stefan-Boltzmann, valable pour un gaz de particules sans interaction [11]. Si nous continuons néanmoins à exploiter le modèle du gaz parfait, la densité d'énergie du plasma quark-gluon est donnée, à potentiel chimique nul, par les relations (4.35) et (4.49) :

$$\begin{aligned} \epsilon_{QGP} &= \epsilon_Q + \epsilon_G + B \\ &= \frac{7\nu_f\,\pi^2}{120} T^4 + \frac{\nu_b\,\pi^2}{30} T^4 + B \\ &= \frac{7}{10}\pi^2 T^4 + \frac{8}{15}\pi^2 T^4 + B, \end{aligned} \tag{4.56}$$

les contributions ϵ_Q, ϵ_G et B représentant respectivement les densités d'énergie des quarks, des gluons et du vide. La densité d'énergie critique ϵ_c correspondant à la température critique

[13] $N_s = 2$ (spin up ou down) et $N_c = 3$ (R, G ou B).

[14] $150\,\mathrm{Mev/fm^3} \leq T_c \leq 200\,\mathrm{Mev/fm^3}$.

(4.55) est alors de l'ordre de $860\,\mathrm{MeV/fm}^3$. Nous avons signalé précédemment que le changement de phase est supposé s'accompagner d'un accroissement rapide de la densité d'entropie. Les expressions (4.36) et (4.50) permettent en effet d'écrire, avec des notations connues :

$$\begin{aligned} s_{hadron} &= \frac{2\pi^2}{15} T^3, \\ s_{QGP} &= s_Q + s_G + \frac{B}{T} = \frac{14\pi^2}{15} T^3 + \frac{32\pi^2}{45} T^3 + \frac{B}{T}, \end{aligned} \tag{4.57}$$

ce qui fournit pour le rapport des entropies en $T = T_c$:

$$\frac{s_{QGP}}{s_{hadron}}\Big|_{T=T_c} \simeq 15. \tag{4.58}$$

L'approche du confinement développée ci-dessus pourrait, en principe, être utilisée pour déterminer la courbe de coexistence entre la phase hadronique et le plasma quark-gluon dans la totalité du plan (μ, T). Malheureusement, le modèle est beaucoup moins convaincant à potentiel chimique non nul. Considérons la situation $T = 0$, $\mu \neq 0$. La densité baryonique ρ_b est alors reliée au potentiel chimique baryonique μ_b et à la masse du nucléon m_N au travers de la relation [17] :

$$\rho_b = \frac{2}{3\pi^2} \left(\mu_b^2 - m_N^2\right)^{3/2}. \tag{4.59}$$

Le potentiel chimique critique μ_c peut être déterminé en écrivant, comme précédemment, l'égalité des pressions des deux phases à la transition. On trouve alors que cette dernière est uniquement possible pour des valeurs de l'énergie de confinement B situées dans un intervalle réduit :

$$\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{m_N}{3}\right)^4 \leq B \leq \left(\frac{3}{4} - \ln 2\right) \frac{m_N^4}{8\pi^2}, \tag{4.60}$$

ce qui semble difficile à interpréter physiquement. Ce modèle de confinement ne semble donc pas pouvoir donner plus d'informations pour la situation $T = 0$, $\mu \neq 0$.

La vérité scientifique,
si elle n'est pas de tous les systèmes,
est du moins assez diverse
pour devoir à chacun d'eux.
Claude Bernard

Chapitre 5

Fonctions de distribution partonique

Dans les deux premiers chapitres, nous nous sommes attachés à décrire des processus présentant des leptons dans l'état initial, comme c'est le cas pour l'annihilation $e^+e^- \to$ hadrons. Nous avons montré que la partie dure de ces processus pouvait être décrite à l'aide de la théorie perturbative, et ce en vertu de la propriété de liberté asymptotique. Nous avons également appris à isoler l'interaction dure en choisissant d'étudier des observables stables dans l'infrarouge. A présent, nous allons envisager la situation dans laquelle l'un des faisceaux incidents est constitué de hadrons. L'interaction forte impliquant les quarks et les gluons, l'analyse de telles collisions implique une description de leurs distributions au sein des hadrons. Malheureusement, ces distributions sont soumises aux contributions physiques à longue portée et ne peuvent dès lors être calculées perturbativement. Nous sommes ainsi contraints à effectuer une séparation entre les interactions physiques à courte portée -processus dur- et les distributions des partons au sein des hadrons. Pour introduire ces dernières, nous considérons le rôle qu'elles occupent dans la description de la diffusion profondément inélastique électron-proton. Après avoir introduit la cinématique de ce processus et établi sa section efficace différentielle inclusive en terme des fonctions de structure W_1 et W_2, nous en fournissons une analyse spatio-temporelle, laquelle nous indique que la section efficace différentielle peut s'écrire sous la forme d'un produit de deux facteurs, l'un étant la fonction de distribution partonique, l'autre la section efficace de diffusion d'un électron par un gluon ou un quark. Cette procédure de factorisation nécessite l'introduction d'une échelle de factorisation μ_F, qui constitue en quelque sorte la séparation entre le régime à longue portée des distributions partoniques et le régime dur de la section efficace lepton-parton. Nous abordons alors l'invariance d'échelle des fonctions de structure, connue sous le nom de scaling de Bjorken, et qui apparaît lorsque le développement perturbatif est limité à l'ordre α. Nous envisageons ensuite la violation de cette propriété à moment de transfert croissant, l'invariance étant brisée par la prise en considération des corrections à l'ordre α_s. L'équation d'évolution des fonctions de distribution partonique, dite de Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi, termine notre analyse. [1, 8, 19, 20]

5.1 Cinématique de la diffusion profondément inélastique $e^- p^+$

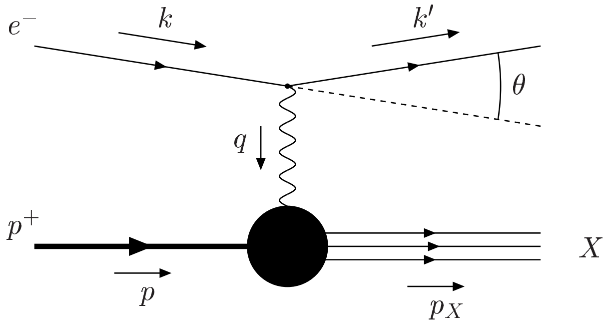


FIG. 5.1 – Diagramme de Feynman pour la diffusion profondément inélastique $e^- p^+$ à l'ordre α.

La diffusion électron-proton est représentée à l'ordre α par le diagramme de Feynman de la figure 5.1, où k, k', p et p_X désignent respectivement les quadri-impulsions de l'électron incident, de l'électron diffusé, du proton et de l'état hadronique final X autorisé par les lois de conservation, $q = k - k'$ désignant quant à lui le moment de transfert du photon virtuel. A partir des quadri-impulsions p et q caractérisant l'interaction proton-photon, nous pouvons construire deux invariants non contraints q^2 et $p \cdot q$. Plaçons-nous dans le référentiel du laboratoire où le proton se trouve au repos. En notant E et E' l'énergie de l'électron[1] avant et après collision et θ son angle de diffusion, le scalaire q^2 s'y écrit :

$$q^2 = -4EE' \sin^2(\theta/2) . \tag{5.1}$$

Cette expression nous indique que q^2 est négatif, et l'on définit alors habituellement la variable positive :

$$Q^2 = -q^2 \geq 0. \tag{5.2}$$

Par convention, on choisit pour second invariant le rapport ν entre le scalaire $p \cdot q$ et la masse M du proton :

$$\nu = \frac{p \cdot q}{M}. \tag{5.3}$$

Dans le système du laboratoire, cette variable s'identifie au transfert d'énergie :

$$\nu = E - E'. \tag{5.4}$$

Suite à la conservation du nombre baryonique, le carré de la masse invariante des hadrons dans l'état final, W^2, est au-moins égal au carré de la masse du proton :

$$W^2 = (p+q)^2 \geq M^2, \tag{5.5}$$

ce qui se traduit par la condition :

$$Q^2 \leq 2M\nu. \tag{5.6}$$

L'égalité correspond à une diffusion élastique $e^- p^+ \to e^- p^+$, l'inégalité regroupant pour sa part les diffusions inélastiques $e^- p^+ \to e^- X$. A partir des deux scalaires Q^2 et ν, il est utile de construire une variable sans dimension, introduite initialement par Bjorken et définie par :

$$x = \frac{Q^2}{2M\nu}. \tag{5.7}$$

[1]Nous travaillons à haute énergie et négligeons donc la masse de l'électron.

Les relations (5.2) et (5.6) imposent les limites cinématiques suivantes pour la variable x de Bjorken :

$$0 \leq x \leq 1. \tag{5.8}$$

En utilisant la quadri-impulsion k de l'électron incident, nous pouvons former une seconde variable sans dimension :

$$y = \frac{p \cdot q}{p \cdot k}, \tag{5.9}$$

qui s'identifie, dans le référentiel du laboratoire, au rapport entre le transfert d'énergie et sa valeur maximale :

$$y = \frac{E - E'}{E} = 1 - \frac{E'}{E}. \tag{5.10}$$

Les limites cinématiques de y sont dès lors :

$$0 \leq y \leq 1. \tag{5.11}$$

Lors de l'étude d'une diffusion inélastique, il est intéressant de se placer dans les conditions du régime limite de Bjorken, défini par :

$$\begin{array}{ccc} Q^2 & \to & \infty, \\ \nu & \to & \infty, \\ x & \text{fixé} & . \end{array} \tag{5.12}$$

Ainsi que nous le découvrirons par la suite, la caractéristique essentielle que présente ce régime réside dans la propriété de scaling des fonctions de stucture. En pratique, les conditions asymptotiques (5.12) sont réalisées expérimentalement pour des valeurs de Q^2 et x telles que :

$$\begin{array}{ccc} Q^2 & > & 4\,\mathrm{GeV}^2, \\ 10^{-4} & < & x \ < \ 0.5. \end{array} \tag{5.13}$$

Le carré de la masse invariante des hadrons dans l'état final s'écrit, en terme de la variable x :

$$W^2 = M^2 + \frac{1-x}{x} Q^2. \tag{5.14}$$

Dans les conditions (5.12) du régime asymptotique de Bjorken, $W^2 \gg M^2$ et la diffusion est alors qualifiée de profondément inélastique.

5.2 Section efficace et fonctions de structure de la diffusion profondément inélastique $e^- \, p^+$

Dans ce qui suit, nous allons envisager non pas un processus particulier, mais ce que l'on nomme le processus inclusif, qui consiste à prendre en considération l'ensemble des contributions hadroniques X possibles dans l'état final. La section efficace différentielle inclusive, non polarisée, à haute énergie, s'écrit alors comme le produit d'un tenseur leptonique par un tenseur hadronique [3] :

$$d\sigma = \frac{1}{4\, p \cdot k} \left(\frac{4\pi\alpha}{q^2} \right)^2 4\pi M L_{\mu\nu} W^{\mu\nu} \frac{d\vec{k'}}{2k'^0 (2\pi)^3}. \tag{5.15}$$

Le tenseur leptonique $L_{\mu\nu}$ est similaire à l'expression (2.7) et prend en compte dans sa définition le facteur $1/2$ provenant de la moyenne sur les spins électroniques de l'état initial :

$$L_{\mu\nu} = 2 \left(k_\mu k'_\nu - g_{\mu\nu} k \cdot k' + k_\nu k'_\mu \right). \tag{5.16}$$

La contribution hadronique inclusive $W_{\mu\nu}$ nous est quant à elle inconnue et ne peut dès lors s'exprimer que de manière formelle :

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi M} \sum_X \left(\frac{1}{2} \sum_s \sum_{s_{i\in X}} \right) \underbrace{\left(\prod_{i\in X} \int \frac{d\vec{p}_i}{2p_i^0 (2\pi)^3} \right)}_{I} \underbrace{\langle\, p,\, s \,|\, J_\mu^+(0) \,|\, X \,\rangle}_{II}$$
$$\langle\, X \,|\, J_\nu(0) \,|\, p,\, s \,\rangle \, (2\pi)^4 \delta^4 \left(p + q - p_X \right). \tag{5.17}$$

Cette expression fait apparaître une somme sur l'ensemble des états hadroniques possibles dans l'état final, traduisant ainsi le caractère inclusif de la section efficace (5.15). Elle contient également une moyenne sur les spins s des protons incidents et une somme sur les spins s_i des particules hadroniques finales, la section efficace étant non polarisée. Quant aux facteurs I et II, ils représentent respectivement l'espace de phase de l'état hadronique final, $p_i = (p_i^0, \vec{p}_i)$ désignant la quadri-impulsion de la i^e particule constituant cet état, et le courant hadronique de transition J_μ entre l'état initial $|\, p,\, s\,\rangle$ et l'état final $|\, X\,\rangle$. Le recours aux symétries de la théorie permet alors de paramétriser l'expression (5.17). Nous savons que $W_{\mu\nu}$ est un tenseur de Lorentz hermitien[2] dont la forme la plus générale est fonction de la métrique $g_{\mu\nu}$, des quadri-impulsions indépendantes p et q et des invariants Q^2 et ν construits à partir de ces dernières. En outre, $W_{\mu\nu}$ impliquant dans sa définition une moyenne sur les spins des protons incidents et une somme sur les spins des particules hadroniques finales, le vecteur γ^μ est absent de la paramétrisation. $W_{\mu\nu}$ peut dès lors s'écrire :

$$W_{\mu\nu} = -W_1 g_{\mu\nu} + \frac{W_2}{M^2} p_\mu p_\nu + \frac{W_3}{M^2} q_\mu q_\nu + \frac{W_4}{M^2} \left(p_\mu q_\nu + q_\mu p_\nu \right) + i W_5 \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p^\rho q^\sigma, \tag{5.18}$$

les scalaires W_i, $i = 1, \ldots, 5$, étant fonction des seuls invariants Q^2 et ν et $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ désignant le tenseur totalement antisymétrique de Levi-Civita. Nous avons omis dans l'expression (5.18) la contribution antisymétrique $p_\mu q_\nu - q_\mu p_\nu$. Cette dernière disparaît en effet lors du calcul de la section efficace différentielle, et ce en vertu du caractère symétrique du tenseur leptonique $L_{\mu\nu}$. Les interactions électromagnétiques conservant la parité, la présence d'un terme de parité impair dans $W_{\mu\nu}$ n'est pas permise et le scalaire W_5 est donc nul. De plus, la conservation du courant électromagnétique au vertex hadronique :

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \tag{5.19}$$

nous indique que $W_{\mu\nu}$ satisfait aux conditions suivantes :

$$q^\mu W_{\mu\nu} = q^\nu W_{\mu\nu} = 0. \tag{5.20}$$

En appliquant celles-ci à la relation (5.18), nous obtenons :

$$W_4 = -\frac{p\cdot q}{q^2} W_2, \tag{5.21}$$

$$W_3 = \frac{M^2}{q^2} W_1 - \frac{p\cdot q}{q^2} W_4, \tag{5.22}$$

et le tenseur hadronique $W_{\mu\nu}$ s'écrit finalement :

$$W_{\mu\nu} = -W_1\left(\nu, Q^2\right)\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + \frac{W_2\left(\nu, Q^2\right)}{M^2} \left(p_\mu - \frac{p\cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{p\cdot q}{q^2} q_\nu \right). \tag{5.23}$$

[2]Le courant hadronique J_μ étant hermitien.

Les scalaires W_1 et W_2 portent le nom de fonctions de stucture. Ces dernières contiennent toute la dynamique de la partie hadronique du processus de diffusion et doivent être déterminées expérimentalement. Nous pouvons à présent effectuer le produit tensoriel $L_{\mu\nu}W^{\mu\nu}$, et l'on trouve :

$$L_{\mu\nu}W^{\mu\nu} = 4W_1\left(\nu, Q^2\right)\; k\cdot k' + \frac{2W_2\left(\nu, Q^2\right)}{M^2}\left(2\, p\cdot k \;\; p\cdot k' - M^2\, k\cdot k'\right). \tag{5.24}$$

Plaçons-nous à nouveau dans le système du laboratoire, où θ désigne l'angle de diffusion de l'électron. Les produits scalaires présents dans la section efficace (5.15) s'y écrivent :

$$\begin{aligned} p\cdot k &= M\,E, \\ p\cdot k' &= M\,E', \\ k\cdot k' &= E\,E'\,(1-\cos\theta)\,. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Pour l'élément de l'espace de phase électronique, nous obtenons :

$$\frac{d\vec{k'}}{2k'^0(2\pi)^3} = \frac{E'\,dE'\,d\cos\theta}{8\pi^2}, \tag{5.26}$$

et la section efficace différentielle inclusive de la diffusion profondément inélastique $e^-\,p^+ \to e^-\,X$ s'écrit alors, dans le référentiel du laboratoire :

$$\frac{d^2\sigma}{dE'\,d\cos\theta} = \frac{8\pi\alpha^2 E'^2}{Q^4}\left[2\,W_1\left(\nu,Q^2\right)\sin^2(\theta/2) + W_2\left(\nu,Q^2\right)\cos^2(\theta/2)\right] \tag{5.27}$$

$$= \frac{\pi\alpha^2}{2\,E^2\,\sin^4(\theta/2)}\left[2\,W_1\left(\nu,Q^2\right)\sin^2(\theta/2) + W_2\left(\nu,Q^2\right)\cos^2(\theta/2)\right]. \tag{5.28}$$

Nous pouvons effectuer le changement de variables $(E', \cos\theta) \to (Q^2, \nu)$ dans l'expression (5.27) de la section efficace différentielle. En remarquant que l'on a :

$$dQ^2 d\nu = 2\,E\,E' dE' d\cos\theta, \tag{5.29}$$

cette dernière se réécrit sous la forme :

$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2\,d\nu} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}\frac{E'}{E}\left[2\,W_1\left(\nu,Q^2\right)\sin^2(\theta/2) + W_2\left(\nu,Q^2\right)\cos^2(\theta/2)\right]. \tag{5.30}$$

Nous pouvons encore effectuer le changement de variables $(Q^2, \nu) \to (x, y)$, pour lequel nous avons :

$$dQ^2 d\nu = 2\,M\,E^2\,y\,dxdy, \tag{5.31}$$

et la section efficace (5.30) devient à présent :

$$\frac{d^2\sigma}{dx\,dy} = \frac{4\pi\alpha^2 s}{Q^4} yE'\left[2\,W_1\left(\nu,Q^2\right)\sin^2(\theta/2) + W_2\left(\nu,Q^2\right)\cos^2(\theta/2)\right], \tag{5.32}$$

où la variable s de Mandelstam est définie par :

$$s = (p+k)^2 = 2\,p\cdot k = 2\,M\,E. \tag{5.33}$$

Afin de pouvoir comparer cette relation à un résultat ultérieur, il importe de la reformuler différemment, et en notant les égalités :

$$\begin{aligned} yE'\sin^2(\theta/2) &= \frac{y\,Q^2}{4\,E} \\ &= \frac{Mxy^2}{2}, \end{aligned} \tag{5.34}$$

$$\begin{aligned} yE'\cos^2(\theta/2) &= yE' - \frac{Mxy^2}{2} \\ &= \nu\,(1-y) - \frac{Mxy^2}{2}, \end{aligned} \tag{5.35}$$

la section efficace inclusive de la diffusion $e^- p^+ \to e^- X$ peut encore s'écrire :

$$\frac{d^2\sigma}{dx\,dy} = \frac{2\pi\alpha^2 s}{Q^4}\left\{ Mxy^2\Big[2\,W_1\left(\nu,Q^2\right) - W_2\left(\nu,Q^2\right)\Big] + 2\,(1-y)\,\nu W_2\left(\nu,Q^2\right)\right\}. \tag{5.36}$$

Il est également utile d'introduire les fonctions de structure $F_1\left(\nu,Q^2\right)$ et $F_2\left(\nu,Q^2\right)$, définies par :

$$\begin{aligned} F_1\left(\nu,Q^2\right) &= M\,W_1\left(\nu,Q^2\right), \\ F_2\left(\nu,Q^2\right) &= \nu\,W_2\left(\nu,Q^2\right), \end{aligned} \tag{5.37}$$

et d'exprimer la relation (5.36) en terme de ces nouvelles grandeurs :

$$\frac{d^2\sigma}{dx\,dy} = \frac{2\pi\alpha^2 s}{Q^4}\left\{ xy^2\Big[2\,F_1\left(\nu,Q^2\right) - \frac{M}{\nu}F_2\left(\nu,Q^2\right)\Big] + 2\,(1-y)\;F_2\left(\nu,Q^2\right)\right\}. \tag{5.38}$$

Dans la limite du régime asymptotique de Bjorken, nous obtenons finalement :

$$\frac{d^2\sigma}{dx\,dy} = \frac{2\pi\alpha^2 s}{Q^4}\Big[2\,F_1\left(\nu,Q^2\right)xy^2 + 2\,(1-y)\;F_2\left(\nu,Q^2\right)\Big]. \tag{5.39}$$

5.3 Stucture spatio-temporelle de la diffusion profondément inélastique.

Ayant établi la section efficace inclusive de la diffusion profondément inélastique électron-proton, nous allons maintenant nous intéresser au développement spatio-temporel du processus de collision. Pour ce faire, nous nous plaçons dans un système de référence $\mathcal{R}$ particulier, dans lequel le moment de transfert du photon virtuel est donné par :

$$q = (q^+, q^-, \vec{q}_T) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-Q, Q, \vec{0}\right), \tag{5.40}$$

et où la composante transversale de la quadri-impulsion du proton s'annule :

$$\vec{p}_T = \vec{0}. \tag{5.41}$$

Les composantes $p^\pm$ du proton peuvent alors être déterminées en développant la masse invariante des hadrons dans l'état final en terme des variables du cône de lumière. En utilisant la relation (2.62) et en tenant compte de ce que $\vec{q}_T = \vec{p}_T = \vec{0}$, il vient :

$$\begin{aligned} W^2 &= (p+q)^2 \\ &= 2\left(p^+ + q^+\right)\left(p^- + q^-\right) \\ &= 2\left(p^+ - \frac{Q}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{M^2}{2\,p^+} + \frac{Q}{\sqrt{2}}\right), \end{aligned} \tag{5.42}$$

où la dernière ligne s'obtient en exprimant p^- en fonction de p^+ et en recourant à la condition (5.40). La comparaison des égalités (5.14) et (5.42) fournit alors l'équation :

$$2\,p^{+2} - \frac{\sqrt{2}\,Q}{x}\,p^+ - M^2 = 0, \tag{5.43}$$

qui admet pour solution, en négligeant la masse du proton et en rejetant $p^+ = 0$:

$$p^+ = \frac{Q}{\sqrt{2}\,x}. \tag{5.44}$$

La quadri-impulsion du proton s'écrit dès lors dans le référentiel choisi :

$$p = (p^+, p^-, \vec{p}_T) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{Q}{x}, \frac{M^2\, x}{Q}, \vec{0} \right). \tag{5.45}$$

Dans le cadre du régime asymptotique de Bjorken, correspondant à une diffusion profondément inélastique, les composantes $p^{\pm}$ satisfont alors aux relations :

$$\begin{aligned} p^+ &\gg, \\ p^- &\ll . \end{aligned} \tag{5.46}$$

Ces dernières sont équivalentes à $p^0 \simeq p^3 \gg$, et le référentiel $\mathcal{R}$ est dès lors connu sous le nom de référentiel à quadri-impulsion infinie. La figure 5.2 représente la quadri-impulsion p du proton ainsi que le moment de transfert q du photon virtuel, dans le référentiel $\mathcal{R}$ et dans la limite de Bjorken.

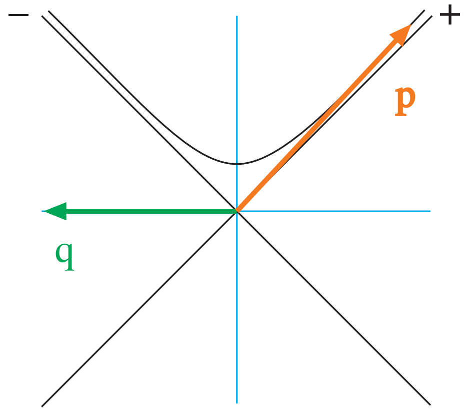


FIG. 5.2 – Quadri-impulsions du proton et du photon virtuel dans le référentiel $\mathcal{R}$ approprié à l'analyse spatio-temporelle de la diffusion profondément inélastique.

Considérons à présent les interactions entre quarks et gluons au sein du proton incident, en utilisant ainsi que précédemment la variable x^+ comme paramètre d'évolution temporelle. Lorsque le proton se trouve au repos, ces interactions se produisent à une échelle de temps $\Delta x^+_{q-g} \sim 1/m$, où $m \sim M/3 \sim 300$ MeV. La transformation de Lorentz entre le référentiel où le proton est au repos et le référentiel $\mathcal{R}$ que nous considérons ici introduit une dilatation du temps d'interaction donnée par le facteur :

$$\gamma = \frac{E}{m} \simeq \frac{p^+}{\sqrt{2}\, m} = \frac{Q}{2\, m\, x}, \tag{5.47}$$

si bien que l'échelle de temps des interactions quark-gluon au sein d'un proton participant à une diffusion profondément inélastique a finalement pour expression :

$$\Delta x^+_{q-g} = \frac{\gamma}{m} = \frac{Q}{2\, m^2\, x}, \tag{5.48}$$

ainsi qu'illustré sur la figure 5.3.

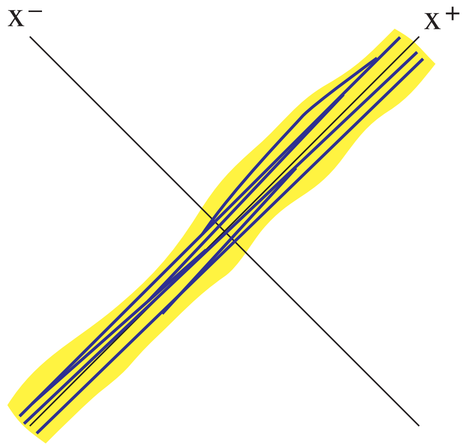


FIG. 5.3 – Interactions quark-gluon au sein d'un proton participant à une diffusion profondément inélastique. Les lignes représentent les lignes d'univers des quarks et des gluons qui le constituent. Les points d'interaction sont distants les uns des autres selon x^+ et fortement regroupés selon x^-.

Nous allons nous limiter ici aux situations où la variable x de Bjorken est proche de l'unité, et n'aborderons donc pas la diffusion à petit x pour laquelle la structure spatio-temporelle est sensiblement modifiée. Nous devons également faire remarquer que les interactions quark-gluon au sein d'un hadron au repos peuvent avoir lieu pendant une échelle de temps $\Delta x^+_{q-g} \ll 1/m$. L'analyse présentée constitue par conséquent une approche simplifiée du processus de diffusion. Dans ce cadre de travail, l'échelle de temps des interactions quark-gluon au sein du proton en mouvement vaut dès lors :

$$\Delta x^+_{q-g} \simeq \frac{Q}{2\,m^2}. \tag{5.49}$$

Envisageons maintenant la collision entre le proton et le photon virtuel. Le carré du moment de transfert transporté par ce dernier étant $-Q^2$, l'interaction se produit sur une échelle de temps de l'ordre de $1/Q$:

$$\Delta x^+_{p-\gamma} \simeq \frac{1}{Q}. \tag{5.50}$$

La comparaison des expressions (5.49) et (5.50) nous indique que pendant le très court intervalle de temps que dure l'interaction photon-proton, les quarks et les gluons constituant ce dernier peuvent être considérés comme libres, l'échelle de temps associée à leur interaction mutuelle étant beaucoup plus élevée. Une analogie peut être établie avec l'étude diffractive d'un cristal par rayon X, la diffusion étant décrite en considérant les atomes du réseau au repos pendant le parcours du rayon X dans la matière. A l'instant x^+ de la diffusion, nous pouvons dès lors nous représenter le proton comme un ensemble de i partons (quarks et gluons) indépendants, chacun d'eux transportant une quadri-impulsion $p_i = \left(p_i^+, p_i^-, \vec{p}_{i,T}\right)$. C'est le modèle des partons libres. Les composantes p_i^+ sont élevées ($p^+ \gg$) et il est utile d'introduire la fraction d'impulsion ξ_i transportée par le parton i :

$$\xi_i = \frac{p_i^+}{p^+},$$
$$0 < \xi_i < 1. \tag{5.51}$$

Le carré des composantes partoniques transversales $|\vec{p}_{i,T}|^2$ est quant à lui faible devant Q^2 et les composantes $\vec{p}_{i,T}$ peuvent donc être négligées dans une description spatio-temporelle approchée de l'interaction proton-photon. Il en est de même pour les composantes $p_i^- = |\vec{p}_{i,T}|^2/2p_i^+$ et l'analyse du processus de diffusion se résume dès lors au schéma de la figure 5.4.

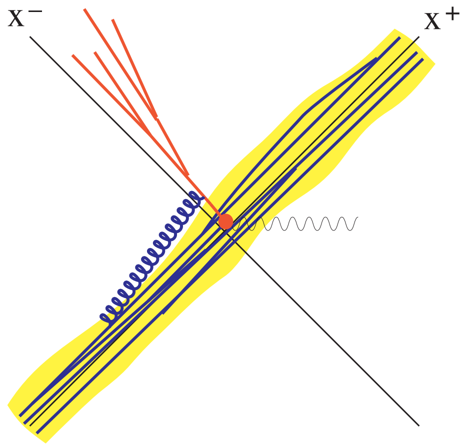


FIG. 5.4 – Lors de la collision entre le proton et le photon virtuel, l'un des partons i interagit avec ce dernier en étant annihilé puis recréé. Par conservation de l'énergie-impulsion, le parton diffusé possède une composante x^- élevée et une faible composante x^+. Ce parton se développe par la suite en un jet de particules.

5.4 Le modèle des partons libres

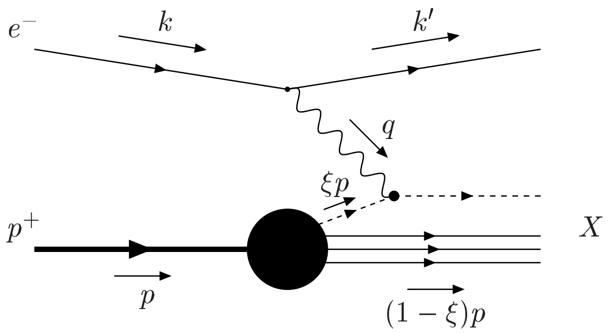


FIG. 5.5 – Diagramme de Feynman pour la diffusion profondément inélastique $e^- p^+$ dans le cadre du modèle des partons libres.

Dans le cadre du modèle des partons libres, le diagramme de Feynman de la figure 5.1 décrivant la diffusion profondément inélastique $e^- p^+$ est remplacé par celui de la figure 5.5, dans lequel seul l'un des partons -quark ou gluon- transportant une fraction ξ de la quadri-impulsion du proton incident interagit avec l'électron, l'hypothèse principale consistant donc à négliger l'impulsion transversale que pourrait acquérir le parton diffusé. Le vertex γ-parton représente une somme de sous-diagrammes dont l'échelle de temps caractéristique est de l'ordre de $1/Q$, l'ensemble de ces interactions étant supposées instantanées vis-à-vis des interactions internes au proton. L'analyse spatio-temporelle réalisée nous suggère alors une relation intuitive entre la section efficace observée -section efficace (5.27)- et la section efficace de diffusion partonique, qui satisfait la factorisation annoncée précédemment[3] :

$$\frac{d^2\sigma}{dE'\, d\cos\theta} = \int_0^1 d\xi \sum_a f_{a/p}\left(\xi, \mu_F\right) \frac{d^2\hat{\sigma}_a}{dE'\, d\cos\theta}\left(\xi, \mu_F\right) + \mathcal{O}\left(m/Q\right). \tag{5.52}$$

[3]Ce résultat peut être obtenu de manière rigoureuse.

La fonction f présente dans l'expression (5.52) est une fonction de distribution partonique, c'est-à-dire la fonction de distribution des quarks et des gluons au sein du proton. Cette distribution est soumise aux contributions physiques à longue portée ($\Delta x^+_{q-g} \simeq Q/2m^2 \gg$) et ne peut dès lors être obtenue à l'aide de la théorie perturbative. Sa détermination peut uniquement s'effectuer par le recours à l'expérience. Le facteur $f_{a/p}\,(\xi, \mu_F)\; d\xi$ fournit la probabilité de trouver au sein du proton un parton de saveur a transportant une fraction d'impulsion située dans l'intervalle $[\,\xi,\, \xi + d\xi\,]$. Le facteur $\hat{\sigma}_a\,(\xi, \mu_F)$ représente pour sa part la section efficace de diffusion de l'électron par un parton de saveur a transportant une fraction ξ de la quadri-impulsion du proton. Cette section efficace est uniquement contrôlée par la physique à courte portée ($\Delta x^+_{p-\gamma} \simeq 1/Q \ll$) et peut donc être déterminée dans le cadre de la théorie perturbative. Cette séparation entre le régime soft de la distribution partonique et le régime dur de la section efficace photon-parton nécessite l'introduction d'une échelle de factorisation μ_F dont la dépendence se retrouve dans chacun des facteurs introduits. Un phénomène dont l'échelle de temps caractéristique est inférieure à $1/\mu_F$ voit sa contribution à la section efficace réabsorbée dans la section efficace partonique, quand un événement caractérisé par une échelle de temps supérieure à $1/\mu_F$ voit la sienne réabsorbée dans les distributions partoniques. Comme précédemment pour l'échelle de renormalisation μ, le paramètre μ_F ne constitue pas une grandeur intrinsèque à la théorie, mais plutôt un artifice qui nous permet d'organiser le calcul perturbatif. La section efficace observée est dès lors indépendante de μ_F, ce qui se traduit par une équation du type :

$$\frac{d\sigma}{d\mu_F} = 0, \tag{5.53}$$

d'autant mieux satisfaite que l'on poursuit le développement perturbatif à un ordre élevé. En diffusion profondément inélastique, le choix d'échelle généralement réalisé consiste en :

$$\mu = \mu_F = Q. \tag{5.54}$$

5.5 Diffusion à l'ordre α : le scaling de Bjorken

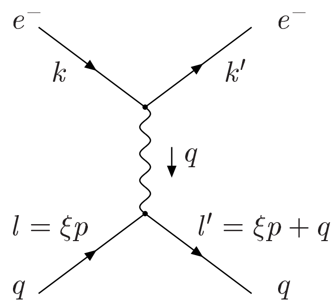


FIG. 5.6 – Diagramme de Feynman pour le processus partonique à l'ordre α.

A l'ordre α du modèle des partons libres, la section efficace différentielle inclusive de la diffusion profondément inélastique $e^-\,p^+$ est donnée par l'expression (5.52) où $\hat{\sigma}_a$ désigne la section efficace de la diffusion partonique :

$$e^-(k)\,q\,(l = \xi p) \to e^-(k')\,q\,(l' = \xi p + q), \tag{5.55}$$

illustrée par le diagramme de Feynman de la figure 5.6. Dans le modèle envisagé, le parton diffusé par l'électron est supposé libre avant et aprés la collision. Il se situe dès lors sur sa couche de masse avant et après interaction, ce qui nous permet d'écrire, en désignant par m la masse de ce parton :

$$\begin{aligned} \xi^2 p^2 &= m^2, \\ (\xi p + q)^2 &= m^2. \end{aligned} \tag{5.56}$$

L'égalité de ces deux relations nous fournit immédiatemment :

$$2\,\xi p \cdot q = Q^2. \tag{5.57}$$

Effectuons le produit scalaire $p \cdot q$ dans le référentiel $\mathcal{R}$, où les quadri-impulsions du photon et du proton s'écrivent respectivement[4] :

$$\begin{aligned} q &= (q^+, q^-, \vec{q}_T) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-Q, Q, \vec{0}\right), \\ p &= (p^+, p^-, \vec{p}_T) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{Q}{x}, 0, \vec{0}\right). \end{aligned} \tag{5.58}$$

En utilisant la relation $p \cdot q = p^- q^+ + p^+ q^- - \vec{p}_T \cdot \vec{q}_T$, nous obtenons alors :

$$\xi = x. \tag{5.59}$$

La contribution à $\hat{\sigma}_a$ à l'ordre dominant contient donc une fonction $\delta\,(\xi - x)$. Par conséquent, si l'on se limite à cet ordre, une expérience de diffusion profondément inélastique réalisée à une valeur donnée de la variable x de Bjorken permet de déterminer les fonctions de distribution partonique correspondant à une fraction d'impulsion ξ égale à x. Introduisons à présent les variables de Mandelstam $\hat{s}$, $\hat{t}$, $\hat{u}$ associée au processus partonique (5.55) :

$$\begin{aligned} \hat{s} &= (k + l)^2 = (k + \xi p)^2 = 2\,\xi\, p \cdot k = \xi s, \\ \hat{t} &= \left(k - k'\right)^2 = -Q^2, \\ \hat{u} &= \left(k - l'\right)^2. \end{aligned} \tag{5.60}$$

Dans la limite des hautes énergies, la somme de ces dernières satisfait à la propriété :

$$\hat{s} + \hat{t} + \hat{u} = 0. \tag{5.61}$$

Nous allons à présent recourir à la symétrie de croisement pour déterminer l'amplitude correspondant au diagramme de la figure 5.6. Cette symétrie nous indique que l'amplitude invariante associée à un processus dans lequel une particule ϕ de quadri-impulsion p se trouve dans l'état initial est identique à l'amplitude invariante associée au processus similaire dans lequel l'antiparticule $\bar{\phi}$ de quadri-impulsion opposée se trouve dans l'état final :

$$\mathcal{M}\left(\phi(p) + \ldots \to \ldots\right) = \mathcal{M}\left(\ldots \to \bar{\phi}(-p) + \ldots\right). \tag{5.62}$$

L'application de cette symétrie au processus (5.55) nous permet d'écrire[5] :

$$\overline{|\mathcal{M}|^2}\left(e^-(k)\, q\,(l) \to e^-(k')\, q\,(l')\right) = \overline{|\mathcal{M}|^2}\left(e^-(k)\, e^+(-k') \to q\,(l')\, \bar{q}\,(-l)\right). \tag{5.63}$$

Le second membre de cette égalité correspond à la relation (2.11) exprimée en terme des variables partoniques :

$$\overline{|\mathcal{M}|^2}\left(e^-\, e^+ \to q\,\bar{q}\right) = 2 Q_a^2\, e^4\, \frac{\hat{t}^{\,2} + \hat{u}^2}{\hat{s}^2}, \tag{5.64}$$

[4]Nous négligeons la composante p^- dans la limite où Q^2 tend vers l'infini.

[5]$\overline{|\mathcal{M}|^2}$ désigne le carré de l'amplitude invariante, moyenné sur les spins de l'état initial et sommé sur les spins de l'état final.

Q_a désignant la charge du quark de saveur a en unité de la charge électronique. Le carré de l'amplitude invariante associé à la diffusion (5.55) est dès lors identique à l'expression (5.64) à la substitution $\hat{s} \leftrightarrow \hat{t}$ près, et nous obtenons :

$$\overline{|\mathcal{M}|^2}\left(e^-\,q \to e^-\,q\right) = 2Q_a^2\,e^4\,\frac{\hat{s}^2+\hat{u}^2}{\hat{t}^{\,2}}. \tag{5.65}$$

Dans le référentiel du centre de masse du processus partonique, la section efficace recherchée est donnée par :

$$d\hat{\sigma}_a = \frac{1}{F}d\Pi_2\overline{|\mathcal{M}|^2}\left(e^-\,q \to e^-\,q\right), \tag{5.66}$$

le facteur de flux F et l'élément de l'espace de phase à deux corps $d\Pi_2$ ayant pour expression :

$$F = 2\hat{s} \tag{5.67}$$

$$d\Pi_2 = \frac{1}{16\pi}d\cos\theta, \tag{5.68}$$

où θ représente l'angle entre la direction du faisceau $e^-\,q$ initial et celle du quark diffusé. En exprimant la variable $\hat{t}$ en fonction de l'angle de diffusion :

$$\hat{t} = -\frac{\hat{s}}{2}(1-\cos\theta), \tag{5.69}$$

la section efficace du processus partonique peut finalement s'écrire de manière invariante :

$$\frac{d\hat{\sigma}_a}{d\hat{t}} = \frac{2\pi\alpha^2 Q_a^2}{\hat{s}^2}\,\frac{\hat{s}^2+\hat{u}^2}{\hat{t}^{\,2}}. \tag{5.70}$$

En recourant aux expressions (5.59), (5.60) et (5.61), nous obtenons à présent :

$$\frac{d^2\hat{\sigma}_a}{dQ^2\,dx} = \frac{2\pi\alpha^2 Q_a^2}{Q^4}\left[1+\left(1-\frac{Q^2}{x\,s}\right)^2\right]\,\delta\left(\xi - x\right). \tag{5.71}$$

Les définitions (5.3), (5.7), (5.9), et (5.33) permettent d'établir une relation entre les variables Q^2, x, y et s :

$$Q^2 = x\,y\,s. \tag{5.72}$$

En effectuant le changement de variable $(x, Q^2) \to (x, y)$, pour lequel nous avons :

$$dQ^2\,dx = x\,s\,dx\,dy, \tag{5.73}$$

nous obtenons alors pour la section efficace (5.71) :

$$\frac{d^2\hat{\sigma}_a}{dx\,dy} = \frac{2\pi\alpha^2 Q_a^2\,x\,s}{Q^4}\left[y^2+2\left(1-y\right)\right]\,\delta\left(\xi - x\right). \tag{5.74}$$

Par analogie avec la relation (5.39), nous sommes naturellement amenés à réécrire l'expression (5.74) sous la forme :

$$\frac{d^2\hat{\sigma}_a}{dx\,dy} = \frac{2\pi\alpha^2 s}{Q^4}\left\{2\,\widehat{F}_1\left(\nu, Q^2\right)xy^2 + 2\left(1-y\right)\,\widehat{F}_2\left(\nu, Q^2\right)\right\}, \tag{5.75}$$

où les fonctions de structure $\widehat{F}_1\left(\nu, Q^2\right)$ et $\widehat{F}_2\left(\nu, Q^2\right)$, équivalent partonique des fonctions $F_1\left(\nu, Q^2\right)$ et $F_2\left(\nu, Q^2\right)$, sont données par :

$$\widehat{F}_1\left(\nu, Q^2\right) = \frac{1}{2}Q_a^2\delta\left(\xi - x\right), \tag{5.76}$$

$$\widehat{F}_2\left(\nu, Q^2\right) = Q_a^2\,x\,\delta\left(\xi - x\right). \tag{5.77}$$

La section efficace différentielle inclusive de la diffusion profondément inélastique $e^- \, p^+$ s'écrit à présent, à l'ordre α du modèle des partons libres :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dx\,dy} &= \int_0^1 d\xi \sum_a f_{a/p}(\xi)\,\frac{d^2\hat{\sigma}_a}{dx\,dy} \\ &= \frac{2\pi\alpha^2 s}{Q^4}\int_0^1 d\xi \sum_a f_{a/p}(\xi)\left[2\,\widehat{F}_1\left(\nu,Q^2\right)xy^2 + 2\,(1-y)\;\widehat{F}_2\left(\nu,Q^2\right)\right]. \qquad (5.78) \end{aligned}$$

La comparaison des sections efficaces (5.39) et (5.78) nous permet d'exprimer les fonctions de structure $F_1\left(\nu,Q^2\right)$ et $F_2\left(\nu,Q^2\right)$ en fonction de leur correspondant partonique :

$$F_{1,2}\left(\nu,Q^2\right) = \int_0^1 d\xi \sum_a f_{a/p}(\xi)\,\widehat{F}_{1,2}\left(\nu,Q^2\right). \qquad (5.79)$$

En substituant à $\widehat{F}_1$ et $\widehat{F}_2$ leurs valeurs données par les expressions (5.76) et (5.77), les fonctions de structure du proton, à l'ordre α de la théorie perturbative, s'écrivent finalement :

$$M\,W_1\left(\nu,Q^2\right) = F_1\left(\nu,Q^2\right) = \frac{1}{2}\sum_a Q_a^2\,f_{a/p}(x) = F_1(x), \qquad (5.80)$$

$$\nu\,W_2\left(\nu,Q^2\right) = F_2\left(\nu,Q^2\right) = \sum_a Q_a^2\,x\,f_{a/p}(x) = F_2(x). \qquad (5.81)$$

Ainsi, dans le cadre du régime asymptotique de Bjorken, les fonctions $F_1\left(\nu,Q^2\right)$ et $F_2\left(\nu,Q^2\right)$ tendent vers des limites finies $F_1(x)$ et $F_2(x)$, fonction du seul rapport x entre les deux grandeurs ν et Q^2. Cette propriété d'invariance d'échelle, illustrée sur la figure 5.7, porte le nom de scaling de Bjorken. Nous remarquons également que les fonctions $F_1(x)$ et $F_2(x)$ satisfont à la relation :

$$F_2(x) = 2\,x\,F_1(x), \qquad (5.82)$$

dite relation de Callan-Gross. Dans le régime du scaling, la section efficace (5.39) se réduit dès lors à l'expression :

$$\frac{d^2\sigma}{dx\,dy} = \frac{4\pi\alpha^2 s}{Q^4}\,x\,F_1(x)\left[(1-y)^2+1\right]. \qquad (5.83)$$

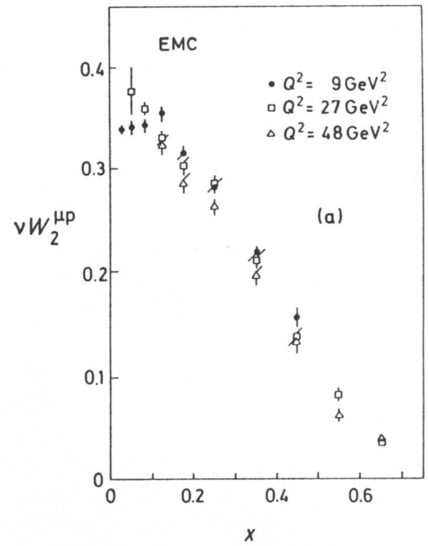


FIG. 5.7 – Fonction de structure $\nu\,W_2^{(\mu\,p)}$ du proton en fonction de la variable x de Bjorken pour différentes valeurs de Q^2, déterminée par diffusion profondément inélastique d'un proton et d'un muon.

5.6 Correction à l'ordre α_s et violation de l'invariance d'échelle

5.6.1 Approche intuitive

Nous avons montré que le modèle des partons libres conduit à une invariance d'échelle des fonctions de structure $M\,W_1$ et $\nu\,W_2$. Dans le cadre de cette approche, nous avons assimilé les quarks et les gluons constituant un hadron à des particules ponctuelles, les partons, que nous avons supposés libres à l'échelle de temps de l'interaction photon-proton. Il est cependant possible d'envisager la description d'un hadron sous un autre angle, et de le décrire non plus comme un état lié de constituants ponctuels, mais plutôt comme une hiérarchie de constituants effectifs de plus en plus petits, chacun d'eux possédant une dimension caractéristique L, ainsi que représenté sur la figure 5.8.

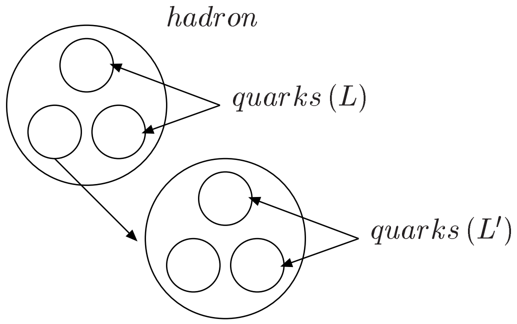


FIG. 5.8 – Hadron constitué d'une hiérarchie de constituants effectifs ($L < L'$).

Une expérience de diffusion profondément inélastique peut alors être interprétée comme un microscope qui nous permet d'observer le hadron avec un pouvoir de résolution proportionnel à $1/Q$. Si nous décrivons le processus de collision en terme de constituants effectifs de dimension $L \sim 1/Q$, nous pouvons continuer à appliquer le modèle des partons libres, à cette différence près que les fonctions de distribution de ces constituants dépendent à présent de leur dimension et donc de Q^2. Pour la fonction de structure $\nu\,W_2$ par exemple, nous aurons maintenant :

$$\nu\,W_2\left(\nu, Q^2\right) = F_2\left(\nu, Q^2\right) = \sum_a Q_a^2\, x\, f_{a/p}(x, Q^2). \tag{5.84}$$

Nous pouvons par conséquent nous attendre, à très grand Q^2, à une violation du scaling de Bjorken, dont le comportement général peut être envisagé au travers du raisonnement suivant. Si nous résolvons un constituant hadronique en constituants plus petits, ces derniers doivent se partager la quadri-impulsion p du constituant dont ils sont issus. Cela implique qu'en moyenne, les constituants de dimension inférieure possèdent une quadri-impulsion de moindre valeur. Leur nombre étant plus important, l'impulsion totale demeure inchangée. La violation de l'invariance d'échelle lorsque Q^2 augmente se traduit dès lors au niveau des fonctions de structure par un accroissement de leur valeur à petit x et une diminution à grand x.

5.6.2 Développement perturbatif à l'ordre α_s

L'apport essentiel de la chromodynamique par rapport au modèle des partons libres réside dans le fait que l'impulsion transversale du parton diffusé n'y est plus limitée arbitrairement à de faibles valeurs. Nous allons établir dans ce qui suit la correction à l'ordre α_s aux fonctions de structure du proton, en débutant par l'émission d'un gluon réel par le quark subissant la diffusion :

$$q(p_i)\,\gamma^*(q) \to q(l)\,g(r). \tag{5.85}$$

Les amplitudes invariantes polarisées $\mathcal{M}_1^\mu$ et $\mathcal{M}_2^\mu$ associées à ce processus sont illustrées par les diagrammes de Feynman de la figure 5.9, où p_i, l, q et r désignent respectivement les quadri-impulsions des quarks initial et final, du photon et du gluon, k et k' représentant quant à eux les quadri-impulsions des quarks intermédiaires.

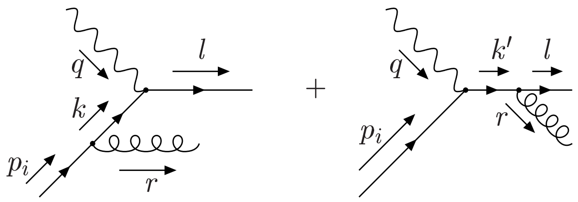
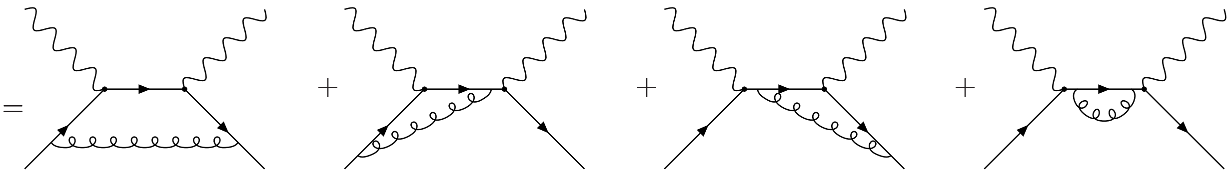


FIG. 5.9 – Amplitude invariante polarisée $\mathcal{M}_1^\mu + \mathcal{M}_2^\mu$ pour le processus $q\,\gamma^* \to q\,g$ à l'ordre α_s.

Le carré de l'amplitude invariante s'écrit dès lors :

$$|\mathcal{M}|^2_{\mu\nu} \;=$$



$$= \; |\mathcal{M}_1|^2_{\mu\nu} + \mathcal{M}_{1\,\mu}\mathcal{M}^*_{2\,\nu} + \mathcal{M}_{2\,\mu}\mathcal{M}^*_{1\,\nu} + |\mathcal{M}_2|^2_{\mu\nu} \tag{5.86}$$

Soit $p = (P, 0, 0, P)$ la quadri-impulsion du proton dans la limite des hautes énergies et dans le référentiel où ce dernier se déplace selon l'axe z. Celle-ci vérifie :

$$p^2 = 0. \tag{5.87}$$

En vue de simplifier notre analyse, il est utile d'introduire un second quadrivecteur n de genre lumière et dont le produit scalaire avec p est normé :

$$\begin{aligned} n^2 &= 0, \\ n \cdot p &= 1. \end{aligned} \tag{5.88}$$

Le quadrivecteur n satisfaisant à ces conditions est donné par :

$$n = \left(\frac{1}{2P}, 0, 0, -\frac{1}{2P}\right). \tag{5.89}$$

Tout quadrivecteur k peut désormais s'écrire comme la somme de sa partie transversale[6] k_T et d'une combinaison linéaire de p et de n :

$$k = k_T + n \cdot k \;\; p + p \cdot k \;\; n. \tag{5.90}$$

Ainsi, le moment de transfert q du photon virtuel s'écrit à présent :

$$q = q_T + n \cdot q \;\; p + M\nu\, n. \tag{5.91}$$

[6] $k_T = \left(0, \vec{k}_T, 0\right)$.

En effectuant le choix $n \cdot q = 0$, ce développement se réduit à l'expression :

$$q = q_T + M\nu\, n, \tag{5.92}$$

la partie transversale du moment de transfert vérifiant l'égalité :

$$|\vec{q}_T|^2 = Q^2. \tag{5.93}$$

La quadri-impulsion p_i du parton diffusé peut s'exprimer de manière identique, et l'on a :

$$p_i = p_{i\,T} + \zeta\, p + \kappa\, n. \tag{5.94}$$

Dans le calcul ultérieur des traces, seule la composante selon p fournit une contribution non nulle, les termes $p_{i\,T}$ et κn n'intervenant pour leur part qu'au niveau de la cinématique et de l'élément de l'espace des phases. Leur prise en compte explicite montrerait que leur apport aux fonctions de structure est sous-dominant en comparaison de celui de ζp, et nous pouvons dès lors nous permettre d'écrire :

$$p_i = \zeta p. \tag{5.95}$$

Dans notre raisonnement, nous commençons par identifier la quadri-impulsion p_i du quark incident à celle du proton, et ce pour des raisons de simplicité mathématique, et prenons en considération la fraction d'impulsion longitudinale ζ une fois le résultat final obtenu. L'intérêt que présentent les quadrivecteurs n et p définis par les conditions (5.87) et (5.88) réside dans le fait qu'ils permettent d'extraire facilement les fonctions $\widehat{F}_1$ et $\widehat{F}_2 - 2\,x\,\widehat{F}_1$ du tenseur hadronique (5.18), équivalent, en raison de l'identification de p_i à p, à son correspondant partonique. Nous obtenons en effet, par application à $W_{\mu\nu}$ des projecteurs $n^\mu n^\nu$ et $p^\mu p^\nu$:

$$\begin{aligned} \nu\, M^2 n^\mu n^\nu W_{\mu\nu} &= \nu W_2 = \widehat{F}_2, & (5.96)\\ \frac{4\,x^2}{\nu} p^\mu p^\nu W_{\mu\nu} &= \nu W_2 - 2\,x\,M W_1 = \widehat{F}_2 - 2\,x\,\widehat{F}_1. & (5.97) \end{aligned}$$

Cela étant, commençons par établir la contribution associée à $|\mathcal{M}_1|^2_{\mu\nu}$. L'élément de l'espace de phase à deux corps correspondant à cette dernière a pour expression [7] :

$$d\Pi_2 = \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^3} \frac{d^4 l}{(2\pi)^3} \delta^+(r^2)\, \delta^+(l^2) (2\pi)^4 \delta^4(p + q - r - l), \tag{5.98}$$

dont l'intégration sur l fournit, en introduisant la quadri-impulsion $k = p - r$:

$$d\Pi_2 = \int \frac{d^4 k}{4\pi^2} \delta^+\left((p-k)^2\right) \delta^+\left((k+q)^2\right). \tag{5.99}$$

La propriété (5.90) nous indique alors que k peut s'écrire sous la forme :

$$k = k_T + \xi\, p + \eta\, n, \tag{5.100}$$

ξ et η étant des réels indéterminés. En élevant cette décomposition au carré et en remarquant que la quadri-impulsion k du quark virtuel est de carré négatif dans la limite des hautes énergies, nous obtenons[8] :

$$k^2 = -|\vec{k}_T|^2 + 2\,\xi\,\eta = -|k^2|. \tag{5.101}$$

[7] $\delta^+(r^2) = \delta(r^2)\,\Theta(r^0)$

[8] Une particule virtuelle de quadri-impulsion k et de masse m vérifie en effet l'inégalité $k^2 < m^2$.

L'expression (5.100) s'écrit dès lors :

$$k = k_T + \xi\, p + \frac{|\vec{k}_T|^2 - |k^2|}{2\xi}\, n. \tag{5.102}$$

Dans le cadre du modèle des partons libres, où l'on suppose que le quark diffusé se situe sur sa couche de masse et possède une impulsion transversale négligeable, nous retrouvons l'approximation :

$$k = \xi\, p. \tag{5.103}$$

Les conditions de positivité de r^0 et l^0 impliquent :

$$\begin{aligned} P\,(1-\xi) - \frac{|\vec{k}_T|^2 - |k^2|}{4\,\xi\, P} &> 0, \\ \xi\, P + \frac{|\vec{k}_T|^2 - |k^2|}{4\,\xi\, P} + \frac{M\,\nu}{2\,P} &> 0. \end{aligned} \tag{5.104}$$

Dans la limite où l'énergie P du proton tend vers l'infini, il vient alors :

$$0 < \xi < 1. \tag{5.105}$$

La relation (5.102) nous permet ensuite de réexprimer les arguments $(p-k)^2$ et $(k+q)^2$ des fonctions δ^+ en terme des grandeurs ξ, $|k^2|$ et $|\vec{k}_T|^2$:

$$\begin{aligned} (p-k)^2 &= \frac{1-\xi}{\xi}|k^2| - \frac{|\vec{k}_T|^2}{\xi}, \\ (k+q)^2 &= 2\,M\,\nu\,\xi - |k^2| - Q^2 - 2\vec{q}_T \cdot \vec{k}_T. \end{aligned} \tag{5.106}$$

Le changement de variables $(k^0, \vec{k}_T, k^3) \to (\xi, \vec{k}_T, |k^2|)$ possédant pour jacobien :

$$\left| Det \begin{pmatrix} P - \frac{|\vec{k}_T|^2 - |k^2|}{4\,P\,\xi^2} & \frac{|\vec{k}_T|}{2\,P\,\xi} & -\frac{1}{4\,P\,\xi} \\ 0 & 1 & 0 \\ P + \frac{|\vec{k}_T|^2 - |k^2|}{4\,P\,\xi^2} & -\frac{|\vec{k}_T|}{2\,P\,\xi} & \frac{1}{4\,P\,\xi} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2\,\xi}, \tag{5.107}$$

l'élément d'intégration d^4k est à présent donné par :

$$d^4k = \frac{d\xi}{2\,\xi}\, d\vec{k}_T\, d|k^2|. \tag{5.108}$$

En désignant par θ l'angle polaire dans le plan transverse au faisceau de protons, nous pouvons encore écrire :

$$\begin{aligned} d^4k &= \frac{d\xi}{2\,\xi}\, d\theta\, |\vec{k}_T|\, d|\vec{k}_T| d|k^2| \\ &= \frac{d\xi}{4\,\xi}\, d\theta\, d|\vec{k}_T|^2\, d|k^2|. \end{aligned} \tag{5.109}$$

Il est désormais possible, en recourant aux égalités (5.106) et (5.109), de reformuler l'élément de l'espace de phase à deux corps en fonction des composantes ξ, θ, $|\vec{k}_T|^2$ et $|k^2|$. Les conditions de positivité de r^0 et l^0 étant prises en compte par la relation (5.105), les fonctions δ se substituent aux fonctions δ^+. En notant la propriété $\delta(a\,x) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$, nous obtenons ainsi :

$$d\Pi_2 = \int \frac{d\xi\, d\theta\, d|\vec{k}_T|^2 d|k^2|}{16\,\pi^2 M\,\nu}\, \delta\left((1-\xi)\,|k^2| - |\vec{k}_T|^2\right)\, \delta\left(\xi - x - \frac{|k^2| + 2\,\vec{k}_T \cdot \vec{q}_T}{2\,M\,\nu}\right), \tag{5.110}$$

la variable θ étant comprise entre 0 et π.

L'amplitude invariante polarisée correspondant au premier diagramme de Feynman de la figure 5.9 a pour expression, en négligeant la masse du quark :

$$\mathcal{M}_{1\,\mu} = -i\, Q_a\, g\, \overline{u}^{\,s_2}(l)\, \gamma_\mu\, \frac{1}{\not k}\, \not\varepsilon(r)\, t^A_{ab}\, u^{s_1}(p), \tag{5.111}$$

où (s_1, a) et (s_2, b) désignent respectivement les spins et les couleurs des quarks initial et final, Q_a leur charge en unité de la charge électronique, ε la polarisation du gluon émis et A sa couleur. Pour l'amplitude conjuguée, nous obtenons :

$$\mathcal{M}^*_{1\,\nu} = i\, Q_a\, g\, \overline{u}^{\,s_1}(p)\, t^A_{bc}\, \not\varepsilon^*(r)\, \frac{1}{\not k}\, \gamma_\nu\, u^{s_2}(l). \tag{5.112}$$

Le carré de l'amplitude invariante, moyenné sur les spins du quark incident ainsi que sur les couleurs, sommé sur les spins du quark diffusé et sur les polarisations du gluon, s'écrit dès lors :

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}_1|^2_{\mu\nu}} &= \frac{1}{2}\sum_{s_1}\sum_{s_2}\sum_{\text{pol.}}\frac{1}{3}\sum_{\text{couleur}} \mathcal{M}_{1\,\mu}\mathcal{M}^*_{1\,\nu} \\
&= \frac{Q_a^2\, g^2}{2\, k^4}\sum_{\text{pol.}} \varepsilon_\alpha(r)\varepsilon^*_\beta(r)\, \frac{1}{3}\sum_{A,a,c} t^A_{ab} t^A_{bc}\; tr(\gamma_\nu \not l \gamma_\mu \not k \gamma^\alpha \not p \gamma^\beta \not k).
\end{aligned} \tag{5.113}$$

Le facteur associé à la moyenne sur les couleurs a pour valeur :

$$\frac{1}{3}\sum_{A,a,c} t^A_{ab} t^A_{bc} = \frac{4}{9}\sum_{a,c}\delta_{ac} = \frac{4}{3}. \tag{5.114}$$

Pour exprimer la somme sur les polarisations du gluon, nous nous plaçons dans une jauge axiale, définie par la condition :

$$A \cdot n = 0, \tag{5.115}$$

où A désigne le champ de couleur et n le quadrivecteur satisfaisant aux conditions (5.88). Ce dernier étant de carré nul, cette jauge porte le nom de jauge du cône de lumière. Outre la condition de Lorentz $\varepsilon^i(r) \cdot r = 0$, le quadrivecteur de polarisation du gluon y vérifie la condition de jauge $\varepsilon^i(r) \cdot n = 0$. Seuls deux états de polarisation transverse peuvent dès lors se propager, et la jauge envisagée est à ce titre qualifiée de physique. La somme considérée s'écrit alors :

$$\sum_i \varepsilon^i_\alpha(r)\varepsilon^{i\,*}_\beta(r) = -g_{\alpha\beta} + \frac{n_\alpha\, r_\beta + n_\beta\, r_\alpha}{n \cdot r}. \tag{5.116}$$

En recourant au projecteur (5.96) et en notant la relation suivante entre le tenseur hadronique $W_{\mu\nu}$ et le carré de l'amplitude invariante $\overline{|\mathcal{M}|^2_{\mu\nu}}$ [20] :

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{4\,\pi\, M}\overline{|\mathcal{M}|^2_{\mu\nu}} d\Pi_2, \tag{5.117}$$

nous obtenons la contribution de $\overline{|\mathcal{M}_1|^2_{\mu\nu}}$ à la fonction de structure $\widehat{F}_2$[9] :

$$\begin{aligned}
\widehat{F}_2 &= \frac{M\,\nu}{4\,\pi}\, n^\mu\, n^\nu\, \overline{|\mathcal{M}_1|^2_{\mu\nu}}\, d\Pi_2 \\
&= \frac{Q_a^2\, g^2}{6\,\pi\, k^4}\, M\,\nu\, d\Pi_2 \left(\frac{I + II}{n \cdot r} - III\right).
\end{aligned} \tag{5.118}$$

[9]Nous continuons à noter cette contribution partielle $\widehat{F}_2$.

La parenthèse du membre de droite regroupe un ensemble de traces dont les expressions sont données par :

$$\begin{aligned} I &= tr(\not{n}\not{l}\,\not{n}\,\not{k}\,\not{n}\,\not{p}\,\not{r}\,\not{k}), \\ II &= tr(\not{n}\not{l}\,\not{n}\,\not{k}\,\not{r}\,\not{p}\,\not{n}\,\not{k}), \\ III &= tr(\not{n}\not{l}\,\not{n}\,\not{k}\,\gamma^{\alpha}\,\not{p}\,\gamma_{\alpha}\,\not{k}). \end{aligned} \tag{5.119}$$

Leur calcul requiert les propriétés :

$$tr(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}) = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}), \tag{5.120}$$

$$\gamma^{\mu}\,\gamma^{\nu}\,\gamma_{\mu} = -2\,\gamma^{\nu}, \tag{5.121}$$

$$\not{a}\,\not{b}\,\not{a} = 2\,a\cdot b\,\not{a} - a^2\,\not{b}. \tag{5.122}$$

L'identité (5.122) permet en particulier d'obtenir les égalités :

$$\begin{aligned} \not{n}\,\not{k}\,\not{n} &= 2\,\xi\,\not{n}, \\ \not{n}\,\not{p}\,\not{n} &= 2\,\not{n}, \\ \not{n}\,\not{q}\,\not{n} &= 0, \end{aligned} \tag{5.123}$$

et les traces considérées s'écrivent alors respectivement :

$$\begin{aligned} I &= 16\,\xi^2\,|k^2|, \\ II &= 16\,\xi^2\,|k^2|, \\ III &= -16\,\xi|\vec{k}_T|^2. \end{aligned} \tag{5.124}$$

En substituant ces valeurs aux traces de la relation (5.118) et en remplaçant l'élément de l'espace de phase par le résultat (5.110), la contribution de $\overline{|\mathcal{M}_1|^2_{\mu\nu}}$ à la fonction de structure $\widehat{F}_2$ s'exprime à présent sous la forme :

$$\widehat{F}_2 = \frac{Q_a^2\,g^2}{6\,\pi^3}\int \frac{d\xi\,d\theta\,d|\vec{k}_T|^2 d|k^2|}{|k^2|^2}\left(\frac{2\,\xi^2\,|k^2|}{1-\xi} + \xi\,|\vec{k}_T|^2\right)\delta\left((1-\xi)\,|k^2| - |\vec{k}_T|^2\right)$$
$$\delta\left(\xi - x - \frac{|k^2| + 2\,\vec{k}_T\cdot\vec{q}_T}{2\,M\,\nu}\right). \tag{5.125}$$

L'intégration sur $|\vec{k}_T|^2$ fournit :

$$\widehat{F}_2 = \frac{Q_a^2\,g^2}{8\,\pi^3}\int \frac{d\xi\,d\theta\,d|k^2|}{|k^2|}\,\xi\,P_{qq}(\xi)\delta\left(\xi - x - \frac{|k^2| + 2\,Q\,\sqrt{(1-\xi)|k^2|}\,\cos\theta}{2\,M\,\nu}\right), \tag{5.126}$$

où la fonction de splitting $P_{qq}(\xi)$ est définie par :

$$P_{qq}(\xi) = \frac{4}{3}\,\frac{1+\xi^2}{1-\xi}. \tag{5.127}$$

Celle-ci peut s'interpréter comme la probabilité de présence, au sein du quark parent, d'un quark transportant une fraction ξ de la quadri-impulsion de ce dernier. Examinons maintenant l'intégration sur l'angle polaire θ. En utilisant les propriétés :

$$\begin{aligned} \delta(a\,x) &= \frac{1}{|a|}\delta(x), \\ \delta(f(x)) &= \frac{\delta(x-x_0)}{f'(x_0)} \text{ où } x_0 \text{ est tel que } f(x_0) = 0, \end{aligned} \tag{5.128}$$

nous obtenons pour la fonction de structure :

$$\widehat{F}_2 = \frac{Q_a^2\, g^2\, M\,\nu}{4\,\pi^3} \int \frac{d|k^2|}{|k^2|} \int \frac{\xi\, P_{qq}(\xi) d\xi}{\sqrt{D(\xi)}}, \tag{5.129}$$

où le dénominateur $D(\xi)$ est donné par :

$$D(\xi) = -4M^2\nu^2\xi^2 + 4\left(2M^2\nu^2 x - |k^2|Q^2 + M\nu|k^2|\right)\xi + 4|k^2|Q^2 - 4M^2\nu^2x^2 - |k^2|^2 - 4M\nu|k^2|x. \tag{5.130}$$

La factorisation de ce polynôme en ξ nous permet alors d'écrire :

$$D(\xi) = 4M^2\nu^2\left(\xi - \xi_+\right)\left(\xi_- - \xi\right), \tag{5.131}$$

les racines ξ_+ et ξ_- de $D(\xi)$ ayant pour valeur, en introduisant la variable $z = \frac{|k^2|}{2\,M\,\nu}$:

$$\xi_\pm = x + z - 2xz \pm 2\sqrt{xz(x-1)(z-1)}. \tag{5.132}$$

La positivité de l'argument de la racine présente dans cette dernière expression nous indique que z satisfait à la condition :

$$0 < z < 1. \tag{5.133}$$

En substituant à $D(\xi)$ la relation (5.131), la contribution de $\overline{|\mathcal{M}_1|^2_{\mu\nu}}$ à la fonction de structure $\widehat{F}_2$ devient :

$$\widehat{F}_2 = \frac{Q_a^2\,\alpha_s}{2\,\pi^2} \int_0^{2M\nu} \frac{d|k^2|}{|k^2|} \int_{\xi_-}^{\xi_+} \frac{\xi\, P_{qq}(\xi) d\xi}{\sqrt{\left(\xi - \xi_+\right)\left(\xi_- - \xi\right)}}, \tag{5.134}$$

$\alpha_s = g^2/4\pi$ désignant la constante de couplage de l'interaction forte. Nous constatons que, dans le cadre de la chromodynamique, la virtualité $|k^2|$ du quark intermédiaire et, par conséquent, son impulsion transversale[10] $|\vec{k}_T|$ ne sont pas limitées à de faibles valeurs. Nous observons également l'apparition d'une divergence logarithmique correspondant à l'émission d'un quark intermédiaire colinéaire avec le quark incident. L'introduction d'un cut-off infrarouge κ^2 permet cependant de régulariser cette contribution singulière et, en remarquant que, dans la limite où $|k^2|$ tend vers zéro, ξ_+ et ξ_- tendent vers x, nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned}
\widehat{F}_2 &= \frac{Q_a^2\,\alpha_s}{2\,\pi^2} \int_{\kappa^2}^{2M\nu} \frac{d|k^2|}{|k^2|} \left[\int_{\xi_-}^{\xi_+} \frac{x\, P_{qq}(x) d\xi}{\sqrt{\left(\xi - \xi_+\right)\left(\xi_- - \xi\right)}} + \mathcal{O}\left(\frac{|k^2|}{Q^2}\right)\right] \\
&= \frac{Q_a^2\,\alpha_s}{2\,\pi^2} \ln\left(\frac{2\,M\,\nu}{\kappa^2}\right) x\, P_{qq}(x) \int_{\xi_-}^{\xi_+} \frac{d\xi}{\sqrt{\left(\xi - \xi_+\right)\left(\xi_- - \xi\right)}}.
\end{aligned} \tag{5.135}$$

En effectuant le changement de variable $\xi = \xi_+ \cos^2 t + \xi_- \sin^2 t$, nous obtenons pour l'intégrale sur ξ :

$$\int_{\xi_-}^{\xi_+} \frac{d\xi}{\sqrt{\left(\xi - \xi_+\right)\left(\xi_- - \xi\right)}} = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dt = \pi, \tag{5.136}$$

et la contribution de $\overline{|\mathcal{M}_1|^2_{\mu\nu}}$ à la fonction de structure $\widehat{F}_2$ est finalement donnée par :

$$\begin{aligned}
\widehat{F}_2 &= \frac{Q_a^2\,\alpha_s}{2\,\pi}\, x\, P_{qq}(x) \ln\left(\frac{2\,M\,\nu}{\kappa^2}\right) \\
&= \frac{Q_a^2\,\alpha_s}{2\,\pi}\, x\, P_{qq}(x) \left[\ln\left(\frac{Q^2}{\kappa^2}\right) - \ln x\right] \\
&= Q_a^2\, x \frac{\alpha_s}{2\,\pi} \left[P_{qq}(x)\, \ln\left(\frac{Q^2}{\kappa^2}\right) + C_1(x)\right],
\end{aligned} \tag{5.137}$$

[10]En vertu de la relation $|\vec{k}_T|^2 = (1-\xi)\,|k^2|$.

la fonction[11] $C_1(x)$ étant non singulière.

Nous devons maintenant déterminer les contributions associées aux trois autres diagrammes de l'expression (5.86). Dans la jauge du cône de lumière, cependant, seul le terme $|\mathcal{M}_1|^2_{\mu\nu}$ fournit une divergence logarithmique, les diagrammes non encore envisagés n'apportant quant à eux que des corrections finies à la fonction de structure $\widehat{F}_2$, que nous désignons par :

$$Q_a^2\, x \frac{\alpha_s}{2\,\pi} C_2(x). \tag{5.138}$$

Nous pouvons nous en convaincre en effectuant le raisonnement suivant :

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}_1|^2_{\mu\nu}} &\propto \frac{1}{k^4} \to \widehat{F}_2 \propto \int_{\kappa^2}^{2M\nu} \frac{d|k^2|}{|k^2|} \propto \ln\left(\frac{2\,M\,\nu}{\kappa^2}\right), \\
\overline{\mathcal{M}_{1\,\mu}\mathcal{M}^*_{2\,\nu}} &\propto \frac{1}{k^2\,s} \to \widehat{F}_2 \propto \int_{\kappa^2}^{2M\nu} \frac{d|k^2|}{\sqrt{|k^2|\,s}} \propto \sqrt{\frac{2\,M\,\nu}{s}}, \\
\overline{|\mathcal{M}_2|^2_{\mu\nu}} &\propto \frac{1}{s^2} \to \widehat{F}_2 \propto \int_{\kappa^2}^{2M\nu} \frac{d|k^2|}{s} \propto \frac{2\,M\,\nu}{s},
\end{aligned} \tag{5.139}$$

$s = k'^2 = (p+q)^2$ désignant le carré de l'énergie totale du processus (5.85) dans le référentiel du centre de masse. La fonction de structure $\widehat{F}_2$ dont l'expression à l'ordre dominant est fournie par la relation (5.77) s'écrit dès lors à présent :

$$\begin{aligned}
\widehat{F}_2(x,Q^2) &= Q_a^2\, x \left[\delta(\xi - x) + \frac{\alpha_s}{2\,\pi}\left(P_{qq}(x)\,\ln\left(\frac{Q^2}{\kappa^2}\right) + C(x)\right)\right] \\
&= Q_a^2\, x \mathcal{P}_{qq}(x,Q^2),
\end{aligned} \tag{5.140}$$

la fonction $C(x) = C_1(x) + C_2(x)$ étant finie. Ce résultat nous indique que la prise en considération des corrections à l'ordre α_s viole le scaling de Bjorken, l'invariance d'échelle de la fonction de structure $\widehat{F}_2$ étant brisée par la présence du logarithme de Q^2. La fonction $\mathcal{P}_{qq}(x,Q^2)$ peut à nouveau être interprétée comme la probabilité de présence, au sein du quark de saveur a et de quadri-impulsion p, d'un quark de quadri-impulsion $x\,p$.

A ce stade, seule l'émission d'un gluon réel par le quark subissant la diffusion a été envisagée. L'obtention de la fonction de splitting exacte nécessite cependant que l'émission d'un gluon virtuel, correspondant aux corrections au vertex et au propagateur, soit également incluse dans notre raisonnement. Le chapitre I nous a appris que les divergences ultraviolettes que présentent ces contributions s'annulent entre diagrammes virtuels, le résultat final ne faisant dès lors plus apparaître qu'une divergence infrarouge en $\ln\left(Q^2/\kappa^2\right)$. En remarquant alors que chacune des émissions virtuelles est proportionnelle à la fonction :

$$\delta\left((p+q)^2\right) = \frac{1}{2\,M\,\nu}\,\delta(1-x), \tag{5.141}$$

nous pouvons en déduire que leur apport à la fonction de structure $\widehat{F}_2$ est de la forme :

$$Q_a^2\, x \frac{\alpha_s}{2\,\pi}\, C\,\delta(1-x)\ln\left(\frac{Q^2}{\kappa^2}\right), \tag{5.142}$$

C désignant une constante à déterminer. La fonction $\mathcal{P}_{qq}(x,Q^2)$ devient par conséquent :

$$\mathcal{P}_{qq}(x,Q^2) = \delta(\xi - x) + \frac{\alpha_s}{2\,\pi}\left[\Big(P_{qq}(x) + C\,\delta(1-x)\Big)\,\ln\left(\frac{Q^2}{\kappa^2}\right) + C(x)\right]. \tag{5.143}$$

[11] $C_1(x) = -P_{qq}(x)\ln(x)$.

Nous savons aussi que les singularités des contributions réelles et virtuelles, correspondant ici à une fraction d'impulsion $x \to 1$, se compensent mutuellement. La régularisation de la fonction de splitting $P_{qq}(x)$ s'opère alors en introduisant la distribution 'plus', définie par :

$$\int_0^1 dx\, \frac{f(x)}{(1-x)_+} = \int_0^1 dx\, \frac{f(x)-f(1)}{(1-x)}, \tag{5.144}$$

$$\frac{1}{(1-x)+} = \frac{1}{1-x} \text{ pour } 0 \leq x < 1. \tag{5.145}$$

Finalement, la détermination de la constante C s'effectue en recourant à la conservation du nombre baryonique. Celle-ci nous indique que la probabilité de présence d'un quark ne peut dépendre de l'énergie, et donc de Q^2, ce qui nous fournit la condition :

$$\int_0^1 dx \Big(P_{qq}(x) + C\,\delta(1-x) \Big) = 0. \tag{5.146}$$

Cette dernière fixe à deux la valeur de C, et la fonction de splitting exacte vaut dès lors :

$$P_{qq}(x) = \frac{4}{3}\,\frac{1+x^2}{(1-x)_+} + 2\,\delta(1-x). \tag{5.147}$$

Le calcul de la quantité $\widehat{F}_2 - 2\,x\,\widehat{F}_1$ est similaire au précédent. En recourant aux relations (5.97) et (5.117), nous obtenons à présent :

$$\widehat{F}_2 - 2\,x\,\widehat{F}_1 = \frac{x^2}{\pi\,M\,\nu}\,p^\mu p^\nu \overline{|\mathcal{M}|^2_{\mu\nu}} d\Pi_2. \tag{5.148}$$

Bien que la contribution essentielle provienne à nouveau du diagramme $|\mathcal{M}_1|^2_{\mu\nu}$, celle-ci n'engendre plus de divergence logarithmique, et l'on montre que l'on obtient alors :

$$\widehat{F}_2 - 2\,x\,\widehat{F}_1 = \frac{4\,\alpha_s}{3\,\pi}\,Q_a^2\,x^2. \tag{5.149}$$

Comme nous pouvions nous y attendre, la relation de Callan-Gross, vérifiée à l'ordre dominant, cesse d'être valable à l'ordre α_s. Dans ce qui précède, nous avons identifié la quadri-impulsion p_i du quark à celle du proton. La prise en considération de la fraction d'impulsion ζ nous conduit à écrire :

$$\begin{aligned} p_i &= \zeta\,p, \\ k &= x\,p = \lambda\,p_i = \lambda\,\zeta\,p. \end{aligned} \tag{5.150}$$

En désignant par $q_a(\zeta)$ la fonction de distribution du quark de saveur a, la fonction de structure $F_2(x, Q^2)$ est alors donnée par l'expression :

$$F_2(x, Q^2) = \sum_a \int_0^1 d\zeta \int_0^1 d\lambda\, q_a(\zeta)\, \widehat{F}_2(\lambda, Q^2)\, \delta(x - \lambda\zeta), \tag{5.151}$$

dont l'intégration sur λ fournit immédiatement :

$$F_2(x, Q^2) = \sum_a \int_x^1 \frac{d\zeta}{\zeta}\, q_a(\zeta)\, \widehat{F}_2\left(\frac{x}{\zeta}, Q^2\right). \tag{5.152}$$

En substituant à $\widehat{F}_2$ sa valeur donnée par la relation (5.140), il vient finalement :

$$F_2(x, Q^2) = x \sum_a Q_a^2 \left[q_a(x) + \frac{\alpha_s}{2\,\pi} \int_x^1 \frac{d\zeta}{\zeta}\, q_a(\zeta) \left[P_{qq}\left(\frac{x}{\zeta}\right) \ln\left(\frac{Q^2}{\kappa^2}\right) + C\left(\frac{x}{\zeta}\right) \right] \right]. \tag{5.153}$$

Ainsi qu'annoncé précédemment, nous pouvons redéfinir, à une certaine échelle de factorisation μ_F, une distribution partonique renormalisée $q_a(x, \mu_F^2)$ qui nous permet de réabsorber les divergences colinéaires dans la fonction $q_a(x)$:

$$q_a(x, \mu_F^2) = q_a(x) + \frac{\alpha_s}{2\,\pi} \int_x^1 \frac{d\zeta}{\zeta}\, q_a(\zeta) \left[P_{qq}\left(\frac{x}{\zeta}\right)\, \ln\left(\frac{\mu_F^2}{\kappa^2}\right) + C\left(\frac{x}{\zeta}\right) \right]. \tag{5.154}$$

La fonction de structure $F_2(x, Q^2)$ s'écrit alors, en terme de cette distribution renormalisée :

$$F_2(x, Q^2) = x \sum_a Q_a^2 \int_x^1 \frac{d\zeta}{\zeta}\, q_a(\zeta, \mu_F^2) \left[\delta\left(1 - \frac{x}{\zeta}\right) + \frac{\alpha_s}{2\,\pi} P_{qq}\left(\frac{x}{\zeta}\right)\, \ln\left(\frac{Q^2}{\mu_F^2}\right) \right], \tag{5.155}$$

expression de laquelle ont bel et bien disparu les divergences colinéaires rencontrées. La fonction de distribution $q_a(\zeta, \mu_F^2)$ étant soumise aux contributions physiques à longue portée, elle ne peut être obtenue dans le cadre de la théorie perturbative et nécessite par conséquent le recours à l'expérience. Le membre de gauche de l'égalité (5.155) est indépendant de l'échelle de factorisation μ_F. En posant $t = \mu_F^2$ et en dérivant cette relation par rapport à $\ln t$, nous obtenons alors[12] :

$$t\, \partial_t\, q_a(\zeta, t) = \frac{\alpha_s(t)}{2\,\pi} \int_x^1 \frac{d\zeta}{\zeta} P_{qq}\left(\frac{x}{\zeta}\right)\, q_a(\zeta, t). \tag{5.156}$$

Cette équation, connue sous le nom d'équation de Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi (DGLAP), exprime l'évolution des fonctions de distribution partonique en fonction de l'échelle de factorisation et constitue l'une des plus belles prédictions de la théorie perturbative.

[12]Nous avons introduit à la main la dépendance en t de la constante α_s.

Chapitre 6

Conclusion

Nous avons progressivement établi l'ensemble des propriétés et concepts théoriques nécessaires à notre objectif final d'analyse de la diffusion profondément inélastique électron-proton. L'emploi des coordonnées du cône de lumière s'est avéré particulièrement adapté aux analyses spatio-temporelles réalisées. La propriété de liberté asymptotique que possède la constante de couplage effective nous a autorisés à utiliser la théorie perturbative pour le calcul de la section efficace partonique dans la limite où $Q^2 \to \infty$. La propriété d'annulation des divergences colinéaire et infrarouge entre émissions réelle et virtuelle nous a permis une obtention élégante et aisée de la modification apportée à la fonction de splitting P_{qq} par l'émission d'un gluon virtuel. Nous avons établi, de manière approchée, l'équation DGLAP régissant l'évolution des fonctions de distribution partonique.

Ce travail a mis en évidence les difficultés théoriques que l'on rencontre en QCD perturbative et dans une moindre mesure les difficultés expérimentales. Le processus d'hadronisation étant par essence hautement non perturbatif, la prise en considération de processus inclusifs s'avère souvent nécessaire. Malgré ses limitations, cette démarche offre un intérêt certain, la détermination des fonctions de structure du proton s'effectuant dans ce cadre.

Je remercie madame Jaminon pour le soin qu'elle a apporté à la lecture de ce travail. Je remercie également monsieur Cudell pour l'aide précieuse et aimable qu'il m'a apportée au travers de ses explications et de ses encouragements. Je tiens aussi à remercier particulièrement Grégory Soyez pour sa disponibilité toujours offerte, ainsi que Jean-Philippe Lansberg qui m'a été d'un grand secours lors de mon apprentissage de LaTeX.

Bibliographie

[1] D. E. Soper, *Introduction to the Parton Model and Perturbative QCD*, Lectures at the 2001 CTEQ Summer School , arXiv :hep-ph/0011256.

[2] M.E. Peskin and D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, USA, 1995.

[3] F. Halzen and A.D. Martin, *Quarks & Leptons : An Introductory Course in Modern Particle Physics*, John Wiley & Sons, New York, USA, 1984.

[4] J.P. Lansberg, *Exposé Pour le DEA Relatif à l'Ecole d'Eté CTEQ 2001 : Les Jets en QCD*, http ://nuclth02.phys.ulg.ac.be/lansberg/trpers.html.

[5] CERN,http ://opal.web.cern.ch/Opal/events/opalpics.html

[6] V.D. Barger and R.J. Phillips, *Collider Physics*, Addison-Wesley (Frontiers in Physics, 71), Reading, USA, 1987.

[7] G. Altarelli, *The Development of Perturbative QCD*, World Scientific, Singapore, 1994.

[8] I.J.R Aitchison and A.J.G. Hey, *Gauge Theories in Particle Physics* (second edition), Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 1996.

[9] U. Mosel, *Fields, Symmetries, and Quarks*, McGraw-Hill, Hamburg, Germany, 1989.

[10] L.P. Csernai, *Introduction to Relativistic Heavy Ion Collisions*, John Wiley & Sons, Chichester, United Kingdom, 1994.

[11] U.W. Heinz, *From SPS to RHIC : Breaking the Barrier to the Quark-Gluon Plasma*, AIP Conf. Proc. **602** (2001) 281 [arXiv :hep-ph/0109006].

[12] C. Lourenco, *Searching for Quark Matter at the CERN SPS*, Nucl. Phys. A **698** (2002) 13 [arXiv :hep-ex/0105053].

[13] H. Satz, *The Search for the QGP : a Critical Appraisal*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **94** (2001) 204 [arXiv :hep-ph/0009099].

[14] J.P. Blaizot, *Signals of the Quark-Gluon Plasma in Nucleus Nucleus Collisions*, Nucl. Phys. A **661** (1999) 3 [arXiv :hep-ph/9909434].

[15] Particle Data Group, *Particle Physics Booklet*, Springer, Berlin, Germany, 1998.

[16] D.M. Alde *et al.*, E772 Collaboration, Phys. Rev. Lett. **64** (1990)

[17] M. Le Bellac, *Thermal Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 1996.

[18] L. Couture et R. Zitoun, *Physique Statistique*, Ellipses, Paris, France, 1992.

[19] O. Nachtmann, *Elementary Particle Physics : Concepts And Phenomena*, Springer, Berlin, Germany, 1990.

[20] R.K. Ellis, W.J. Stirling and B.R. Webber, *QCD and Collider Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 1996.

Table des matières